Z_2 对称量子链的共形场理论

许 伯 威
上海交通大学物理系，上海，200030

1990 年 7 月 30 日收到

由满足周期边界条件的 Z_2 对称量子链能谱，计算了该物理系统的中心荷以及各共形场的反常量度. 计算结果与共形场论的预言是一致的.

PACC: 0550; 0220

在研究统计力学模型的连续相变中共形对称理论是十分有效的[1,2]. 二维共形对称理论对应两个彼此互易的 Virasoro 代数，代数的算子 $L_n(\bar{L}_n)$ 满足[1,3,4]

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}c(n^3-n)\delta_{n+m,0}, \tag{1}$$

$$L_n = \frac{1}{2\pi i}\oint z^{n+1}T(z)\,dz, \tag{2}$$

$T(z)$ 为能量张量，c 为代数的中心荷，代数的不同表示由不同的 c 值所标志. 对于 $0 < c < 1$ 的么正表示，Friedan 等人[2]给出 c 的各种可能取值

$$c = 1 - \frac{6}{(m+2)(m+3)} \qquad m = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

与之对应的共形场的反常量度 $\Delta_{p,q}$ 为

$$\Delta_{p,q} = \frac{[P(m+3)-q(m+2)]^2-1}{4(m+2)(m+3)} \quad 1 \leqslant p \leqslant m+1;\ 1 \leqslant q \leqslant m+2. \tag{4}$$

在统计力学模型中，通常考虑宽度为 N 的无限长二维区域，例如一维量子链就对应这样的几何条件. 如果考虑周期性边界条件，这样的几何区域可通过以下共形变换得到[5]

$$w = x + iy = \frac{N}{2\pi}\ln z. \tag{5}$$

因此对应的能量张量的变换为[1]

$$\begin{aligned} T'(w) &= \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^{-2}\left(T(z) - \frac{c}{12}\{w, z\}\right) \\ &= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2\left(z^2T(z) - \frac{c}{24}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\{w, z\}$ 为 Schwartz 微分式. 共形协变的哈密顿量 H_c 为

$$H_c = \frac{1}{2N}\int_0^N (T'(w) + \bar{T}'(\bar{w}))\,dy$$

$$= \frac{2\pi}{N}(L_0 + \bar{L}_0) - \frac{\pi c}{6N} + K, \tag{7}$$

式中 K 为积分常数. 取表示空间态矢量 $|\Delta + n\rangle$, $|\Delta + \bar{n}\rangle$,

$$\begin{aligned} L_0|\Delta + n\rangle &= (\Delta + n)|\Delta + n\rangle \quad n \\ \bar{L}_0|\bar{\Delta} + \bar{n}\rangle &= (\bar{\Delta} + \bar{n})|\bar{\Delta} + \bar{n}\rangle \quad \bar{n} \end{aligned} = 0,\ 1,\ 2\cdots. \tag{8}$$

则显然 H_0 的本征值为

$$E = \frac{2\pi}{N}(\Delta + \bar{\Delta} + n + \bar{n}) - \frac{\pi c}{6N} + K, \tag{9}$$

基态能量为

$$E_0 = -\frac{\pi c}{6N} + K, \tag{10}$$

而激发态(例如第一激发态)和基态的能量差为[5-7]

$$E(n = \bar{n} = 0) - E_0 = \frac{2\pi}{N}(\Delta + \bar{\Delta}). \tag{11}$$

所以如求得统计力学模型的能谱,由(10),(11)式可计算中心荷 c 以及与之对应的共形场的反常量度 $\Delta(\bar{\Delta})$, 后者是与模型的临界指数相联系的.

本文将考虑近邻作用的 Z_2 对称量子链,建立与之对应的共形场理论, 并由该模型的严格解能谱,求出 c 和 $\Delta(\bar{\Delta})$. 其结果符合(3)和(4)式所给出的理论值.

Z_2 对称量子链的哈密顿量为

$$H_F = g\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^z - \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\sigma_n^x\sigma_{n+1}^x + \frac{1-\gamma}{2}\sigma_n^y\sigma_{n+1}^y\right), \tag{12}$$

式中 σ_n^x, σ_n^y 和 σ_n^z 为格点 n 的 Pauli 矩阵. 引入 Jordan-Wigner 变换[8],(12)式可写成

$$H_F = 2g\sum_{n=1}^{N}c_n^+c_n - \sum_{n=1}^{N-1}(\gamma c_n^+c_{n+1}^+ + c_n^+c_{n+1} + \mathrm{H.\ c.}), \tag{13}$$

c_n 和 c_n^+ 为费密子算符. 以上量子链对应宽度为 N 的无限长的长条,该系统的场方程为

$$\frac{dc_n}{dx} = \frac{1}{\xi}[H_F, c_n], \quad \frac{dc_n^+}{dy} = \frac{1}{\xi}[H_F, c_n^+], \tag{14}$$

x 相当欧氏空间的'时间', ξ 为一待定常数. 因哈密顿量允许差一常数因数,该因数由方程(14)的共形协变条件所确定[9]. 将(13)式代入(14)式,并应用费密子算符的反对易式,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dc_n}{dx} &= \frac{2}{\xi}(1-g)c_n + \frac{2\gamma}{\xi}\frac{dc_n^+}{dy}, \\ \frac{dc_n^+}{dx} &= -\frac{2}{\xi}(1-g)c_n^+ - \frac{2\gamma}{\xi}\frac{dc_n}{dy}. \end{aligned} \tag{15}$$

在得到(15)式时, 用到了条件 $c_{n+1} + c_{n-1} = 2c_n$, 以及 $c_{n+1} - c_{n-1} = 2\dfrac{dc_n}{dy}$. 显然, (15)式的共形协变形式要求

$$g = 1, \tag{16a}$$

$$\xi = 2\gamma. \tag{16b}$$

(16a)式给出临界条件，(16b) 式给出 ξ 的取值．考虑(16)式的取值，(15)式可化成零质量实表示旋量场方程[10]．由实旋量场的能量张量表示式，可直接计算中心荷得 $c = 1/2$[1]．在这里由哈密顿量的能谱来计算各种共形量．为了与(9)式和(10)式进行比较，模型哈密顿量应考虑周期边界条件，而(13)式对应的是自由边界条件；如考虑周期边界条件，应在 H_F 中加一附加项，这一附加项由 J-W 变换直接可得到[11]，即有

$$H = H_F + (\gamma c_N^+ c_1^+ + c_N^+ c_1 + \mathrm{H.c.}) e^{i\pi\mathscr{N}}, \tag{17}$$

式中

$$\mathscr{N} = \sum_{n=1}^{N} c_n^+ c_n. \tag{18}$$

所以满足周期边界条件的共形协变哈密顿量 H_c 为

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{1}{2\gamma} H(g=1) \\ &= \frac{1}{\gamma}\sum_{n=1}^{N} c_n^+ c_n - \frac{1}{2\gamma}\sum_{n=1}^{N-1}(\gamma c_n^+ c_{n+1}^+ + c_n^+ c_{n+1} + \mathrm{H.c.}) \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma}(\gamma c_N^+ c_1^+ + c_N^+ c_1 + \mathrm{H.c.}) e^{i\pi\mathscr{N}}. \end{aligned} \tag{19}$$

(19)式 H_c 是可以对角化的，引进正则变换

$$\eta_n = \sum_m (g_{nm} c_m + h_{nm} c_m^+), \tag{20}$$

可将(19)式对角化为[11,12]

$$H_c = \sum_{n=0}^{N-1} \Lambda(n)\left(\eta_n^+ \eta_n - \frac{1}{2}\right), \tag{21}$$

式中 $\Lambda(n)$ 即为本征值，其取值可分为二类

$$\Lambda^+(n) = \frac{1}{\gamma}\left[\left(1 - \cos\frac{2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right)^2 + \gamma^2 \sin^2\frac{2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}\right]^{\frac{1}{2}}$$

当 $\mathscr{N}$ 为偶数，　　(22a)

$$\Lambda^-(n) = \frac{1}{\gamma}\left[\left(1 - \cos\frac{2\pi n}{N}\right)^2 + \gamma^2 \sin^2\frac{2\pi n}{N}\right]^{\frac{1}{2}}$$

当 $\mathscr{N}$ 为奇数．　　(22b)

以上 n 的取值都为 $0, 1\cdots N-1$．感兴趣的是其中的 $1/N$ 项，在保留此项的情况下，(22)式分别化为

$$\Lambda^+(n) \approx 2\sin\frac{2n+1}{2N}\pi, \tag{23a}$$

$$\Lambda^-(n) \approx 2\sin\frac{n}{N}\pi. \tag{23b}$$

基态能量显然为

$$E_0 = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\Lambda^+(n) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2N}$$

$$\approx -\left(\frac{2N}{\pi} + \frac{\pi}{12N} + \cdots\right). \tag{24}$$

比较(10)式与(24)式中 $1/N$ 项，即得 $c = 1/2$. 与由实表示旋量场能量张量计算结果一致. 激发态能量可按$\mathcal{N}$的奇、偶性分成二类.

$\mathcal{N}$为偶数的激发态能量

$$E^+ = \Lambda^+(n_1) + \cdots + \Lambda^+(n_{2j}) + E_0, \tag{25}$$

式中最低激发态能量显然为

$$\begin{aligned} E_0^+ &= \Lambda^+(0) + \Lambda^+(N-1) + E_0 \\ &= 4\sin\frac{\pi}{2N} + E_0 \approx \frac{2\pi}{N} + E_0. \end{aligned} \tag{26}$$

将(26)式与(11)式比较,得

$$\Delta_\varepsilon = \bar{\Delta}_\varepsilon = \frac{1}{2}. \tag{27}$$

$\mathcal{N}$ 为奇数的激发态能量

$$E^- = \Lambda^-(n_1) + \cdots + \Lambda(n_{2j+1}) + E_0^-, \tag{28}$$

式中

$$E_0^- = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\Lambda^-(n) = -\cos\frac{\pi}{2N}. \tag{29}$$

显然这也是 $\mathcal{N}$ 为奇数时的最低激发态能量. 由(24)式和(29)式,所以有

$$E_0^- = \tan\frac{\pi}{4N} + E_0 \approx \frac{\pi}{4N} + E_0. \tag{30}$$

将(30)式与(11)式比较,得

$$\Delta_\sigma = \bar{\Delta}_\sigma = \frac{1}{16}. \tag{31}$$

另外,在(3)式和(4)式中,将 $m = 1$ 代入,得

$$c = \frac{1}{2}, \quad \Delta_{11} = \Delta_{23} = 0, \quad \Delta_{12} = \Delta_{22} = \frac{1}{16}, \quad \Delta_{13} = \Delta_{21} = \frac{1}{2}. \tag{32}$$

这与(24),(27)和(31)式得到的结果完全一致. 即本文中建立了 Z_2 对称量子链的共形场理论,该模型($\gamma \neq 0$)等价二维实表示旋量场,属 Ising 普适类.

[1] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.*, **B241**(1984), 333.
[2] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *Phys. Rev. Lett.*, 52(1984), 1575.
[3] M. A. Virasoro, *Phys. Rev.*, **D1**(1970), 2933.
[4] S. Fubini, A. J. Hanson, R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 1732.
[5] J. L. Cardy, *J. Phys. A*, 17(1984), L385.
[6] H. W. Blote, J. L. Cardy, M. P. Nightingale, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 742.
[7] J. L. Cardy, *Nucl. Phys.*, **B270**(1986), 186.
[8] T. D. Schultz, D. C. Mattis, E. H. Lieb, *Rev. Mod. Phys.*, **36**(1964), 856.
[9] G. Von Gehlen, V. Rittenberg, H. Ruegg, *J. Phys. A*, **19**(1985), 107.
[10] Xu Bowei (许伯威) *Chinese Phys. Lett.*, 9(1990), 385.
[11] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Ann. Phys.*, **16**(1961), 407.
[12] S. Katsura, *Phys. Rev.*, **127**(1962), 1508.

CONFORMAL FIELD THEORY OF Z_2 SYMMETRIC QUANTUM CHAIN

Xu Bo-wei

Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, 200030

(Received 30 July 1990)

Abstract

From the energy spectrum of Z_2 symmetric quantum chain with periodic boundary condition, we calculated the central charge and the anomalous scale dimensions of the systems. The results are compatible with the prediction of the conformal field theory.

PACC: 0550; 0220