

压缩态光场在双光子吸收介质中的演化*

何林生 江海河 柳尚青 夏宇兴

中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥, 230031

1990年7月2日收到

采用生成函数方法,由光场密度算符主方程,求得光场压缩度 r , 二阶相干度 $g^{(2)}$ 和光子统计分布的严格解析表达式,同时讨论它们随标度时间 τ 的演化. 计算表明,在双光子吸收过程中,虽然压缩度 r 逐渐减弱,但相当长的时间内光场仍呈现压缩特性;该过程有利于呈现和增强光子反聚束效应和光子亚泊松分布特性;光子分布的振荡特征维持较短一段时间后很快消失.

PACC: 425G; 3280K; 4220

一、引 言

实验上实现压缩态光场之后^[1-4],人们开始把兴趣转向压缩态光场的实际应用. 压缩态光场的主要应用方向之一是光通讯^[5,6],这必然涉及到光场在介质中的演化(或传播)问题. 因此,会提出这样一个问题:压缩态光场在介质中演化能维持它的压缩特性吗?或者说它的压缩特性能维持多久(多长距离)? 本文将对这个问题作明确的回答.

由于压缩态光场的产生过程本质上是一个双光子过程,期望压缩态光场在双光子吸收介质中传播会有利于压缩特性的维持,或者说压缩特性会被维持得较长久(或较长距离). 这样将有利于在光通讯中的应用. 结果表明,虽然在传播中光场压缩程度在逐渐减弱,但它却可以维持很久,传播相当的距离.

同时还研究光子统计特性的演化. 结果表明,光场在传播中将增强光子反聚束效应和光子亚泊松统计分布;光子统计分布的振荡特性在传播一定距离后很快消失.

二、光场主方程与生成函数方程

设单模压缩态光场在二能级原子组成的双光子共振未饱和吸收介质中传播,其哈密顿量为

$$H = H_0 + H_1, \quad (1)$$

$$H_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \hbar Q R_3, \quad (2)$$

$$H_1 = \hbar\lambda R_+ a^2 + \text{H. c.}, \quad (3)$$

* 国家自然科学基金资助的课题.

式中

$$R_3 = \frac{1}{2} \sum_i (c_{2i}^\dagger c_{2i} - c_{1i}^\dagger c_{1i}), \quad (4)$$

$$R_+ = \sum_i c_{2i}^\dagger c_{1i} u^2(r_i), \quad (5)$$

$$\lambda = \varepsilon^{(2)} \frac{1}{2} \hbar \omega, \quad (6)$$

式中 ω 为光频, Ω 为原子跃迁频率, a^\dagger 为光子产生算符, $c_{\alpha i}^\dagger$ 为第 i 个原子 α 能级的产生算符, $\varepsilon^{(2)}$ 为双光子跃迁矩阵元, $u(r_i)$ 为光场模函数.

设 $t = 0$ 时刻, 光场未和介质相互作用, 系统总的密度算符为 $\rho_T(0) = \rho^A(0) \otimes \rho(0)$. 这里 $\rho^A(0)$ 为原子密度算符, $\rho(0)$ 为光子密度算符. 则 t 时刻光子密度算符为

$$\rho(t) = \text{Tr}_A(\rho_T(t)), \quad (7)$$

Tr_A 代表对原子体系求迹. 将(7)式代入海森堡运动方程, 在玻恩近似和马尔可夫近似条件下, 可得到光子密度算符 $\rho(t)$ 的主方程^[7,8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = & k \{ \rho_2^A(0) ([a^{+2} \rho, a^2] + [a^{+2}, \rho a^2]) \\ & + \rho_1^A(0) ([a^2 \rho, a^{+2}] + [a^2, \rho a^{+2}]) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$k = 2\pi g(\Omega) |\varepsilon^{(2)}|^2 \left(\frac{\hbar}{2} \omega \right)^2 \int_V d^3r N(r) \prod_{i=1}^2 |u(r_i)|^2, \quad (9)$$

$g(\Omega)$ 为原子的线型函数, $N(r)$ 为介质中原子数密度.

设介质中原子初始均在基态, $\rho_1^A(0) = 1$, 令 $\tau = 2kt$ 和 $\rho_{n,n+\mu} = \langle n | \rho | n + \mu \rangle$, 则光子密度矩阵元方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{n,n+\mu}}{\partial \tau} = & 2[(n+1)(n+2)(n+\mu+1)(n+\mu+2)]^{\frac{1}{2}} \rho_{n+2,n+\mu+2} \\ & - [(n+1)(n+2) + (n+\mu+1)(n+\mu+2)] \rho_{n,n+\mu}. \end{aligned} \quad (10)$$

为了求解方程(10), 并计算所要求的物理量, 引入生成函数 $G(x, \mu, \tau)$ 和 $F(x, \tau)$,

$$G(x, \mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[\frac{(n+\mu)!}{n!} \right]^{1/2} \rho_{n,n+\mu}, \quad (11)$$

$$F(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \rho_{n,n}. \quad (12)$$

由(10)–(12)式不难得到 G 和 F 分别满足的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = (1-x^2) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \mu x \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2} \mu(\mu-1)G, \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = (1-x^2) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (14)$$

三、生成函数 G 和 F 的解析解

用分离变量法解方程(13)和(14). 令

$$G(x, \mu, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\sigma} g_k^{\sigma}(x) e^{-\lambda_k \tau}, \quad (15)$$

$$F(x, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\sigma'} f_m^{\sigma'} e^{-\lambda_m \tau}. \quad (16)$$

将(15)和(16)式分别代入(13)和(14)式,则得二阶常微分方程

$$(1-x^2) \frac{d^2 g_k^{\sigma}(x)}{dx^2} - \mu x \frac{dg_k^{\sigma}(x)}{dx} + \left[\lambda_k - \frac{1}{2} \mu(\mu-1) \right] g_k^{\sigma}(x) = 0, \quad (17)$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 f_m^{\sigma'}(x)}{dx^2} - 2x \frac{df_m^{\sigma'}(x)}{dx} + \lambda_m f_m = 0. \quad (18)$$

当

$$\lambda_k = k(k + \mu - 1) + \frac{1}{2} \mu(\mu - 1), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\mu - 1) \quad (19)$$

和

$$\lambda_m = m(m + 1), \quad \sigma' = \frac{1}{2}, \quad (20)$$

对不同的 μ 值,方程(17)和(18)分别有不同的多项式解析解^[9].

依据光场的初始条件和不同 μ 值对应的各多项式的正交性质^[9], 确定生成函数 G 和 F 的展开系数 a_k^{σ} 和 $b_m^{\sigma'}$. 然后将 a_k^{σ} 和 $b_m^{\sigma'}$ 代入(15)和(16)式,即求得 G 和 F . 结果归结如下:

1. 当 $\mu = 0$ 时,生成函数 $G(x, 0, \tau)$ 为

$$G(x, 0, \tau) = \sum_k a_k^{-\frac{1}{2}} C_k^{-\frac{1}{2}} e^{-k(k-1)\tau}, \quad (21)$$

式中 $C_k^{-\frac{1}{2}}$ 为盖根保尔多项式,

$$a_k^{-\frac{1}{2}} = \frac{k(k-1)(2k-1)}{2} \sum_n \rho_{nn}(0) \sum_l \frac{[1 + (-1)^{k+n}](2l+n)!}{(2l+k+n+1)!!(2l+n-k+2)!!} \quad (k \neq 0, 1), \quad (22)$$

$$a_0^{-\frac{1}{2}} = a_2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sum_n \rho_{nn}(0) \frac{[1 + (-1)^n]}{n+1}, \quad (23)$$

$$a_1^{-\frac{1}{2}} = a_3^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \sum_n \rho_{nn}(0) \frac{[1 + (-1)^n]}{n+2}. \quad (24)$$

2. 当 $\mu = 1$ 时,生成函数 $G(x, 1, \tau)$ 为

$$G(x, 1, \tau) = \sum_k a_k^0 T_k(x) e^{-k^2 \tau}, \quad (25)$$

式中 $T_k(x)$ 为切比谢夫多项式,

$$a_k^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n, n+1}(0) \frac{n! \sqrt{n+1} [1 + (-1)^{n-k}]}{(n+k)!!(n-k)!!2}. \quad (26)$$

3. 当 $\mu = 2$ 时,生成函数 $G(x, 2, \tau)$ 为

$$G(x, 2, \tau) = \sum_k a_k P_k(x) e^{-[k(k+1)+1]\tau}, \quad (27)$$

式中 $P_k(x)$ 为勒让德多项式,

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n+2}(0) \frac{n! \sqrt{(n+1)(n+2)}}{(n+k+1)!!(n-k)!!} [1 + (-1)^{n-k}] \quad (28)$$

4. 生成函数 $F(x, \tau)$ 为

$$F(x, \tau) = \sum_m b_m P_m(x) e^{-m(m+1)\tau}, \quad (29)$$

式中 $P_m(x)$ 为勒让德多项式,

$$b_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) [1 + (-1)^{m+n-1}] \frac{n!}{(m+n)!!(n-m-1)!!}. \quad (30)$$

以上求得的各表示式适用任何初始光场. 对于不同的光场的初始密度矩阵元, 可以得到相应的展开系数 a_k 和 b_m , 因此得到相应的生成函数 G 和 F .

四、光场平均光子数随时间的演化

本文目的是研究压缩态光场在双光子介质中如何演化传播的问题. 因此, 设初始光场为压缩态光场^[10],

$$|\alpha, z\rangle = s(z) |\alpha\rangle, \quad (31)$$

$S(z)$ 为压缩算符, $|\alpha\rangle$ 为相干态, $z = r e^{i\phi}$. 其光子密度矩阵元为^[10-13].

$$\rho_{n,n+\mu}(0) = \frac{\exp\left(-\eta + \frac{i}{2} \mu\phi\right)}{\cosh r} \left(\frac{\tanh r}{2}\right)^{n+\frac{\mu}{2}} \frac{H_n(y) H_{n+\mu}(y^*)}{\sqrt{n!(n+\mu)!}}, \quad (32)$$

式中

$$y = \frac{\alpha e^{-\frac{i}{2}\phi}}{(\sinh 2r)^{1/2}}, \quad \eta = |\alpha|^2 [1 - \tanh r \cdot \cos(2\theta - \phi)],$$

α 为光场相干振幅, θ 为其幅角, r 为光场压缩因数, φ 为压缩角, $H_n(y)$ 为厄密多项式.

先研究光场平均光子数在双光子吸收介质中如何随时间演化.

借助于生成函数 F 定义(12)式, 平均光子数 $\langle N \rangle$ 为

$$\langle N \rangle = F(1, \tau) = \sum_m b_m e^{-m(m+1)\tau}. \quad (33)$$

取初始光场参数为 $r = 0.5$, $|\alpha| = 5$, $\theta = \varphi = 0$, 进行数值计算. 结果如图 1 所示, 平均光子数 $\langle N \rangle$ 在很短的时间内指数地急剧衰减, 最后趋向于定值 $N(\infty) = b_0 = 0.5$.

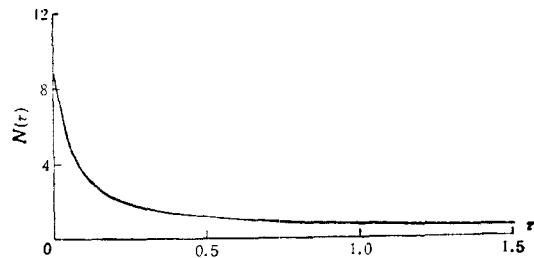


图 1 平均光子数 $\langle N \rangle$ 随无量纲时间 τ 的变化
光场参数为 $r = 0.5$, $|\alpha| = 5$, $\theta = \varphi = 0$

五、光场统计特性随时间的演化

光场统计特性最具有代表性的量是光场的二阶相干度 $g^{(2)}$ 。在单模光场情况下, $g^{(2)} < 1$ 代表光场呈现光子反聚束效应和光子亚泊松统计分布。

为此先求光子数二阶乘矩 $\langle N^{[2]} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle N^{[2]} \rangle &= \langle N(N-1) \rangle = \frac{\partial}{\partial x} F(x, \tau) \Big|_{x=1} \\ &= \sum_m \frac{m(m+1)}{2} b_m^{\frac{1}{2}} e^{-m(m+1)\tau}. \end{aligned} \quad (34)$$

由(33)和(34)式立即可得到二阶相干度 $g^{(2)}$

$$g^{(2)} = \frac{\langle N^{[2]} \rangle}{\langle N \rangle^2}. \quad (35)$$

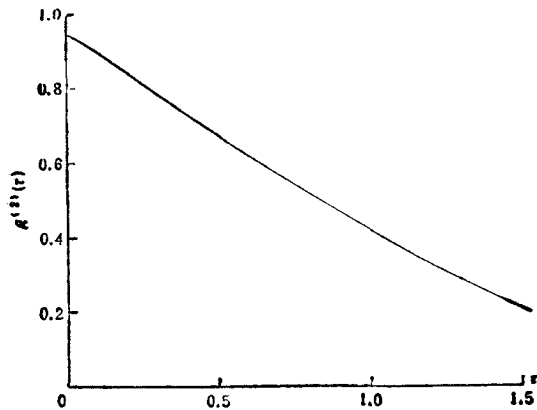


图2 二阶相干度 $g^{(2)}(\tau)$ 随 τ 之变化 光场参量同图1; $g^{(2)} < 1$ 表示光子反聚束和光子亚泊松分布

仍选用上节光场参数进行数值计算, 结果如图2所示。随着 τ 的变化, $g^{(2)}$ 从初始值 0.975 开始, 先缓慢地衰减较短一段时间, 然后成小指数地衰减。由(34)和(35)式可知, 最后二阶相干度 $g^{(2)}(\infty) \rightarrow 0$ 。这表明双光子吸收过程有利于光子反聚束效应的产生和加强, 有利于获得光子亚泊松统计分布。

六、光场压缩特性随时间的演化

对压缩态光场用于光通讯的问题之一是它在传播或演化中能否保持压缩特性, 或压缩特性能维持多久? 传输多远?

光场的两个正交相分量分别为

$$a_1 = \frac{1}{2} (a + a^*), \quad (36)$$

$$a_2 = \frac{i}{2} (a^+ - a), \quad (37)$$

其相应的正序方差为

$$\langle :(\Delta a_1)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\text{Re}\langle a^2 \rangle + \langle N \rangle - 2(\text{Re}\langle a \rangle)^2], \quad (38)$$

$$\langle :(\Delta a_2)^2: \rangle = \frac{1}{2} [\langle N \rangle - \text{Re}\langle a^2 \rangle - 2(\text{Im}\langle a \rangle)^2]. \quad (39)$$

着重观察同相分量 a_1 , 并定义压缩度为

$$s = 4\langle :(\Delta a_1)^2: \rangle. \quad (40)$$

显然, $s < 0$ 表示光场被压缩, $s = -1$ 表示压缩程度为 100%.

由定义(11)式容易求得光场振幅平均值 $\langle a \rangle$ 和振幅二阶矩 $\langle a^2 \rangle$,

$$\langle a \rangle = G^*(1, 1, \tau) = \sum_k a_k^{2*} e^{-k^2 \tau}, \quad (41)$$

$$\langle a^2 \rangle = G^*(1, 2, \tau) = \sum_k a_k^{\frac{1}{2}*} e^{-[k(k+1)+1]\tau}. \quad (42)$$

仍对上节所选的光场情况进行数值计算, 结果如图 3 所示. 光场压缩度从初值 $s = -0.632$ 开始, 在传播中近似按指数上升, 压缩度减弱, 在 $\tau \approx 1.13$ 时, s 变为零, 光场完全失去压缩特性. 然后 s 缓慢上升, 最后趋向于定值 $s(\infty) = 2[b_0^{\frac{1}{2}} - (\text{Re}a_0^2)] \approx 0.5$. 这表明在 $\tau \approx 1.13$ 的范围内光场可以保持具有压缩特性, 但不能保持原有的压缩度. 由(9)式可见, 光场能维持压缩特性的

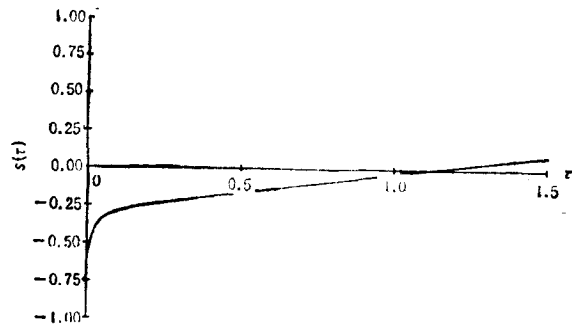


图 3 压缩度 s 随 τ 的变化 光场参数同图 1;
 $s < 0$ 表示光场呈现压缩特性

时间 $t = 0.565/k$ 或在介质中传播的距离 $d = ct$ (c 为介质中的光速) 依赖于介质耦合系数 k , 亦即依赖于介质粒子数密度 $N(r)$, 原子线型函数 $g(Q)$, 光场频率 ω 和双光子跃迁矩阵元 $\epsilon^{(2)}$. 因此当选用密度较低, 跃迁矩阵元 $\epsilon^{(2)}$ 较小的双光子吸收介质, 压缩态可以在其中传播得更远而仍保持其压缩特性.

七、光子统计分布随时间的演化

虽然从第五节已知光场在演化中将保持为光子亚泊松统计分布, 但现在要问: 压缩态光场光子统计分布的振荡特征¹⁾在演化中仍能保持吗?

借助于生成函数定义(11)和(12)式, 可得光子分布函数为

$$\begin{aligned} P_0(\tau) &= \rho_{00}(\tau) = G(0, 0, \tau) \\ &= \sum_k a_{2k}^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^k \Gamma(k - \frac{1}{2})}{k! \Gamma(-\frac{1}{2})} e^{-2k(2k-1)\tau}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} P_n(\tau) &= \rho_{nn}(\tau) = \frac{\partial^{n-1}}{n! \partial x^{n-1}} F(x, \tau) |_{x=0} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} b_m^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{m-n+1}{2}} \frac{(m+n-2)!!}{(m-n+1)!!} l^{-m(m+1)\tau} \\ &\quad (n \geq 1, m-n+1 = \text{偶数}). \end{aligned} \quad (44)$$

1) 何林生、柳尚青, 量子电子学, 6(1989), 299.

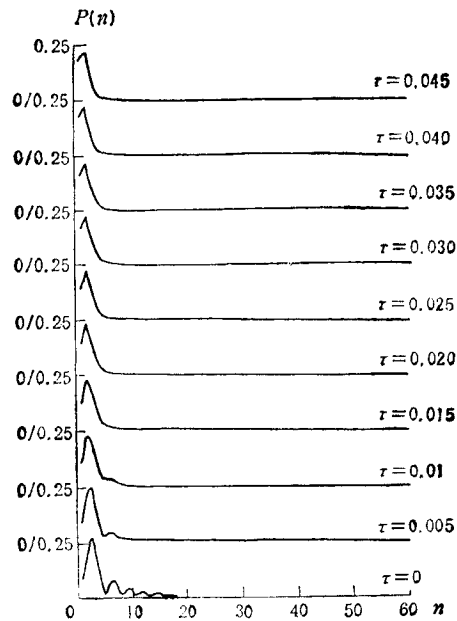


图4 光子统计分布随时间的变化 光场参数同图1

按照(44)式计算的光子统计分布曲线如图4所示 ($P_0(\tau)$ 的值未包括在图4中)。在初始时刻,光子统计分布具有明显的振荡特征;在 $\tau \approx 0.005$ 之后,光子统计分布即无明显的振荡特征,而逐渐变为光滑曲线,分布的主峰也逐渐向低 n 端移动。这表明光子分布的振荡特性比光场的压缩特性更不容易保持。最后,当 $\tau \rightarrow \infty$ 时,光子分布变为仅 $P_1(\infty)$ 和 $P_0(\infty)$ 有值, $P_1(\infty) = b_0^{\frac{1}{2}} \gtrsim 0.5$, $P_0(\infty) = a_0^{\frac{1}{2}} \lesssim 0.5$ (或 $P_0(\infty) = 1 - P_1(\infty)$), 而其它的 $P_n(\infty) = 0$ ($n \neq 0, 1$)。这表明双光子吸收过程有利于产生光子数态 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 的迭加态。

- [1] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurk, J. C. Mertz and J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2049.
- [2] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. Devoe and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 691.
- [3] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall and H. Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 2520.
- [4] M. W. Maeda, P. Kumar and J. H. Shapiro, *Opt. Lett.*, **12**(1987), 161.
- [5] H. P. Yuen and J. H. Shapiro, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT24**(1978), 657.
- [6] D. F. Walls, *Nature*, **306**(1983), 141.
- [7] K. J. McNeil and D. F. Walls, *J. Phys. A*, **7**(1974), 617.
- [8] 何林生, *光学学报*, **5**(1985), 735.
- [9] 王竹溪, *特殊函数概论*, 科学出版社, 北京, (1979).
- [10] H. P. Yuen, *Phys. Rev.*, **A13**(1976), 2226.
- [11] Linseng He, *J. Opt. Soc. Am.*, **B6**(1989), 1915.
- [12] 何林生, 柳尚青, *中国激光*, 待发表.

EVOLUTION OF SQUEEZED STATE FIELD IN A TWO-PHOTON ABSORPTION MEDIUM

He Lin-sheng Jiang Hai-he Liu Shang-qing Xia Yu-xing

Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei, 230031

(Received 2 July 1990)

ABSTRACT

The exact analytic expressions for the photon statistics distribution, the squeezing degree S and the second order degree of coherence $g^{(2)}$ of light field are obtained by using the master equation for the density operator of light field and applying the generation-function method. The evolution of these quantities with the scale-time τ are discussed. It is shown that the squeezing degree S , which is gradually reduced in two-photon absorption process, may still exhibit the squeezing feature. Moreover, the process is favorable to the existence and the enhancement of photon antibunching effect and photon sub-poissonian statistics feature, but the oscillatory characteristics of photon statistics distribution disappear rapidly after having been preserved in a short time.

PACC: 4250; 3280K; 4220