第 40 卷 第 4 期　　物 理 学 报　　Vol. 40, No. 4
1991 年 4 月　　ACTA PHYSICA SINICA　　Apr., 1991

光子消灭算符高次幂本征态的数学结构及其性质

王 继 锁
聊城师范学院物理系，聊城，252059

1990 年 6 月 4 日收到

本文在文献[1]的基础上研究了光子消灭算符高次幂 $a^k(k\geqslant 3)$ 的正交归一本征态的数学和量子统计性质，指出这些本征态均具有非经典效应，它们组成一个以非经典光场态作基矢的完备表象. 在此之前，文献[1]讨论的 $k=3$ 的情况只是我们所得普遍性结论的特例.

PACC: 4250

最近，彭石安等人提出了一种构造光子消灭算符高次幂 a^k 的正交归一本征态的一般方法，并具体研究了 $k=3$ 的情况[1]. 本文在此基础上研究光子消灭算符高次幂 $a^k(k\geqslant 3$，下同，行文中不再注明)的本征态的数学结构及其性质.

一、a^k 的正交归一本征态的数学结构

由文献[1]知，光子消灭算符高次幂 a^k 的本征值为 α^k 的正交本征态 (k 重简并态) 为

$$|\phi_j\rangle_k = C_j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{(kn+j)!}} |kn+j\rangle, \tag{1}$$

式中 C_j 为相应态矢的待定归一化常数，α 为复参数，态矢符号中的下标 k 表示它是属于算符 a^k 的本征态，j 的可能取值(下同，文中不再注明)为 $j=0,1,2,\cdots,(k-1)$.

为求(1)式中的归一化系数 C_j，为简单起见，设 C_j 均为实数，并令 $|\alpha|^2=x$，由归一化条件得

$${}_k\langle\phi_j|\phi_j\rangle_k = C_j^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn+j}}{(kn+j)!} = C_j^2 A_j(x) = 1. \tag{2}$$

式中

$$A_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn+j}}{(kn+j)!}. \tag{3}$$

注意到

$$\sum_{j=0}^{k-1} A_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{4}$$

和

$$A_i(x) = A_0^{(k-i)}(x), \quad (i = 1, 2, \cdots, (k-1)). \tag{5}$$

式中 $A_0^{(k-i)}(x)$ 表示 $A_0(x)$ 对 x 的$(k-i)$阶导数,于是可得到一个关于 $A_0(x)$ 的 $(k-1)$阶线性常系数非齐次微分方程

$$A_0^{(k-1)}(x) + A_0^{(k-2)}(x) + \cdots + A_0'(x) + A_0(x) = e^x. \tag{6}$$

与(6)式相应的齐次方程的 $(k-1)$ 个特征根为

$$\lambda_l = \cos\frac{2l\pi}{k} + i\sin\frac{2l\pi}{k}, \quad (l = 1, 2, \cdots, (k-1)). \tag{7}$$

因为当 $m = 1, 2, \cdots, \left[\frac{k-1}{2}\right]$ 时(其中 $[(k-1)/2]$ 为 $(k-1)/2$ 的最大整数)有

$$\cos\frac{2m\pi}{k} = \cos\frac{2(k-m)\pi}{k}, \quad \sin\frac{2m\pi}{k} = -\sin\frac{2(k-m)\pi}{k},$$

所以当 k 为奇数时,(7)式所给出的偶数个特征根组成 $(k-1)/2$ 对复根;当 k 为偶数时,除 $\lambda_{k/2} = -1$ 外,(7)式所给出的其余$(k-2)$ 个特征根组成 $(k/2-1)$ 对复根,因此与方程(6)相应的齐次微分方程的通解可写成

$$\bar{A}_0(x) = \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left[B_l\cos\left(x\sin\frac{2l\pi}{k}\right) + D_l\sin\left(x\sin\frac{2l\pi}{k}\right)\right]\exp\left(x\cos\frac{2l\pi}{k}\right), \tag{8}$$

式中 B_l 和 D_l 均为积分常数. 令方程 (6) 的特解为 $\tilde{A}_0(x) = B_0e^x$, 代入 (6) 式后可得 $B_0 = 1/k$, 所以方程(6)的通解为

$$A_0(x) = \frac{1}{k}e^x + \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left[B_l\cos\left(x\sin\frac{2l\pi}{k}\right) + D_l\sin\left(x\sin\frac{2l\pi}{k}\right)\right]\exp\left(x\cos\frac{2l\pi}{k}\right). \tag{9}$$

将上式代入(5)式则可求出 $A_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, (k-1))$ 的表示式. 这样就得到了 a^k 的 k 个正交归一本征态,即

$$|\phi_j\rangle_k = A_j^{-\frac{1}{2}}(|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{(kn+j)!}}|kn+j\rangle. \tag{10}$$

(9)式中的积分常数 B_l 和 D_l 可用下述方法求出: 令 (3) 式中 $j = 0$ 并与(9)式相比较可得

$$\frac{1}{k}e^x + \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left[B_l\cos\left(x\sin\frac{2l\pi}{k}\right) + D_l\sin\left(x\sin\frac{2l\pi}{k}\right)\right]\exp\left(x\cos\frac{2l\pi}{k}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{kn}}{(kn)!}, \tag{11}$$

将上式等号左端展开成 x 的幂级数,并比较方程等号两端 x 同次幂的系数, 可求出 B_l 和 D_l. 只要给定 k 的某一确定值,即可由(11)式按上述办法求出 B_l 和 D_l 的确定值, 则(9)式中的 $A_0(x)$ 就可完全确定. 然后由 (5) 式求出 $A_i(x)$, 这样由(10)式所表示的 a^k 的 k 个正交归一本征态也就可完全确定.

二、a^k 的正交归一本征态的数学性质

首先，我们最为关心的数学性质，是 a^k 的上述 k 个正交归一本征态能否构成一个完备的 Hilbert 空间，即它们能否作为一个表象使用．为研究这一点，同文献[1]中对 a^3 的三个正交归一本征态的讨论相类似，对 a^k 的 k 个正交归一本征态定义如下 k 个算符：

$$I_i = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\phi_i\rangle_{kk}\langle\phi_i|,$$

并在任意一个归一化了的态矢中求这 k 个算符的平均值，看其是否为 1．用与文献[1]中完全相同的方法不难证明，a^k 的这 k 个本征态都不能单独构成完备的 Hilbert 空间，它们都不能像相干态那样作为表象使用．但是，可以证明，这 k 个态的组合具有相干态那样的完备性，即

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\left(\sum_{i=0}^{k-1} |\phi_i\rangle_{kk}\langle\phi_i|\right) = 1. \tag{12}$$

上式的证明方法与文献[1]对该文(20)式的证明完全相同，这里不再赘述．总之，a^k 的 k 个正交归一本征态可构成一个完备表象．

其次，在由 a^k 的上述 k 个本征态所组成的空间里，通过 a 的连续作用可实现这 k 个态间的相互转换．比如将 a 连续作用于态 $|\phi_0\rangle_k$ 上，可以得到

$$a^i|\phi_0\rangle_k = \alpha^i A_0^{\frac{1}{2}} A_{k-i}^{\frac{1}{2}} |\phi_{k-i}\rangle_k, \quad (i = 1, 2, \cdots, k), \tag{13}$$

即 a 连续作用于一个态 $|\phi_0\rangle_k$ 上，可使该态按照 $|\phi_0\rangle_k \to |\phi_{k-1}\rangle_k \to |\phi_{k-2}\rangle_k \to \cdots \to |\phi_1\rangle_k \to |\phi_0\rangle_k$ 的顺序，历经其他 $(k-1)$ 个态后又回到原态 $|\phi_0\rangle_k$，亦即 a 在这 k 个本征态间起了一个转动算符的作用．

再者，由于 a^k 的上述 k 个本征态表示以复参数 α 定义的量子光场态，所以当 α 取不同值时各态矢相应的内积为

$$\begin{aligned} {}_k\langle\phi_j(\alpha)|\phi_j(\alpha')\rangle_k &= [A_j(|\alpha|^2)A_j(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*\alpha')^{kn+j}}{(kn+j)!} \\ &= [A_j(|\alpha|^2)A_j(|\alpha'|^2)]^{-\frac{1}{2}} A_j(\alpha^*\alpha') \neq 0. \end{aligned}$$

这表明，在"α-平面"上 a^k 的 k 个本征态和 Glauber 相干态一样，本身并不正交．

三、a^k 的正交归一本征态的量子统计性质

与文献[1]中对 a^3 定义 Z_1 和 Z_2 相类似，对 a^k 我们也定义两个可测量即两个厄密算符 W_1 和 W_2，它们分别表示光场复振幅 k 次幂的实部和虚部的算符

$$W_1 = \frac{a^{+k} + a^k}{2}, \quad W_2 = \frac{i(a^{+k} + a^k)}{2}. \tag{14}$$

可以证明(见附录)，当 $k \geqslant 3$ 时这两个算符有如下对易关系：

$$[W_1, W_2] = \frac{i}{2}[a^k, a^{+k}]$$

$$= \frac{i}{2}\left\{\prod_{p=2}^{k}(N+p)+\sum_{p=3}^{k}\left[(2p-3)\prod_{q=p}^{k}(N+q)\prod_{r=0}^{p-3}(N-r)\right]\right.$$

$$\left.+(2k-1)\prod_{p=0}^{k-2}(N-p)\right\}. \tag{15}$$

式中 $N=a^+a$. 因此算符 W_1 与 W_2 满足的测不准关系为

$$\Delta W_1\Delta W_2 \geqslant \frac{1}{4}\cdot {}_k\left\langle\prod_{p=2}^{k}(N+p)+\sum_{p=3}^{k}\left[(2p-3)\prod_{q=p}^{k}(N+q)\prod_{r=0}^{p-3}(N-r)\right]\right.$$

$$\left.+(2k-1)\prod_{p=0}^{k-2}(N-p)\right\rangle_k. \tag{16}$$

为了计算 W_1 和 W_2 在 a^k 的 k 个正交归一本征态中的起伏，注意到对这 k 个态均有 ${}_k\langle a^{+k}\rangle_k=\alpha^{*k}$, ${}_k\langle a^k\rangle_k=\alpha^k$, ${}_k\langle a^{+2k}\rangle_k=\alpha^{*2k}$, ${}_k\langle a^{2k}\rangle_k=\alpha^{2k}$, ${}_k\langle a^{+k}a^k\rangle_k=|\alpha|^{2k}$, 可求得对这 k 个态也均有下式成立:

$${}_k\langle\Delta W_1^2\rangle_k={}_k\langle\Delta W_2^2\rangle_k$$

$$=\frac{1}{4}\cdot {}_k\left\langle\prod_{p=2}^{k}(N+p)+\sum_{p=3}^{k}\left[(2p-3)\prod_{q=p}^{k}(N+q)\prod_{r=0}^{p-3}(N-r)\right]\right.$$

$$\left.+(2k-1)\prod_{p=0}^{k-2}(N-P)\right\rangle_k. \tag{17}$$

这表明，a^k 的 k 个正交归一本征态是算符 W_1 和 W_2 的最小测不准态.

下面来计算 a^k 的 k 个本征态在两个正交位相分量上的噪声性质，即计算厄密算符

$$X_1=\frac{a^++a}{2} \text{ 和 } X_2=\frac{i(a^+-a)}{2} \tag{18}$$

在这些态下的测不准情况.

因为对 a^k 的 k 个本征态均有 ${}_k\langle a^+\rangle_k={}_k\langle a\rangle_k={}_k\langle a^{+2}\rangle_k={}_k\langle a^2\rangle_k=0$, 又依据(13)式，得

$${}_k\langle\phi_0|a^+a|\phi_0\rangle_k=|\alpha|^2A_{k-1}/A_0, \tag{19}$$

$${}_k\langle\phi_i|a^+a|\phi_i\rangle_k=|\alpha|^2A_{i-1}/A_i \quad (i=1,2,\cdots,(k-1)), \tag{20}$$

所以在态 $|\phi_0\rangle_k$ 中有

$${}_k\langle\phi_0|\Delta X_1^2|\phi_0\rangle_k={}_k\langle\phi_0|\Delta X_2^2|\phi_0\rangle_k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}|\alpha|^2A_{k-1}/A_0, \tag{21}$$

在态 $|\phi_i\rangle_k$ 中 $(i=1,2,\cdots,(k-1))$ 有

$${}_k\langle\phi_i|\Delta X_1^2|\phi_i\rangle_k={}_k\langle\phi_i|\Delta X_2^2|\phi_i\rangle_k=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}|\alpha|^2A_{i-1}/A_i. \tag{22}$$

由(21)和(22)式可以看出，a^k 的 k 个本征态均没有压缩效应，也不是 X_1 和 X_2 的最小测不准态. 但它们在两正交位相分量上是等起伏的，上面 k 个态中的起伏可分为两部分，第一部分为 1/4，是真空起伏的贡献，第二部分为附加的起伏项. 可见，a^k 的 k 个本征态都不是 X_1 与 X_2 的最小测不准态，X_1 与 X_2 在这 k 个态中的起伏要大于它们在 a 本征态(Glauber 相干态)中的起伏.

Hillery[2] 对 a^2 定义了两个分别表示光场复振幅平方的实部和虚部的算符

$$Y_1 = \frac{a^{+2} + a^2}{2}, \quad Y_2 = \frac{i(a^{+2} - a^2)}{2}, \tag{23}$$

并计算了它们在 a^2 的两个正交归一本征态中的起伏。下面计算 Y_1 和 Y_2 在 a^k 的 k 个正交归一本征态中的起伏情况。

考虑到对 a^k 的 k 个本征态均有

$$_k\langle a^{+4}\rangle_k = {}_k\langle a^4\rangle_k = {}_k\langle a^{+2}\rangle_k = {}_k\langle a^2\rangle_k = 0,$$

又由(13)式得

$$_k\langle \phi_0|a^{+2}a^2|\phi_0\rangle_k = |\alpha|^4 A_{k-2}/A_0, \tag{24}$$

$$_k\langle \phi_1|a^{+2}a^2|\phi_1\rangle_k = |\alpha|^4 A_{k-2}/A_1, \tag{25}$$

$$_k\langle \phi_i|a^{+2}a^2|\phi_i\rangle_k = |\alpha|^4 A_{i-2}/A_i, \quad (i = 2, 3, \cdots, (k-1)). \tag{26}$$

所以在态 $|\phi_0\rangle_k$ 中有

$$\begin{aligned} {}_k\langle \phi_0|\Delta Y_1^2|\phi_0\rangle_k &= {}_k\langle \phi_0|\Delta Y_2^2|\phi_0\rangle_k \\ &= {}_k\left\langle \phi_0 \left| a^+a + \frac{1}{2} \right| \phi_0 \right\rangle_k + \frac{1}{2}|\alpha|^4 A_{k-2}/A_0, \end{aligned} \tag{27}$$

在态 $|\phi_1\rangle_k$ 中有

$$\begin{aligned} {}_k\langle \phi_1|\Delta Y_1^2|\phi_1\rangle_k &= {}_k\langle \phi_1|\Delta Y_2^2|\phi_1\rangle_k \\ &= {}_k\left\langle \phi_1 \left| a^+a + \frac{1}{2} \right| \phi_1 \right\rangle_k + \frac{1}{2}|\alpha|^4 A_{k-1}/A_1, \end{aligned} \tag{28}$$

在态 $|\phi_i\rangle_k$ 中 $(i = 2, 3, \cdots, (k-1))$ 有

$$\begin{aligned} {}_k\langle \phi_i|\Delta Y_1^2|\phi_i\rangle_k &= {}_k\langle \phi_i|\Delta Y_2^2|\phi_i\rangle_k \\ &= {}_k\left\langle \phi_i \left| a^+a + \frac{1}{2} \right| \phi_i \right\rangle_k + \frac{1}{2}|\alpha|^4 A_{i-2}/A_i. \end{aligned} \tag{29}$$

由(27)—(29)式可以看出，Y_1 与 Y_2 在 a^k 的 k 个本征态中也是等起伏的。上面 k 个态中的起伏也都可分为两部分，第一部分为 ${}_k\left\langle a^+a + \frac{1}{2}\right\rangle_k$，是标准的量子极限，第二部分为附加的起伏项。可见，a^k 的 k 个本征态也都不是 Y_1 与 Y_2 的最小测不准态，Y_1 与 Y_2 在这 k 个态中的起伏比它们在 a^2 的本征态中的起伏[2]也要大。

一般地，对于 a^m $(3 \leqslant m < k)$ 我们也可定义两个可测量即两个厄密算符，它们分别表示光场复振幅 m 次幂的实部和虚部的算符

$$V_1(m) = \frac{a^{+m} + a^m}{2}, \quad V_2(m) = \frac{i(a^{+m} - a^m)}{2}. \tag{30}$$

我们也可以计算 $V_1(m)$ 和 $V_2(m)$ 在 $a^k(k \geqslant 4)$ 的 k 个正交归一本征态中的起伏情况。

因为对于 $a^k(k \geqslant 4)$ 的 k 个本征态均有

$$_k\langle a^{+2m}\rangle_k = {}_k\langle a^{2m}\rangle_k = {}_k\langle a^{+m}\rangle_k = {}_k\langle a^m\rangle_k = 0,$$

又由(13)式得

$$_k\langle \phi_s|a^{+m}a^m|\phi_s\rangle_k = |\alpha|^{2m} A_{k-m+s}/A_s, \quad (s = 0, 1, 2, \cdots, (m-1)), \tag{31}$$

$$_k\langle \phi_t|a^{+m}a^m|\phi_t\rangle_k = |\alpha|^{2m} A_{t-m}/A_t, \quad (t = m, m+1, \cdots, (k-1)), \tag{32}$$

所以在态 $|\phi_s\rangle_k$ 中 $(s = 0, 1, 2, \cdots, (m-1))$ 有

$$_k\langle \phi_s|\Delta V_1^2(m)|\phi_s\rangle_k = {}_k\langle \phi_s|\Delta V_2^2(m)|\phi_s\rangle_k$$

$$= \frac{1}{4} \cdot {}_k\left\langle \psi_s \middle| \prod_{p=2}^{m} (N+p) + \sum_{p=3}^{m} \left[(2p-3) \prod_{q=p}^{m} (N+q) \prod_{r=0}^{p-3} (N-r) \right] \right.$$

$$\left. + (2m-1) \prod_{p=0}^{m-2} (N-p) \middle| \psi_s \right\rangle_k + \frac{1}{2} |\alpha|^{2m} A_{k-m+s} / A_s, \tag{33}$$

在态 $|\psi_t\rangle_k$ 中 $(t = m, m+1, \cdots, (k-1))$ 有

$${}_k\langle \psi_t | \Delta V_1^2(m) | \psi_t \rangle_k = {}_k\langle \psi_t | \Delta V_2^2(m) | \psi_t \rangle_k$$

$$= \frac{1}{4} \cdot {}_k\left\langle \psi_t \middle| \prod_{p=2}^{m} (N+p) + \sum_{p=3}^{m} \left[(2p-3) \prod_{q=p}^{m} (N+q) \prod_{r=0}^{p-3} (N-r) \right] \right.$$

$$\left. + (2m-1) \prod_{p=0}^{m-2} (N-p) \middle| \psi_t \right\rangle_k + \frac{1}{2} |\alpha|^{2m} A_{t-m} / A_t, \tag{34}$$

其中在(33)和(34)式中利用了(15)式. 由(33)和(34)式可以看出，$V_1(m)$ 与 $V_2(m)$ $(3 \leqslant m < k)$ 在 a^k $(k \geqslant 4)$ 的 k 个本征态中也是等起伏的. 上面 k 个态中的起伏也都可分为两部分，第一部分为标准的量子极限，第二部分为附加的起伏项. 可见，$a^k (k \geqslant 4)$ 的 k 个本征态也都不是 $V_1(m)$ 和 $V_2(m)$ $(3 \leqslant m < k)$ 的最小测不准态，$V_1(m)$ 和 $V_2(m)$ 在这 k 个态中的起伏比它们在 a^m $(3 \leqslant m < k)$ 的本征态中的起伏(即(33)和(34)式中的第一项)也要大.

另外需要说明的是，上面关于起伏性质的讨论尚未表明 a^k 的 k 个正交归一本征态的非经典性. 关于这一点，利用正交对称化方法[3]，由 k 个线性独立但不正交的经典光场态矢量 $|e^{i\frac{2\pi}{k}n}\alpha\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots, (k-1))$ 出发，可由 k 个经典态产生 k 个非经典态，且可以证明[1]，这 k 个非经典态不是别的，乃是光子消灭算符 k 次幂 a^k 的 k 个正交归一本征态. 所以 a^k 的这 k 个正交归一本征态均为非经典光场态，它们可构成一个以非经典光场态作基矢的完备表象. 当然，在 k 具体给定的情况下，我们也可以通过对 a^k 的 k 个本征态二阶相干度的讨论，来研究它们是如何通过反聚束效应来表现其非经典性的(我们将另文讨论).

总之，由 a^k 的本征态来考察光场的量子特性无疑会给我们带来许多关于光场结构的重要信息.

四、结 语

以上讨论的是一种用来获得当 $k \geqslant 3$ 时 a^k 的 k 个正交归一本征态的数学结构和量子统计性质的一般方法. 根据我们给出的普遍表达式，可以讨论 k 取任一确定值的情况. 比如，当 $k = 3$ 时，将方程(11)等号左端展开成 x 的幂级数形式，并比较该方程两端 x 的零次幂和一次幂的系数，则不难得到下列方程组:

$$\frac{1}{3} + B_1 + D_1 = 1,$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} B_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} D_1 = 0.$$

容易得到 $B_1 = 2/3$，$D_1 = 0$。故当 $k = 3$ 时(9)式变成

$$A_0(x) = \frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

上式与在文献[1]中所得到的 $k = 3$ 情况下 $A_0(x)$ 的表达式完全相同。易见，文献[1]中所研究的 $k = 3$ 的情况只是本文所讨论的普遍性情况的一个特例。当然，随着 k 的增大，数学上会变得复杂些，但并不会有原则上的困难。

本文得到孙金祚副教授的热心帮助和指导，在附录公式的推证过程中，作者与徐炳振同志进行过有益的讨论，在此一并深表谢意。

附　　录

1. 证明公式

$$a^{+l}a^l = \prod_{p=0}^{l-1}(N - p). \tag{A.1}$$

证明：用数学归纳法来证明.

当 $l = 1$ 时 (A.1) 式显然成立. 设当 $l = i$ 时 (A.1) 式成立，即

$$a^{+i}a^i = \prod_{p=0}^{i-1}(N - p). \tag{A.2}$$

利用关系式 $[N, a^{+i}] = ia^{+i}$，则当 $l = i + 1$ 时得

$$a^{+i+1}a^{i+1} = a^{+i}Na^i = (Na^{+i} - ia^{+i})a^i = (N - i)a^{+i}a^i.$$

将 (A.2) 式代入上式得

$$a^{+i+1}a^{i+1} = (N - i)\prod_{p=0}^{i-1}(N - p) = \prod_{p=0}^{(i+1)-1}(N - p). \tag{A.3}$$

亦即当 $l = i + 1$ 时 (A.1) 式也成立，故 (A.1) 式得证.

2. 证明公式

$$[a^k, a^{+k}] = \prod_{p=2}^{k}(N + p) + \sum_{p=3}^{k}\left[(2p - 3)\prod_{q=p}^{k}(N + q)\prod_{r=0}^{p-3}(N - r)\right] + (2k - 1)\prod_{p=0}^{k-2}(N - p) \quad (k \geqslant 3). \tag{A.4}$$

证明：用数学归纳法来证明.

因为

$$\begin{aligned}[a^3, a^{+3}] &= a[a^2, a^3] + [a, a^{+3}]a^2 \\ &= aa^+[a^2, a^{+2}] + a[a^2, a^+]a^{+2} + 3a^{+2}a^2 \\ &= (N + 1)[a^2, a^{+2}] + 2[a^2, a^{+2}] + 5a^{+2}a^2 \\ &= (N + 3)[a^2, a^{+2}] + 5a^{+2}a^2,\end{aligned}$$

将已知的 $[a^2, a^{+2}] = 4N + 2$ 代入上式，并利用 (A.1) 式得

$$[a^3, a^{+3}] = 9N^2 + 9N + 6.$$

而直接由 (A.4) 式，当 $k = 3$ 时也有

$$[a^3, a^{+3}] = 9N^2 + 9N + 6.$$

显然，当 $k = 3$ 时 (A.4) 式成立. 设当 $k = m (m > 3)$ 时 (A.4) 式成立，即

$$[a^m, a^{+m}] = \prod_{p=2}^{m}(N + p) + \sum_{p=3}^{m}\left[(2p - 3)\prod_{q=p}^{m}(N + q)\prod_{r=0}^{p-3}(N - r)\right] + (2m - 1)\prod_{p=0}^{m-2}(N - p). \tag{A.5}$$

则当 $k = m + 1$ 时有

$$= aa^+[a^m, a^{+m}] + a[a^m, a^+]a^{+m} + (m+1)a^{+m}a^m$$
$$= (N+1)[a^m, a^{+m}] + m[a^m, a^{+m}] + (2m+1)a^{+m}a^m$$
$$= (N+m+1)[a^m, a^{+m}] + (2m+1)a^{+m}a^m.$$

将 (A.5) 式代入上式,并利用 (A.1) 式得

$$[a^{m+1}, a^{+m+1}] = (N+m+1)\left\{\prod_{p=2}^{m}(N+p) + \sum_{p=3}^{m}\left[(2p-3)\prod_{q=p}^{m}(N+q)\prod_{r=0}^{p-3}(N-r)\right]\right.$$
$$\left. + (2m-1)\prod_{p=0}^{m-1}(N-p)\right\} + (2m+1)\prod_{p=0}^{m-1}(N-p)$$
$$= \prod_{p=2}^{m+1}(N+p) + \sum_{p=3}^{m+1}\left[(2p-3)\prod_{q=p}^{m+1}(N+q)\prod_{r=0}^{p-3}(N-r)\right]$$
$$+ [2(m+1)-1]\prod_{p=0}^{(m+1)-2}(N-p). \tag{A.6}$$

亦即当 $k = m+1$ 时 (A.4) 式也成立,故 (A.4) 式得证.

[1] 彭石安、郭光灿,物理学报, **39**(1990),51.
[2] M. Hillery, *Phys. Rev.*, **A36**(1987), 3796.
[3] 彭石安、郭光灿,科学通报 **35**(1990),579.

MATHEMATICAL STRUCTURE OF THE EIGENSTATES OF OPERATOR a^k AND THEIR PROPERTIES

WANG JI-SUO
Department of Physics, Liaocheng Teachers College, Liaocheng, 252059

(Received 4 June 1990)

ABSTRACT

Based on the reference [1], the mathematical and quantum statistical properties of the orthonormalized eigenstates of operator a^k ($k \geqslant 3$) are studied in this paper. It is found that all the orthonormalized eigenstates have nonclassical effects and they form a nonclassical complete representation. The result given by the reference [1] in the case $k=3$ is only a special instance of the general conclusion of ours.

PACC: 4250