

合成层杂质的复合媒质的电导性质*

顾 国 庆¹⁾

上海机械学院系统工程系, 上海, 200093

余 建 华

香港理工学院应用物理系, 香港九龙

1990年8月6日收到

本文用瑞利模型研究合成层杂质的复合媒质的直流电导性质, 推导了适用于此类复合媒质的广义瑞利恒等式, 并定义系统的有效电导率. 对于具有立方对称性的系统, 给出复合媒质有效电导率的解析计算公式.

PACC: 4110D; 6630D

一、引 言

多相系统中, 几何上连通的相称为基质 (matrix), 成颗粒状的非连通相称为杂质 (inclusion), 而整个系统则称为复合媒质 (composite medium). 复合媒质理论的一个主要任务是确定杂质的物理性质和几何结构对复合媒质大尺度 (远大于杂质微结构的尺度) 物理性质的影响. 这方面的研究对于材料科学、化工、航空航天工业等方面的先进技术的开发具有重要意义^[1-3], 而且与基础理论的研究也有直接的关系^[4]. 因此, 最近 10 多年来, 复合媒质理论已成了凝聚态物理中的一个很受关注的研究方向.

对于大多数复合媒质, 可以认为基质相和杂质相的物理性质分别是均匀的 (普通复合媒质). 另一方面, 含非均匀杂质 (或基质) 的复合媒质也是相当常见的 (非均匀复合媒质). 若复合媒质中的杂质表面有一物性与内部物质相异的薄层, 或者更一般地杂质具有层状结构, 那就是合成层杂质的复合媒质. 沙岩层、聚电解质 (polyelectrolyte)^[2]、掺入绝缘体小颗粒的离子导体是此类复合媒质的典型例子^[5]. 薄层的存在对复合媒质输运性质可以有显著, 甚至本质的影响. 因此, 近来对此类复合媒质的研究也颇为重视.

当杂质浓度不太低, 因而颗粒间的相互作用不能忽略时, 第一性原理的研究具有明显的优点. 据作者所知, 主要有以下几种第一性原理方法: 瑞利方法^[6,7], Larson-Higdon 方法^[8]和变换场方法^[9]. 变换场方法能用于电导、弹性、流体动力学系统^[9-11], 对杂质的几何结构也无限制, 但对两相界面上的边界条件要求很严. 前两种方法能应用于多种边界条件, 但对运动方程和杂质的几何的要求很严, 瑞利方法至今还只能处理杂质为球形或圆

* 国家自然科学基金和上海自然科学基金资助的课题.

1) 中国高等科学技术中心 (世界实验室).

柱形的电导(或热导)问题^[2]。瑞利方法的优点是能导出复合媒质物性常数的解析计算公式,这对于应用和理论分析都是很可贵的,因此应尽可能地拓广瑞利方法的应用范围。

本文用瑞利方法研究含成层杂质的复合媒质的电导性质。用格林函数方法导出广义瑞利恒等式,用它可以确定此类复合媒质内的电势分布;导出系统的有效电导率的计算公式;并利用所得的公式分析几种特殊情况下复合媒质的电导性质。

二、广义瑞利恒等式

按照瑞利开创的研究方案,可以认为在电导率为 σ_m 的均匀的基质中分布着相同大小的杂质小球。杂质由半径为 a 、电导率为 σ_i 的核心部分以及层厚为 $(b - a)$ 、电导率为 σ_s 的表面薄层所组成。杂质的球心位于周期性点阵上。引进球坐标系,坐标原点位于某一小球的球心。对于直流电导,杂质核心部分 (Q_i), 杂质表层 (Q_s) 和基质区域 (Q_m) 的电势 Φ_i, Φ_s, Φ_m 分别满足拉普拉斯方程。球坐标下拉普拉斯方程的通解是已知的,

$$\Phi_i(r, \vartheta, \varphi) = A_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad \text{在 } Q_i \text{ 内,} \quad (1)$$

$$\Phi_s(r, \vartheta, \varphi) = B_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (B_{lm} r^l + C_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad \text{在 } Q_s \text{ 内,} \quad (2)$$

$$\Phi_m(r, \vartheta, \varphi) = D_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (D_{lm} r^l + F_{lm} r^{-l-1}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad \text{在 } Q_m \text{ 内.} \quad (3)$$

在(1)式中已考虑了电势在原点为有限的条件。在不同区域间的界面上,应该满足电势连续和电流的法向分量连续的边界条件。由这些边界条件可以给出展开式(1)–(3)中的系数之间的四个关系

$$A_{lm} = \frac{\sigma_s(2 + 1/l)}{(\sigma_s - \sigma_i)a^{2l+1}} C_{lm}, \quad (4)$$

$$B_{lm} = \frac{(\sigma_i + \sigma_s(l + 1)/l)}{(\sigma_s - \sigma_i)a^{2l+1}} C_{lm}, \quad (5)$$

$$D_{lm} = \frac{F_{lm}}{G_l b^{2l+1}}, \quad G_l = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad (6)$$

$$F_{lm} = \frac{\Delta_1 C_{lm}}{\sigma_m(2l + 1)}, \quad (7)$$

式中

$$\Delta_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^{2l+1} \frac{(\sigma_m - \sigma_s)}{(\sigma_s - \sigma_i)} (l\sigma_i + \sigma_s(l + 1)) + l\sigma_m + \sigma_s(l + 1), \quad (8)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{2l+1} \frac{(\sigma_m(l + 1) + l\sigma_s)(\sigma_i + \sigma_s(l + 1)/l)}{(\sigma_s - \sigma_i)} + (l + 1)(\sigma_m - \sigma_s). \quad (9)$$

现在只剩下一组系数还未确定。瑞利方法的核心是利用场方程的格林函数建立一个恒等式,由该恒等式可确定这组系数。由电动力学知道,不同区域间电场法向分量的不连续相当于一个面电荷,电荷密度正比于场强的法向分量之差。于是,薄层和 Q_i 区域间界面上的面电荷密度 Q_i 以及薄层和基质间界面上的面电荷密度 Q_s 分别为

$$\begin{aligned}
 Q_i(\vartheta, \varphi) &= \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Q'_l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\
 &= \epsilon_0 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{2l+1}{a^{l+2}} C_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \\
 Q_s(\vartheta, \varphi) &= \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} = \epsilon_0 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Q'_l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\
 &= \epsilon_0 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\sigma_m - \sigma_s}{\sigma_m} (l B_{lm} b^{l-1} - (l+1) C_{lm} b^{-l-2}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi).
 \end{aligned}$$

先考虑区域 Ω_i 内任意点 r 的电势。它是外加电势 $E_0 z$ 和界面上的面电荷产生的电势之和。直接写出计算结果

$$\begin{aligned}
 \Phi(r) &= E_0 z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{Q'_l}{a^{l-1}} + \frac{Q'_l}{b^{l-1}} \right) \left(\frac{r^l}{2l+1} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\
 &\quad + \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Q'_l a^{l+2} + Q'_l b^{l+2}}{(2l+1) \rho_i^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta_i, \varphi_i). \quad (10)
 \end{aligned}$$

不难证明下列关系:

$$Q'_l a^{l+2} + Q'_l b^{l+2} = (2l+1) F_{lm}, \quad (11)$$

$$A_{lm} - D_{lm} - \frac{Q'_l}{(2l+1)a^{l-1}} - \frac{Q'_l}{(2l+1)b^{l-1}} = 0. \quad (12)$$

把区域 Ω_i 内的电势的表达式(1)代入(10)式的左边,并利用(11)和(12)式,就可证得下列恒等式:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l D_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = E_0 z + \sum_{i \neq 0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{F_{lm}}{\rho_i^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta_i, \varphi_i). \quad (13)$$

用同样的方式能证明在薄层内和基质内也有同样的恒等式。

我们已把恒等式写成很对称的形式,而且恒等式中只有基质区域中电势展开式的系数。因此易于把它推广到杂质由核心部分和多层薄层组成的更为一般的情况:恒等式具有同样的形式,而联系 D_{lm} 和 F_{lm} 的 G_l 则将改变。

三、有效电导率与结构因数

本节中定义含成层杂质的复合媒质的有效电导率。只考虑具有立方对称性的点阵,对于其他点阵,可以参照文献[13]的方法而导出相应的公式。

对于具有立方对称性的系统,可以由

$$\langle J_z \rangle = -\sigma^* \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (14)$$

来确定有效电导率。 $\langle J_z \rangle$ 为元胞中的平均电流,即有

$$\langle J_z \rangle = - \int_{\Omega} \sigma_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sigma_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial z} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \sigma_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} d\mathbf{x}$$

$$= -(\sigma_i - \sigma_m)f_a A_{1,0} - (\sigma_i - \sigma_m)f_b B_{1,0} - \sigma_m \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\rangle. \quad (15)$$

f_a, f_b 以及后面将引入的 f_i 的定义已在表 1 中列出。

联合(14)和(15)式,经整理后得

$$\left(\frac{\sigma^*}{\sigma_m} - 1 \right) \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\rangle = H, \quad (16)$$

式中

$$H = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_m} - 1 \right) f_a A_{1,0} + \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_m} - 1 \right) f_b B_{1,0}. \quad (17)$$

还需要计算 $\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\rangle$. 为此取一个半径为 R_s 的样品,样品的电导率为 σ^* , 样品外是基质,并有外加电势 $E_0 z_0$, 计算结果为^[12]

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\rangle = \frac{3E_0}{\sigma^*/\sigma_m + 2}. \quad (18)$$

将上式代入(16)式后,得到系统有效电导率的一般公式

表 1

	sc	bcc	fcc
a_1	1.3045277	0.057467	0.0047058
b_1	0.0147922	0.166117	0.130683
b_2	0.4054101	1.35858	1.20500
c_1	0.1258627	0.000950738	0.00603255
c_2	0.5288918	0.733934	5.73021
c_3	0.0699313	0.134665	8.20884
c_4	6.1672713	0.0465862	0.295595
f_a	$\frac{4}{3} \pi a^3$	$\frac{8}{3} \pi a^3$	$\frac{16}{3} \pi a^3$
f_i	$\frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3)$	$\frac{8}{3} \pi (b^3 - a^3)$	$\frac{16}{3} \pi (b^3 - a^3)$
f_b	$\frac{3}{4} \pi b^3$	$\frac{8}{3} \pi b^3$	$\frac{16}{3} \pi b^3$

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_m} = \frac{1 + \frac{2H}{3E_0}}{1 - \frac{H}{3E_0}}. \quad (19)$$

对于杂质由核心部分和多层薄层组成的一般情况,推广也不难. 此时(19)式仍然成立,但 H 的定义则变为

$$H = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_m} - 1 \right) f_a A_{1,0} + \sum_{i=1}^l \left(\frac{\sigma_{s_i}}{\sigma_m} - 1 \right) f_{s_i} B_{i,0}. \quad (20)$$

σ_{s_i} 和 f_{s_i} 分别为第 i 薄层的电导率和体积, $B_{i,0}$ 为第 i 薄层中电势展开式的系数。

现在只要求出 F_{lm} , 那么复合媒质中的电势和复合媒质的有效电导率都已求得. 为此,在元胞中任取两点, $Q_e = (r_e, \vartheta_e, \varphi_e)$, $e = 1, 2$. 在恒等式(13)等号两边对 z 取 n 次

导数并代入 Q_e 的值。对于立方对称系统, 得到线性方程组

$$\begin{aligned} & \sum_{l=n+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{l-2n-2} A_{2n+1}^{m+2l-1} D_{2l-1,m} r^{l-2n-2} P_{2l-2n-2}^m(\cos \vartheta_e) \cos(m\varphi_e) \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2n+1}^{l+2n-m} F_{2l-1,m} \rho_i^{-2l-2n-1} P_{2l+2n}^m(\cos \vartheta_i) \cos(m\varphi_i) \\ & = E_0 \delta_{n,0}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$L = 2l - 1, \quad A_n^m = n! / (n - m)!,$$

定义

$$U_l^m(Q_e) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^{l-1} P_l^m(\cos \vartheta_i) \cos(m\varphi_i). \quad (22)$$

把元胞内的特殊点选作 Q_e , 例如取 $Q_e = (0, 0, 0)$, 那么 $U_l^m(Q_e)$ 就只依赖于点阵, 把它叫作结构因数。于是方程(21)变为

$$\begin{aligned} & \sum_{l=n+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2l-2n-2} A_{2n+1}^{m+2l-1} F_{2l-1,m} r^{2l-2n-2} P_{2l-2n-2}^m(\cos \vartheta_e) \cos(m\varphi_e) (G_{2l-1} a^{2l-1})^{-1} \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2n+1}^{l+2n-m} F_{2l-1,m} U_{2l+2n}^m(Q_e) = E_0 \delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (23)$$

系统的所有信息都包含在 G_e 与结构因数中, 进入(19)式的也只有 $F_{1,0}$ 和杂质的几何常数, 而且迄今为止的所有公式都是严格的。在此基础上可以得出一些有用的结论。

四、几种特殊情况

应用上两节导出的公式来研究 $\sigma_i, \sigma_s, \sigma_m$ 取特殊值的几种典型情况。

1. 基质与薄层的电导率相同, $\sigma_m = \sigma_s$

把 $\sigma_m = \sigma_s$ 代入相应的公式, 推得

$$D_{lm} = B_{lm}, \quad D_{lm} = \frac{F_{lm}}{G_l' a^{2l+1}}, \quad G_l' = \frac{\sigma_i - \sigma_s}{\sigma_i + \sigma_s(l+1)/l} \quad (24)$$

和

$$H = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_m} - 1 \right) f_1 A_{1,0}. \quad (25)$$

势函数和有效电导率与杂质半径为 a 的普通复合媒质的势函数和有效电导率相同。

2. 薄层与杂质核心部分的电导率相同, $\sigma_s = \sigma_i$

把 $\sigma_s = \sigma_i$ 代入有关的公式, 推得

$$C_{lm} = 0, \quad B_{lm} = A_{lm}, \quad G_l = \frac{\sigma_m - \sigma_i}{\sigma_i + \sigma_m(l+1)/l} \quad (26)$$

和

$$H = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_m} - 1 \right) f_1 A_{1,0}. \quad (27)$$

势函数与杂质半径为 b 的普通复合媒质内的势函数相同,有效电导率也相同。

3. 杂质核心部分与基质的电导率相同, $\sigma_i = \sigma_m$

有关的几个公式简化为

$$\Delta_1 = \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right)(l\sigma_i + \sigma_s(l+1)), \quad (28)$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1} \frac{(\sigma_i(l+1) + l\sigma_s)(\sigma_i + \sigma_s(l+1)/l)}{\sigma_s - \sigma_i} + (l+1)(\sigma_i - \sigma_s), \quad (29)$$

$$H = -4\pi F_{1,0}. \quad (30)$$

用后面第五节中推出的有效电导率的近似公式(37)作了计算,结果画在图 1 上。当 $\sigma_s < \sigma_i$ 时,有效电导率 $\sigma^* < \sigma_i$; 当 $\sigma_s > \sigma_i$ 时,则有 $\sigma^* > \sigma_i$ 。而且薄层厚度的变化并不会改变这一定性性质。

文献[12]曾研究了面阻对复合媒质传导性质的影响,结论是面阻的存在总是降低复合媒质的传导性能。显然薄层和面阻对复合媒质传导性质的作用是根本不相同的。据此可以断定,想通过使层厚趋于零的极限手续来研究面阻对复合媒质传导性质的影响是不可行的。

4. 薄层为理想导体, $\sigma_s = \infty$

对有关的公式取 $\sigma_s = \infty$ 的极限,可以推得

$$A_{lm} = B_{lm} = C_{lm} = 0, \quad (31)$$

$$D_{lm} = -\frac{F_{lm}}{b^{2l+1}} \quad (32)$$

及

$$H = -4\pi F_{1,0}. \quad (33)$$

媒质内的电势和复合媒质的有效电导率

都与含半径 b 的理想导体杂质的普通复合媒质相同。由此可见,当 $\sigma_s = \infty$ 时,只要薄层厚度有限,杂质核心部分不论有多大的电导率,其作用都与理想导体一样。这一结论与直观的看法是一致的。

5. 薄层为绝缘体, $\sigma_s = 0$

对有关的公式取 $\sigma_s = 0$ 的极限,推得

$$A_{lm} = 0, \quad B_{lm} = \frac{(1+1/l)F_{lm}}{b^{2l+1} - a^{2l+1}}, \quad C_{lm} = \frac{(2+1/l)F_{lm}}{1 - (b/a)^{2l+1}}, \quad D_{lm} = \frac{(1+1/l)F_{lm}}{b^{2l+1}} \quad (34)$$

及

$$H = -4\pi F_{1,0}. \quad (35)$$

把这些结果与含半径 b 的绝缘体杂质的普通复合媒质相比较。两种情况下,基质中的电势完全相同;在 $r < b$ 的区域中,前者的电势为任意常数,后者的电势为坐标的函数;在 $a < r < b$ 的区域中,两者的电势也不一样。然而两者的有效电导率却是相等的。也

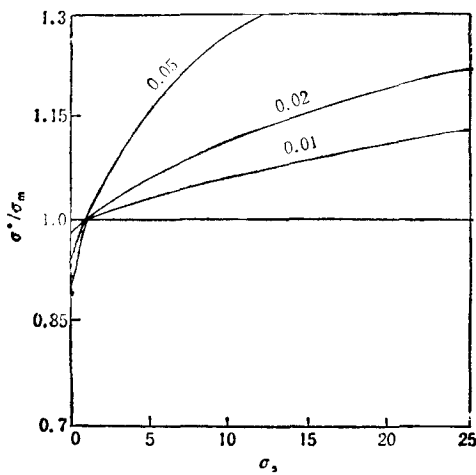


图 1 基质与杂质核心区域的电导率相等,杂质核心区域的半径为 $a = 0.3$,薄层厚度为 $b - a = 0.01, 0.02, 0.05$ 当 $\sigma_s = 1$ 时, $\sigma^*/\sigma_m = 1$; 若 $\sigma_s > \sigma_m$, 则 $\sigma^*/\sigma_m > 1$; 若 $\sigma_s < \sigma_m$, 则 $\sigma^*/\sigma_m < 1$ 。这些定性性质与薄层的厚度无关

就是说,在这种情况下,只要微结构相同,尽管微观的电势分布不同,复合媒质的大尺度的传导性质却是相同的。

五、结 论

若薄层为理想导体,而且相邻杂质小球行将接触时,媒质的有效电导率有奇性,方程(23)的收敛性质变坏。上节的分析已经说明,此种复合媒质等同于杂质为理想导体的普通复合媒质。人们已经对普通复合媒质在奇点附近的传导性质作过详尽的研究。对于简单立方结构的复合媒质, Keller 建立了有效电导率的渐近公式^[14]

$$\frac{\sigma_{sc}^*}{\sigma_m} = -\frac{1}{2} \pi \ln \left(\frac{1}{6} \pi - f_b \right). \quad (36)$$

对于除此以外的所有情况,方程(23)的收敛性质都非常好。而且若 $m \approx 0$, 则 $F_{1,m}$ 等展开系数的值都很小^[15]。把方程(23)取四阶近似,并忽略与方位方向有关的系数,可以导出有效电导率的解析计算公式

$$F_{1,0} = \frac{E_0 b^3}{D}, \quad (37)$$

$$D = \frac{1}{G_1} - b_1 G_3 f_b^{1/3} - c_1 G_7 f_b^6 - a_1 f_b^{11/3} \frac{(1 - c_2 G_5 f_b^{11/3} + c_3 G_5^2 f_b^{22/3})}{(G_3^{-1} + b_2 f_b^{7/3} - c_4 G_5 f_b^6)}. \quad (38)$$

式中出现的常数值已列在表 1 中。由上列公式算出的有效电导率的精度很高,已能满足应用与理论分析的需要。

离子导体内掺入绝缘体小颗粒会发生系统有效电导率随颗粒浓度而上升的反常行为^[5]。系统的最大电导率可以比原来的离子导体大三个数量级。当颗粒浓度达到 0.45 左右时,离子导体的电导率又急剧下降。实验已经证实^[16],产生这一反常行为的原因是在绝缘体颗粒的表面存在着一个电导率很大的层。不妨用已建立的公式来分析这一现象。

用(19)和(37)式所作的计算表明,如取 $\sigma_s > \sigma_m$, 有效电导率就会随浓度而上升。而大浓度区间上电导率的下降则可以有如下两种不同的原因:

1. 颗粒浓度的上升相当于杂质半径的增大。杂质核心部分是绝缘体,外围薄层是良导体,它们的体积一起增大,而它们对系统导电性能的贡献正好相反。若前者的作用大于后者的作用,系统有效电导率就下降。

2. 当颗粒浓度较大时,颗粒会成团聚集,包围基质,使系统的电导率下降。在本模型中,当小球半径大于元胞棱长时,就会出现这种情况。

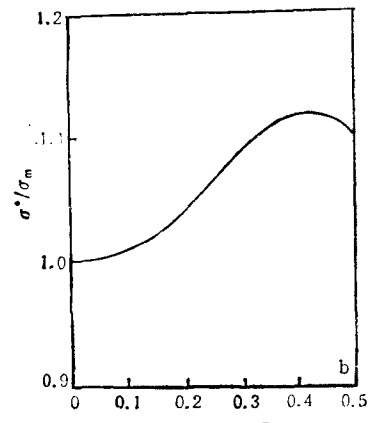


图 2 取 $\sigma_1 = 0$, $\sigma_s = 10000$, $\sigma_m = 1$, 薄层厚度为 $b - a = 3.0 \times 10^{-2}$, 有效电导率先随杂质半径而上升,在 $b = 0.4$ 左右,有效电导率开始下降

由上面的分析可知,由出现电导率极大值的颗粒浓度可以判断其原因。对于简单立方点阵,若系第一种原因,则出现电导率极大值的颗粒浓度应小于 0.524。

图 2 为用(19)和(37)式计算的一个典型例子。系统的电导率先随颗粒浓度而上升,浓度还不到 0.524 (半径为 0.5),系统的电导率就开始下降。值得注意的是, σ^*/σ_m 只达到 1.12 左右。本文研究表明,凡由第一种原因引起电导率下降的, σ^* 的极大值都很小, σ^*/σ_m 决不可能达到 2—3 个数量级。据此可知,离子导体电导率的下降是由于颗粒成团包围基质引起的。

令薄层的厚度趋于零,并取 $\sigma_i = 0$ 的极限,得到

$$G_l = \frac{l}{l+1}, H = -j_s A_{1,0}.$$

有效电导率与含绝缘体杂质的普通复合媒质的相一致。因此可以推断离子导体中的颗粒表面的导电层应有一定的厚度。

- [1] A. Akjouj, B. Sylla, P. Zielinski and L. Dobrzynski, *Phys. Rev.*, **B37**(1988), 5670.
- [2] M. Fixman, *J. Chem. Phys.*, **72**(1980), 5177.
- [3] P. D. Beale and P. M. Duxbury, *Phys. Rev.*, **B37**(1988), 2785.
- [4] Shechao Feng, B. I. Halperin and P. N. Sen, *Phys. Rev.*, **B35**(1987), 197.
- [5] H. E. Roman, A. Bunde and W. Dieterich, *Phys. Rev.*, **B34**(1986), 3439.
- [6] R. C. McPhedran and D. R. McKenzie, *Proc. Roy. Soc.*, **A359**(1978), 45.
- [7] W. M. Suen, S. P. Wong and K. Young, J. Young, *J. Phys. D*, **12**(1979), 1325.
- [8] R. E. Larson and J. J. L. Higdon, *Phys. Fluids*, **A1**(1989), 380.
- [9] S. Nemat-Nasser and M. Taya, *Q. Appl. Math.*, **39**(1981), 43.
- [10] G. Q. Gu and R. Tao, *Phys. Rev.*, **B37**(1988), 8612.
- [11] 顾国庆、陶瑞宝,中国科学(A辑),**(5)**(1989),495.
- [12] G. Q. Gu and R. Tao, *J. Appl. Phys.*, **64**(1988), 2968.
- [13] 顾国庆、陶瑞宝,物理学报,**37**(1988),582.
- [14] J. B. Keller, *J. Appl. Phys.*, **34**(1963), 991.
- [15] G. Q. Gu and Z. R. Liu, *J. Phys., D*, to be published in *Comm. in Theor. Phys.*
- [16] J. B. Phipps and D. H. Whitmore, *Solid State Ionics*, **9/10** (1983), 123.

EFFECTIVE CONDUCTIVITY OF THE COMPOSITE MEDIUM WITH LAYERED INCLUSIONS

Gu Guo-qing

Department of Systems Engineering, Shanghai Institute of Mechanical Engineering, Shanghai, 200093

Yu K. W.

Department of Applied Physics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong

(Received 6 August 1990)

ABSTRACT

Using Rayleigh model, we study dc conductivity of the composite medium with layered inclusions. A generalized identity suitable to this kind of composite medium is proved and a definition of effective conductivity of the systems is given. For the systems with cubic symmetry, an analytic formula for effective conductivity is derived.

PACC: 4110D; 6630D