

# 动力学系统中非线性项的跳跃随机性

徐云 张建峡 杜世培

贵州工学院电气系, 贵阳, 550003

1990年4月2日收到

计算机计算和实验的结果表明: 动力学系统中非线性函数有一种特殊性质, 即跳跃随机性. 这种性质使确定的非线性函数中产生了许多不同于自身曲线的跳跃随机曲线.

PACC: 0545; 0540

## 一、引言

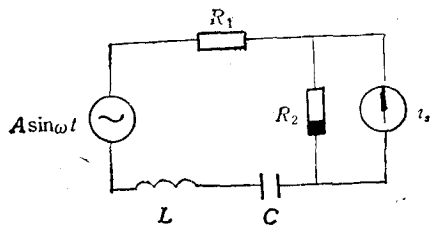
动力学系统中能否产生混沌现象的重要条件之一, 就是该动力学系统必须是非线性的. 线性系统中绝对不会产生混沌现象<sup>[1]</sup>. 非线性的条件在混沌现象的产生中如此重要, 吸引人们去研究动力学系统中非线性项(或非线性元件)在分岔、混沌时的作用, 动态行为和表现. 在研究和观察中, 我们发现了非线性项(或非线性元件)的一种特殊性质——跳跃随机性. 这种特性是确定性系统中的另一种随机现象, 它表现为确定性函数中的随机运动. 计算机计算和实验都十分清楚地证明了这一特性的存在.

## 二、计算机计算中的跳跃随机现象

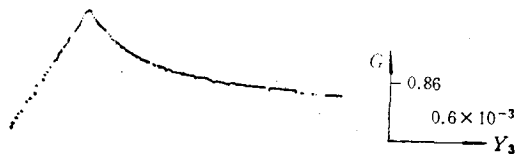
为了与实验结果相对照, 计算机计算的模拟对象是图1(a)所示的非线性二阶强制电路. 这个电路能产生各种分岔序列和混沌现象<sup>[2,3]</sup>. 描述这个电路的微分方程如下:

$$\begin{aligned} di_L/dt &= [A \sin \omega t - R_1 i_L - g(i_L + i_s) - u_C]/L, \\ du_C/dt &= i_L/C. \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $i_s$  是作偏置的电流源,  $R_1$  是线性阻,  $L$  是线性电感,  $C$  是线电容,  $A$  是信号源的幅值,



(a) 非线性二阶强制电路



(b) 非线性项  $g(\cdot)$  的特性曲线

$\omega$  是信号源的角频率,  $g(i_L + i_s)$  是非线性电阻  $R_2$  的伏安特性函数. 经过实际逐点的伏安特性测量, 将测量数据进行曲线拟合, 得到  $g(i)$  的非线性特性函数分段表达式为:

$$\begin{aligned} g(i) &= 4.007 \times i + 1.0759 \times 10^{-2} & i < 0.8, \\ g(i) &= 6.89 \times \exp(-1.908 \times i) + 1.713 & i \geq 0.8. \end{aligned} \quad (2)$$

图 1(b) 就是(2)式的特性曲线.

计算机计算采用 Treanor 方法求解一阶病态方程组的 Fortran 程序<sup>[4]</sup>对(1)式求解. 为此先将(1)式改写成

$$dY_1/dt = 1, \quad (3a)$$

$$dY_2/dt = Y_3/C, \quad (3b)$$

$$dY_3/dt = [A \sin \omega Y_1 - Y_2 - R_1 Y_3 - g(Y_3 + i_s)]/L. \quad (3c)$$

式中  $Y_1$  是自变量  $t$ ,  $Y_2$  是  $u_C$ ,  $Y_3$  是  $i_L$ . 在求解(3)式时,  $A, \omega, R_1, i_s, L, C$  积分区间和步长等参数, 都可选作控制参数.

为了能够观察到非线性项  $g(\cdot)$  在(3)式求解过程中的动态行为, 必须正确地获取  $g(\cdot)$  的动态轨迹.  $g(\cdot)$  动态轨迹的两个坐标轴是这样选取的: 横轴坐标是取  $Y_3$  的值; 而竖轴坐标却不能按(2)式那样直接取  $g(Y_3)$  的函数值, 因为那样取值的结果, 得到的只能是  $g(Y_3)$  的静态曲线, 即将每个  $Y_3$  值代入(2)式中得到的曲线. 由(3c)式可得函数  $g(\cdot)$  的另一种表达式:

$$g(Y_3 + i_s) = A \sin \omega Y_1 - Y_2 - R_1 Y_3 - L dY_3/dt, \quad (4)$$

令

$$G = A \sin \omega Y_1 - Y_2 - R_1 Y_3 - L dY_3/dt. \quad (5)$$

我们选竖轴坐标为  $G$  的值. 这样, 就能在  $G-Y_3$  平面上观察到非线性项  $g(\cdot)$  的动态行为. 必须说明: 横轴坐标本应选  $Y_3 + i_s$  的值, 但为了与后面的实验相对照, 我们选取  $Y_3$ . 由于  $i_s$  是常量, 两者的差别仅是横轴坐标的起始点横移  $i_s$  而已.

(2)式是映射在  $G-Y_3$  平面上一条确定的曲线, 且又是(3)式中的非线性项, 所以在对(3)式求解的整个积分区间, 由(5)式  $G$  和  $Y_3$  决定的点  $G(G_n, Y_{3n})$  (或轨迹, 或路径), 都应落在  $G-Y_3$  平面的曲线  $g(Y_3 + i_s)$  上. 这是因为  $g(\cdot)$  的函数关系是确定的. 而实验结果却表明, 在某些参数区间, 在对(3)式求解的某些时间中, 非线性项  $g(\cdot)$  使点  $G(G_n, Y_3)$  (或轨迹, 或路径) 不落在  $G-Y_3$  平面的曲线  $g(Y_3 + i_s)$  上, 这就是非线性的跳跃随机性. 这种现象的表现形式多种多样, 但就其归类来说, 有两大类:

1) 当非线性项呈现跳跃随机性时, 点  $G(G_n, Y_{3n})$  虽然都落在  $G-Y_3$  平面的曲线  $g(Y_3 + i_s)$  上(见图2(a)), 而  $G$  的路径或轨迹却不落在曲线  $g(Y_3 + i_s)$  上. 若将每个点  $G$  按时间顺序用直线连接起来后,  $G$  的轨迹即如图 2(b) 所示, 点  $G$  的运动路径并不受函数  $g(Y_3 + i_s)$  的约束, 在曲线  $g(Y_3 + i_s)$  中“开辟”出许多“小路”. 在实验中, 我们观察到那些不同于曲线  $g(Y_3 + i_s)$  的线段时, 它们总是起始于曲线  $g(\cdot)$  的  $bc$  段, 终止于曲线  $g(\cdot)$  的  $ab$  段(见图 1(b)), 且斜率、长短各异. 图 2(c) 是与图 2(a), (b) 相对应的  $Y_2, Y_3$  相平面轨迹图. 对应于图 2 的实验参数是: 步长 = 30/每周( $T$ ), 积分区间 = 0—40 周( $T$ ),  $\omega = 2\pi \times 12000$ ,  $A = 0.25$ ,  $i_s = 0.815$ ,  $R_1 = 130\Omega$ ,  $L = 0.02$ ,  $C = 0.15 \times 10^{-7}$ ,  $Y_2, Y_3$  的初始条件为零,  $T = 2\pi/\omega$ .

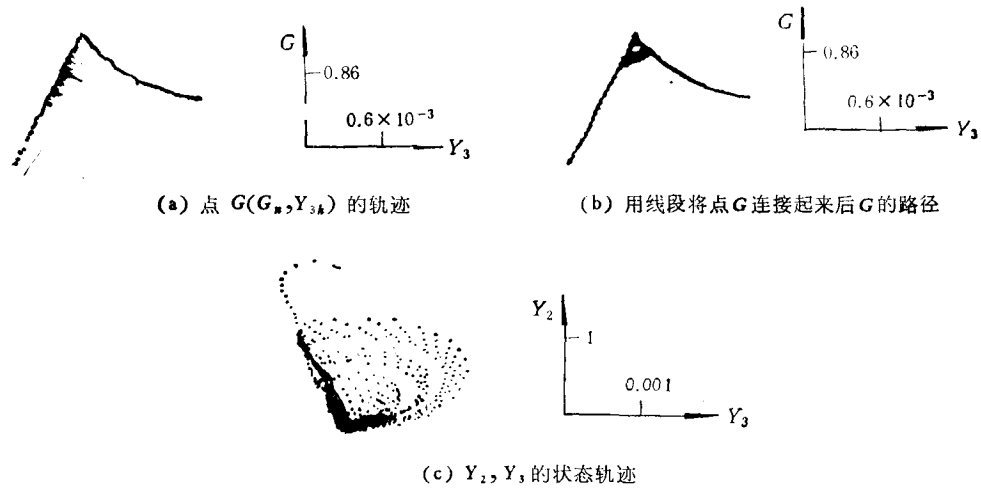


图 2

2) 非线性项呈现跳跃随机性时, 点  $G(G_n, Y_{3n})$  不落在曲线  $g(\cdot)$  上, 如图 3(a) 所示,  $G$  的运动路径(或轨迹)也不落在曲线  $g(Y_3 + i_t)$  上. 当用直线按时间顺序将所有的点  $G(G_n, Y_{3n})$  连接起来时,  $G$  的轨迹已掩盖了曲线  $g(Y_3 + i_t)$  的特征, 见图 3(c). 当非线性项产生跳跃随机性时, 起点在曲线  $g(Y_3 + i_t)$  的  $bc$  段, 终点虽然落在曲线  $g(\cdot)$  的  $ab$  段, 但还须经过几个过渡点, 这些过渡点大都分布在曲线  $g(\cdot)$   $ab$  段的两边. 图 3(c) 是与图 3(a), (b) 相对应的  $Y_2, Y_3$  相轨迹图. 与图 3 相对应的实验条件是: 步长 = 30/每周( $T$ ), 积分区间 = 0—45 周( $T$ ),  $\omega = 2\pi \times 8000$ ,  $A = 0.15$ ,  $i_t = 0.81$ ,  $R_1 = 130\Omega$ ,  $L = 0.006$ ,  $C = 0.5 \times 10^{-8}$ ,  $Y_2, Y_3$  的初始条件为零.

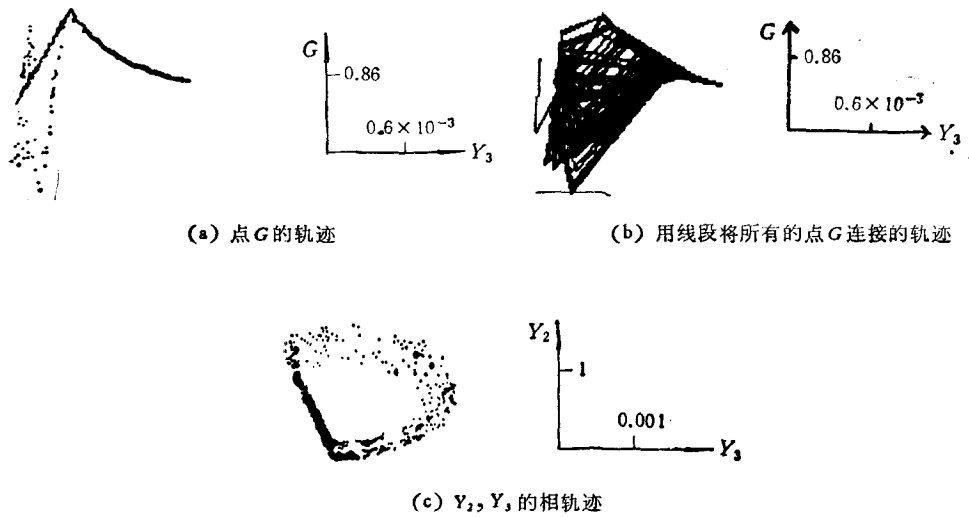


图 3

计算机程序分别在 AST-286, IBM PC/XT 和长城 0520 微机上运算, 结果均相同.

### 三、实验中的跳跃随机现象

实验也同样可以观察到非线性元件的跳跃随机特性，而且与计算机计算的结果极为相似。实验采用图 1 所示的电路，电路中的非线性电阻  $R_2$  采用二端单结管，其非线性伏/安特性曲线如图 4(a)。这条曲线制约着非线性元件两端电压和电流的关系，用示波器观察非线性元件单结管的动态伏/安特性曲线，横轴是流过其两端的电流，竖轴是两端的电压。非线性元件能呈现跳跃随机性的控制参数平面的测度不为零。图 4(b) 是非线性元件产生跳跃随机性时，用普通示波器显示非线性元件伏/安特性动态轨迹的照片。而图 4(c) 则是用数字储存示波器记录在周期激励信号 20 个周期内，非线性元件的动态伏/安轨迹。与计算机计算雷同，图 4(c) 中那些不属于曲线  $g(\cdot)$  [见图 4(a)] 的跳跃随机曲线的起点都在类似于图 1(b) 的  $bc$  段，终点都在  $ab$  段，其形状也与计算机计算的结果相似。图 4 的实验电路参数如下： $L = 100\text{mH}$ ， $C = 0.012\mu\text{F}$ ， $R_1 = 37\Omega$ ， $i_s = 0.64\text{mA}$ ， $f = 9.6\text{kHz}$ ， $A = 0.44\text{V}$ 。

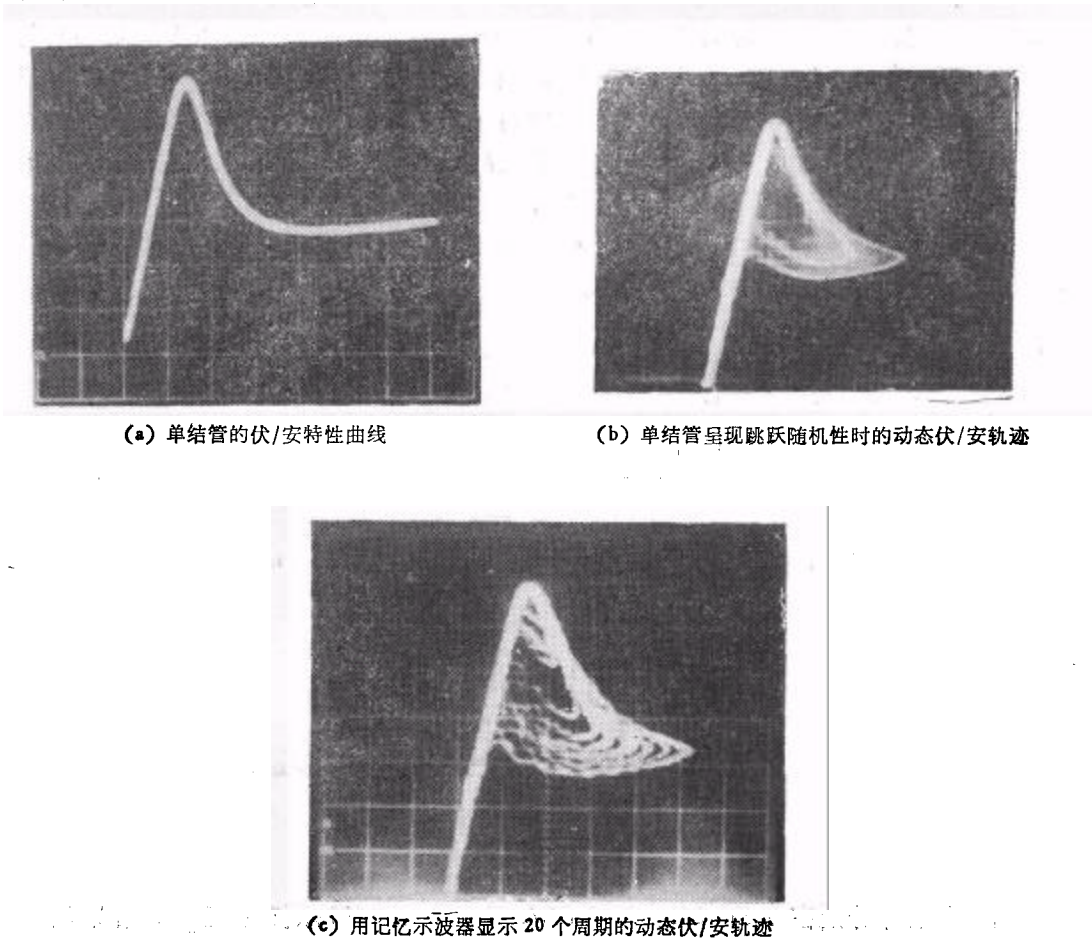


图 4

## 四、讨 论

1. 计算机计算与实验相互印证了这样一个事实, 动力学系统的非线性项(或非线性元件)在一定的参数条件下, 能呈现跳跃随机性, 产生这种特性的控制参数平面的测度不为零. 这种特性能使它们在一段时间内产生各种不同于自身的跳跃随机曲线. 这些跳跃随机曲线能够逃逸非线性项的函数约束关系, 但跳跃随机曲线的起点和终点都在非线性项的函数曲线上(或非线性元件的特性曲线上).

2. 本文提及的跳跃随机性与某些系统中出现的“跳跃现象”<sup>[5,6]</sup>有若干不同, 跳跃现象的跳跃点是有限的(2—4 个点), 其跳跃路径一般为直线, 斜率也是固定的(平行于坐标轴). 因此, 在考虑跳跃现象后描述元件的特性时, 只须增加有限个分段约束条件, 就可以完整地描述该元件的特性. 而跳跃随机性的跳跃起点和终点都是无穷的, 其路径为各种不同的曲线, 显然, 若要把非线性元件的跳跃随机性考虑进去, 用有限的表达式去描述该非线性项的函数关系时, 是不可能的. 显然, 跳跃现象仅仅是跳跃随机性的一个特例, 一个子集.

3. 自身固有的函数约束特性与跳跃随机性, 两种对立的特性寓于同一个非线性项(非线性元件)中, 这与当初在确定性的系统中出现了随机运动一样令人难以接受, 然而这毕竟是事实. 我们可以预言, 非线性项的这种跳跃随机性可能与分岔、混沌现象有某种联系.

贵州省科学技术基金资助的课题.

[1] 郝柏林, 物理学进展, **3**(1983), 329.

[2] 徐云, 物理学报, **34**(1985), 1080.

[3] 徐云, 物理学报, **35**(1986), 119.

[4] 上海机械学院编写, FORTRAN 应用程序库, 上海科学技术文献出版社, (1984), 136 页.

[5] И. И. 基赫曼, А. Б. 斯科霍罗德著, 随机过程论(第二卷), 科学出版社, (1986), 235 页.

[6] R. 吉尔莫雷著, 湛垦华、刘秉筠译, 科学与工程中的基本突变理论, 西安交通大学出版社, (1989), 156 页.

---

## THE JUMP STOCHASTICITY CHARACTERISTICS OF NONLI- NER FUNCTION IN THE DYNAMIC SYSTEM

XU YUN    ZHANG JIAN-XIA    DU SHI-PEI

*Department of Electrical Engineering, Guizhou Institute of Technology, Guiyang, 550003*

(Received 2 April 1990)

### ABSTRACT

The results of both the computer and laboratory experiment show that the nonlinear function in the dynamic system bears a special property, that of jump stochasticity. This special property makes the nonlinear function to produce a number of jump stochasticity curves which are different from that of itself.

**PACC:** 0545; 0540