平面对称标量场的静态时空*

李鑑增
北京广播学院，北京，100024

梁灿彬
北京师范大学，北京，100875

1990年7月6日收到

本文求出零质量标量场产生的平面对称度规的静态通解，并研究了它的对称性、奇异性等整体特性，发现平面对称情况与球对称不同，标量场的引入与否，其时空的奇异性没有本质差别.

PACC: 0420; 0440

近年来，有些作者对 Schwarzschild 解、Reissner-Nordström 解等球对称解的整体特性（如奇点、视界等）在加入零质量标量场后的变化进行了有益的探讨. 早在1957年，Bergmann 和 Leipnik[1] 就试图推导零质量标量场存在时 Einstein 场方程的静态球对称解，但没有成功. 1981年，Wyman[2] 完整地解决了这个问题，找到零质量标量场的静态球对称通解. 此后，有些作者[3,4]又进一步对这些解的整体特性进行探讨，得出一些重要结论. 例如 Roberts 发现，只需加入很少一点零质量标量场，Schwarzschild 解的整体特性就会发生根本性的变化：尽管奇点依然存在，但视界却消失. 这个有趣的现象使我们想到，平面对称是否也有类似的情形？本文试图在静态平面对称时空中加入零质量标量粒子，看看它与真空静态平面对称的 Taub[5] 时空有何区别？其整体特性又有什么不同？为此，首先在考虑零质量标量场的能量动量张量的基础上求解 Einstein 场方程，找到相应的时空度规.

采用类 Taub 坐标，静态平面对称度规可以写为

$$ds^2 = E(-dt^2 + dz^2) + G(dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

其中 E、G 仅是 z 的函数. 由(1)式计算 Ricci 张量，不为零的分量有

$$R_{00} = \frac{E'G'}{2EG} + \frac{EE'' - E'^2}{2E^2}, \quad R_{11} = R_{22} = -\frac{G''}{2E},$$

$$R_{33} = \frac{E'G'}{2EG} - \frac{2GG'' - G'^2}{2G^2} + \frac{E'^2 - EE''}{2E^2},$$

其中 $E' = \frac{\partial E}{\partial z}$, $G' = \frac{\partial G}{\partial z}$. 对于满足 Klein-Gordon 方程

* 国家自然科学基金资助的课题.

$$V^{\mu}_{;\mu} = m^2 V \tag{2}$$

的零质量（$m = 0$）标量场 V，其能动张量[6]

$$T_{\mu\nu} = V_\mu V_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} V_\rho V_\sigma,$$

其中 $V_\mu = \dfrac{\partial V}{\partial x^\mu}$. 将其代入 Einstein 场方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu},$$

得十个分量方程

$$R_{\mu\nu} = 8\pi V_\mu V_\nu, \tag{3}$$

因为当 $\mu \neq \nu$ 时，$R_{\mu\nu} = 0$，则由(3)式得 $V_\mu V_\nu = 0$，故 V_0, V_1, V_2, V_3 中只能有一个不为零. 又因 $R_{11} = R_{22}$，由(3)式可得 $V_1^2 = V_2^2$，说明 V_1, V_2 必须同时为零，故只有 $V_0 \neq 0$ 或 $V_3 \neq 0$ 两种情况. 这说明，能够产生平面对称度规的标量场一定是平面对称的，即

$$\mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial x}} V = \frac{\partial V}{\partial x} = V_1 = 0, \qquad \mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial y}} V = \frac{\partial V}{\partial y} = V_2 = 0,$$

$$\mathscr{L}_{\frac{\partial}{\partial \varphi}} V = x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

这一点与电磁场的情况不同，正如文献[7,8]中所指出的，能够产生平面对称度规的电磁场可以有平面对称和半平面对称两种. 对应地，电磁场所产生的平面对称度规也有 LT 度规和 LL 度规两种情况[8]. 下面求当标量场满足 $V_0 \neq 0$ 和 $V_3 \neq 0$ 时的平面对称时空度规.

1. $V_0 = V_1 = V_2 = 0$, $V_3 \neq 0$

这时，令 $V' = V_3$，则 $V^3 = \dfrac{1}{E} V'$，Einstein 场方程(3)只剩下三个分量方程

$$R_{00} = \frac{E'G'}{2EG} + \frac{EE'' - E'^2}{2E^2} = 0, \tag{4}$$

$$R_{11} = R_{22} = -\frac{G''}{2E} = 0, \tag{5}$$

$$R_{33} = \frac{E'G'}{2EG} - \frac{2GG'' - G'^2}{2G^2} + \frac{E'^2 - EE''}{2E^2} = 8\pi V'^2. \tag{6}$$

此外，标量场 V 还必须满足 $m = 0$ 的 Klein-Gordon 方程，即

$$V^{\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g}\, V^\mu)$$

$$= \frac{1}{EG} \frac{\partial}{\partial z} (GV') = 0. \tag{7}$$

对方程(5)积分得

$$G = a_1 z + a_2 > 0. \tag{8}$$

由方程(4)得

$$\frac{|E'|}{E}=\frac{a_3}{G}=\frac{a_3}{a_1z+a_2}\quad(a_3\geqslant 0),$$

则

$$E=a_4(a_1z+a_2)^{\pm a_3/a_1}\qquad(a_4>0).\tag{9}$$

将(8),(9)式代入(6)式得

$$8\pi V'^2=\frac{\pm 2a_1a_3+a_1^2}{2(a_1z+a_2)^2},$$

则

$$V'=\sqrt{\frac{\pm 2a_1a_3+a_1^2}{16\pi}}\,\frac{1}{a_1z+a_2}\qquad(a_1^2\pm 2a_1a_3\geqslant 0).\tag{10}$$

代入(7)式知,(7)式正好满足. 这说明(8),(9),(10)式确实是所求方程组的解. 于是得标量场 V 仅是 z 的函数(即 $V_3\neq 0$) 时的平面对称静态时空(取 $a_4=1$)

$$ds^2=(a_1z+a_2)^{\pm\frac{a_3}{a_1}}(-dt^2+dz^2)+(a_1z+a_2)(dx^2+dy^2).$$

作一个简单的坐标变换,可将这个度规化为

$$ds^2=Z^{\pm\frac{a_3}{a_1}}(-dT^2+dZ^2)+Z(dX^2+dY^2).\tag{11}$$

当 $V=0$, 即不存在标量场时, $V'=0$, 由(10)式得 $a_3=\mp\frac{a_1}{2}$, (11)式变为

$$ds^2=Z^{-1/2}(-dT^2+dZ^2)+Z(dX^2+dY^2).$$

这就是描写真空平面对称静态时空的 Taub 解.

2. $V_1=V_2=V_3=0,\ V_0\neq 0$

这时令 $\dot V=V_0$, 则 $V^0=-\frac{1}{E}\dot V$, 方程(4)—(7)分别变为

$$R_{00}=\frac{E'G'}{2EG}+\frac{EE''-E'^2}{2E^2}=8\pi\dot V^2,\tag{4'}$$

$$R_{11}=R_{22}=-\frac{G''}{2E}=0,\tag{5'}$$

$$R_{33}=\frac{E'G'}{2EG}-\frac{2GG''-G'^2}{2G^2}+\frac{E'^2-EE''}{2E^2}=0,\tag{6'}$$

$$V^{\mu}_{;\mu}=\frac{-1}{EG}\frac{\partial}{\partial t}(G\dot V)=0.\tag{7'}$$

由方程(7')得

$$\dot V=h\ (h\text{ 为常数}).\tag{12}$$

将方程(5')的解(8)式与(12)式代入方程(1)与(3)之和得

$$\frac{E'}{E}=\left[8\pi h^2-\frac{a_1^2}{2(a_1z+a_2)^2}\right]\frac{a_1z+a_2}{a_1}.$$

积分得

$$E = a_5(a_1z + a_2)^{-1/2}\exp\left[\frac{8\pi h^2}{a_1}\left(\frac{a_1}{2}z^2 + a_2z\right)\right]. \tag{13}$$

代入(1)式验证知,(8),(12),(13)式确实是方程组(4′)—(7′)的解．于是得标量场V仅是z的函数(即 $V_0 \neq 0$) 时的平面对称静态时空

$$ds^2 = \frac{\exp\left[\frac{8\pi h^2}{a_1}\left(\frac{a_1}{2}z^2 + a_2z\right)\right]}{(a_1z + a_2)^{1/2}}(-dt^2 + dz^2) + (a_1z + a_2)(dx^2 + dy^2).$$

作一个简单的坐标变换可化为

$$ds^2 = \frac{e^{\lambda z^2}}{\sqrt{z}}(-dT^2 + dZ^2) + Z(dX^2 + dY^2). \tag{14}$$

同样,当 $V = 0$，即不存在标量场时，$\dot{V} = 0$，由(12)式得 $h = 0$，常数

$$\lambda = 4\pi h^2 a_1^{2/3}\exp\left[\frac{16\pi h^2 a_2^2}{3a_1^2}\right] = 0.$$

度规(14)式也化为 Taub 解.

综合上述两种情况，(11)和(14)式就是所要求的平面对称标量场的静态通解．实际上,把(11)和(14)式度规函数中的Z换为T，就可得零质量标量场的空间均匀时空(具体推导从略)

$$ds^2 = T^{\pm a_3/a_1}(-dT^2 + dZ^2) + T(dx^2 + dy^2),$$

$$ds^2 = \frac{e^{\lambda T^2}}{\sqrt{T}}(-dT^2 + dZ^2) + T(dx^2 + dy^2).$$

在$V \to 0$时,它们都化为 Kramer[9] 时空

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{T}}(-dT^2 + dZ^2) + T(dx^2 + dy^2).$$

下面研究(11)和(14)式所表示时空的整体特性.

首先研究时空的整体对称性.

时空的对称性可以用其中的独立 Killing 矢量数来标志． 独立 Killing 矢量数越多,时空的对称性越强.

对于第 1 种情况,即 $V_0 = V_1 = V_2 = 0$，$V_3 \neq 0$时,在度规(11)式中取+号(取一号的情况完全类似),由 Killing 方程

$$\xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0,$$

得到 10 个方程

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial T} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_0}{\partial T} - \frac{a_3}{2a_1Z}\xi_3 = 0, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{1}{2Z^{a_3/a_1}}\xi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{1}{2Z^{a_3/a_1}}\xi_3 = 0, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial T} + \frac{\partial \xi_0}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial T} + \frac{\partial \xi_0}{\partial Z} - \frac{a_3}{a_1Z}\xi_0 = 0, \qquad \frac{\partial \xi_3}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1}{\partial Z} - \frac{1}{Z}\xi_0 = 0, \qquad \frac{\partial \xi_3}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial Z} - \frac{1}{Z}\xi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial Z} - \frac{a_3}{2a_1Z}\xi_3 = 0$$

求解这10个方程知，满足这些方程的 Killing 矢量个数与常数 a_3 的取值有关。在一般情况下，即在 a_3 不等于零或 a_1 时，(11)式所表示的时空只具有任何静态平面对称时空所应具有的 4 个 Killing 矢量。即表示沿 T，X，Y 三个方向上平移对称性的 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a$，$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a$，$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a$ 及表示在 X-Y 平面上旋转对称性的 Killing 矢量

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a = X\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a - Y\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a.$$

在 $a_3 = 0$ 时，(11)式化为

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + Z(dX^2 + dY^2). \tag{15}$$

在 $a_3 = a_1$ 时，(11)式化为

$$ds^2 = Z(-dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2). \tag{16}$$

显然，这是一个共形平直时空。(15)，(16)式两个时空除具有静态平面对称时空应有的 4 个 Killing 矢量外，还有两个额外的 Killing 矢量，说明它的对称性更高。这两个额外的 Killing 矢量在 (T, X, Y, Z) 坐标系中可以表示为

$$_{(1)}\xi^a = (X, T, 0, 0),$$
$$_{(2)}\xi^a = (Y, 0, T, 0).$$

对于第 2 种情况，即 $V_1 = V_2 = V_3 = 0$，$V_0 \neq 0$ 时，由度规(14)式，同样可得到 10 个 Killing 方程，求解这 10 个方程发现，(14)式所表示的时空只有静态平面对称时空应有的 4 个 Killing 矢量，而没有附加的对称性。

把上面的结果与只有静态平面对称时空应有的 4 个 Killing 矢量场的 Taub 时空相比较，可以得出结论：在加入零质量标量场后所得的由(11)和(14)式代表的两组静态平面对称时空中绝大多数的对称性不变，只有在(11)式中 $a_3 = 0$ 和 $a_3 = a_1$ 时，由(15)，(16)式所代表的两个时空的整体对称性得到提高，一共具有 6 个 Killing 矢量场。

下面研究时空的奇异性。

从(11)和(14)式看出，当 $Z \to 0$ 时，度规函数出现奇异性。为了确定它是否只是坐标奇异性，以及它与 Taub 时空的区别，先研究该时空中类时、类光测地线从有限时空区域 Z_0 向 $Z = 0$ 处运动时的渐近行为，看看测地线的仿射参量是否有限。

设测地线的切矢为 $\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a$，因为这两组时空都具有三个平移 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^a$，$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^a$，$\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^a$，则沿测地线运动粒子的能量

$$W = -g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^b, \tag{17}$$

动量分量

$$P_X = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^b, \tag{18}$$

$$P_Y = g_{ab}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial Y}\right)^b \tag{19}$$

为常数。由(1)式知，对于类时、类光测地线，还应满足

$$g_{00}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2+g_{11}\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2+g_{22}\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2+g_{33}\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2=-\mu^2, \tag{20}$$

其中 μ^2 可取 0，1 两个值，取 0 代表类光线，取 1 代表类时线。

对第 1 种情况，仍然考虑(11)式中取+号时的情形，将(17)—(19)式代入(20)式，并利用(11)式得

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2=Z^{-2a_3/a_1}[W^2-P^2Z^{(a_3-a_1)/a_1}-\mu^2Z^{a_3/a_1}]. \tag{21}$$

因为 $\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2$ 恒大于零，则在测地线上各点，(21)式等号右边都应大于零，否则(21)式便无意义。但右边是否大于零，与 a_3/a_1 的取值有关。由(10)式知，在(11)式中取+号时，

$$a_1^2+2a_1a_3\geqslant 0,$$

则 $a_3/a_1\geqslant -1/2$。

令 $k=a_3/a_1$，分别考虑以下几种情况：

1) $-1/2\leqslant k<0$

这时，在 $Z\to 0$ 时，(21)式等号右边第二、三两项都趋于无穷，故只要 P，μ 中有一不为零，无论 W 取多大，一定存在一点 Z_1，满足 $\frac{dZ}{d\tau}=0$，当 $Z<Z_1$ 时，(21)式便失去意义，Z_1 即为测地线的转折点，测地线将不能到达 $Z=0$，而在 $Z>Z_1$ 范围内延伸，其仿射参量可趋于无穷，这类测地线就是完备的。

而对于 T-Z 平面内的类光测地线，因为 $P=0$，$\mu=0$，无论 Z 多么接近于零，(21)式都有意义，因而这类测地线可以到达 $Z=0$，对(21)式积分，计算在 $Z\to 0$ 时的仿射参量

$$\tau=\frac{1}{W}\int_{Z_0}^{0}Z^kdZ=-\frac{1}{W(k+1)}Z_0^{k+1} \tag{22}$$

为一有限值。故 T-Z 平面内的类光测地线不完备。

2) $0\leqslant k<1$

这时，在 $Z\to 0$ 时，只要 $P\neq 0$，(21)式等号右边第二项趋于无穷，而第三项却为一有限值，故对于不在 T-Z 平面内的类时、类光测地线，必定存在一个转折点 Z_2，而不能到达 $Z=0$，只在 $Z>Z_2$ 范围内延伸，其仿射参量可趋于无穷，因而是完备的。

对于 T-Z 平面内的类光测地线，因 $P=0$，第二项为零，无论 Z 多么接近于零，(21)式都有意义，故能到达 $Z=0$。计算 $Z\to 0$ 时的仿射参量，其结果与(22)式相同，即 τ 为一有限值，说明该类光测地线不完备。

对于 T-Z 平面内的类时测地线，同样可以到达 $Z=0$，计算仿射参量时，可利用级数展开法积分，即

$$\begin{aligned}\tau&=\int_{Z_0}^{0}Z^k(W^2-Z^k)^{-1/2}\\&=\frac{1}{W}\int Z^k\left(1+\frac{Z^k}{2W^2}-\frac{3Z^{2k}}{8W^4}+\frac{5Z^{3k}}{16W^6}+\cdots\right)dZ\\&=\frac{1}{W}\left[\frac{Z^{k+1}}{k+1}+\frac{Z^{2k+1}}{2(2k+1)W^2}-\frac{3Z^{3k+1}}{8(3k+1)W^4}+\cdots\right]_{Z_0}^{0}.\end{aligned}$$

因为 $k>0$，则 $k+1$，$2k+1\cdots$ 都大于零，在 $Z\to 0$ 和 $Z\to Z_0$ 时级数每一项都有限。设 $Z_0<1$，则在 $Z=0$ 和 $Z=Z_0$ 两点，级数后项与前项之比 ∂Z^k 在 $k\to\infty$ 时都趋于零，因而此级数收敛，τ 为有限值，说明在 T-Z 平面内的类时测地线也不完备。

3) $k\geqslant 1$

这时，在 $Z\to 0$ 时，(21)式等号右边第二、三两项都趋于零，只要 W 足够大，(21)式右边就一定大于零，无转折点存在，类时类光测地线都可达 $Z=0$ 处，同样可通过级数展开进行积分的方法计算其仿射参量，得到一个收敛的级数，即仿射参量有限，说明此时任意的类时、类光测地线都不完备。

对于第 2 种情况，同样可得

$$\left(\frac{dZ}{d\tau}\right)^2=\frac{Z}{e^{\lambda Z^2}}\left[W^2-\frac{e^{\lambda Z^2}}{Z^{3/2}}P^2-\frac{\mu^2}{\sqrt{Z}}e^{\lambda Z^2}\right].$$

只要 P，μ 中有一不为零，在 $Z\to 0$ 时方括号内变为负，说明测地线在向 $Z=0$ 接近时有转折点存在，测地线完备。但对于 T-Z 平面内的类光测地线，$P=0$、$\mu=0$，上式等号右边恒大于零，说明这类测地线可以到达 $Z=0$．用级数展开积分的方法计算其仿射参量，知道它为有限，说明在 T-Z 平面内的类光测地线不完备。

综上所述，这两组时空中在接近 $Z=0$ 时都有不完备的类时、类光测地线，而 Taub 时空中却只在 T-Z 平面内有不完备的类光测地线。这说明在加入零质量标量粒子后，不完备的类时、类光测地线增多了。但这些不完备的测地线是否可以通过延拓来使其完备，这还需要通过计算曲率标量才能最后确定。

在第 1 种情况下，利用(11)式可以求出

$$R=\left(k+\frac{1}{2}\right)Z^{-(k+2)},\quad R_{ab}R^{ab}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2Z^{-2(k+2)},$$

$$R_{abcd}R^{abcd}=\left(k^2+\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}\right)Z^{-2(k+2)}.$$

在 $Z\to 0$ 时全部发散。在第 2 种情况下，利用(14)式可求出

$$R=-2\lambda\sqrt{Z}\,e^{-\lambda Z^2},\quad R_{ab}R^{ab}=4\lambda^2Ze^{-2\lambda Z^2},$$

$$R_{abcd}R^{abcd}=\left(4\lambda^2Z+\frac{\lambda}{Z}+\frac{3}{8Z^3}\right)e^{-2\lambda Z^2}.$$

在 $Z\to 0$ 时也全部发散，说明这两组时空中 $Z=0$ 都是标量多项式的曲率奇异性，不可能通过延拓使不完备类时、类光测地线完备。回忆 Taub 时空中 $R=R_{ab}R^{ab}=0$，$R_{abcd}R^{abcd}=3/8Z^3$ 在 $Z\to 0$ 时发散，说明无质量标量粒子的引入只在某些曲率标量上有区别，$Z=0$ 仍为本性奇点。同样可证明，它与 Taub 时空一样，也没有视界。因此，与 Roberts 所研究的球对称情况不同，在真空平面对称的 Taub 时空中引入无质量标量粒子，对时空的奇异性没有多大影响，而只在一些细节上有所不同。

[1] O. Bergmann and L. Leipnik, *Phys. Rev.*, **107**(1957), 1157.
[2] M. Wyman, *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 839.
[3] A. G. Agnese and M. La Camera, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 1280.
[4] M. D. Roberts, *Gen. Rel. Grav.*, **17**(1985), 913.

[5] A. H. Taub, *Ann. Math.*, 53(1951), 472.
[6] M. Wald, General Relativity, Chicago Univ. Press, Chicago, U. S. A. (1984), p. 70.
[7] Li Jian-zeng and Liang Can-bin, *Gen. Rel. Grav.*, 17(1985), 1001.
[8] Kuang Zhi-quan, Li Jiang-zeng and Liang Can-bin, *Gen. Rel. Grav.*, 19(1987), 345.
[9] D. Kramer *et al.*, Exact Solutions of Einstein's Feild Equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, (1980), p. 159.

STATIC SPACETIMES WITH PLANE-SYMMETRIC SCALAR FIELDS

Li Jian-zeng

Beijing Broadcasting Institute, Beijing, 100024

Liang Can-bin

Beijing Normal University, Beijing, 100875

(Received 6 July 1990)

ABSTRACT

The static general solution to Einstein's equations representing a plane-symmetric spacetime metric yielded by a massless scalar field is presented. The global properties of the spacetime obtained, such as its symmetries and singularities are investigated. It is found that, unlike the spherical case, the singularity in the plane-symmetric case is not influenced essentially by the introduction of the scalar field.

PACC: 0420; 0440