

# 强激光等离子体中光子的运动\*

郭奇志 沈文达

(上海科学技术大学物理系, 上海 201800)

朱 蔚 通

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

(1994年1月18日收到)

通过严格求解广义协变的光子运动的测地线方程, 讨论了准静态时一维等温膨胀的自洽激光等离子体中光子的运动。用数值方法得到了光子速度的空间分布曲线。

PACC: 4220; 5240; 0490

## 1 引 言

等离子体是一个高度非线性的光学介质。光在等离子体中传播时, 会出现许多非线性光学现象, 但在现有的等离子体的理论框架下, 这些现象的定量解释是十分困难的。为了寻求有效的解决光和物质的非线性相互作用问题的方法, 我们引入了光学度规模型, 并借助这个模型研究了一些问题<sup>[1-5]</sup>。结果表明, 光学度规的引入能够很好地解释强场物理中的许多现象。在文献[6, 7]中, 我们已经得到了准静态的自洽激光等离子体密度的空间分布, 以及借助光学度规描述了自洽激光等离子体气氛。本文将通过严格求解广义协变的光子运动方程, 讨论强激光等离子体中光子的行为, 并用数值方法得到光子速度的空间分布。这些结果可以用来解释光通过等离子体时产生的许多非线性光学现象, 对于激光与等离子体非线性相互作用的研究将提供一条十分有效的途径。

## 2 基本方程

光子在强激光等离子体中运动的测地线方程为<sup>[8]</sup>

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu k^\nu k^\rho = 0, \quad (1)$$

其中  $k^\mu = dx^\mu/d\lambda$  为四维波矢量,  $\lambda$  为某一参数,  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  为强激光等离子体系统的仿射联络, 由下式给出<sup>[9]</sup>:

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\rho\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\sigma}) \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金资助的课题。

其中  $g_{\mu\nu}$  为强激光等离子体系统的光学度规, 它满足  $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}$ ,  $g_{\mu\nu,\rho}$  为  $g_{\mu\nu}$  的普通微商. 对于准静态的一维等温膨胀的激光等离子体, 我们已经得到光学度规  $g_{\mu\nu}$  的非零分量为<sup>[7]</sup>

$$g_{00} = -1/(1-N), \quad (3)$$

$$g_{01} = c, N/c(1-N), \quad (4)$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad (5)$$

其中  $N$  为归一化的等离子体密度,  $N_s$  为声速点的归一化等离子体密度,  $c$  和  $c_s$  分别为光速和声速.

由(2)式可以求得

$$\Gamma_{\mu\nu}^2 = 0, \quad (6)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^3 = 0, \quad (7)$$

因而(1)式的分量方程可以写成

$$\frac{dk^0}{d\lambda} + \Gamma_{00}^0 k^0 k^0 + 2\Gamma_{01}^0 k^0 k^1 + \Gamma_{11}^0 k^1 k^1 = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dk^1}{d\lambda} + \Gamma_{00}^1 k^0 k^0 + 2\Gamma_{01}^1 k^0 k^1 + \Gamma_{11}^1 k^1 k^1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dk^2}{d\lambda} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{dk^3}{d\lambda} = 0. \quad (11)$$

### 3 方程的解

由方程(10),(11)及初始条件  $k^2|_{\lambda=0} = 0$  和  $k^3|_{\lambda=0} = 0$  得到

$$k^2 = 0, \quad (12)$$

$$k^3 = 0. \quad (13)$$

对于光子, 间隔  $dr = 0$ , 即

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (14)$$

由于  $g_{\mu\nu}$  的非零分量仅为  $g_{00}, g_{01}, g_{11}, g_{22}$  和  $g_{33}$ , 于是(14)式可以写成

$$g_{00} dx^0 dx^0 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + g_{11} dx^1 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2 + g_{33} dx^3 dx^3 = 0. \quad (15)$$

由(12)和(13)式可以得到

$$dx^2 = 0, \quad (16)$$

$$dx^3 = 0. \quad (17)$$

将(16)和(17)式代入(15)式,(15)式简化为

$$g_{00} dx^0 dx^0 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + g_{11} dx^1 dx^1 = 0. \quad (18)$$

上式两边除以  $(dx^0)^2$ , 得到

$$g_{11} \left( \frac{dx^1}{dx^0} \right)^2 + 2g_{01} \frac{dx^1}{dx^0} + g_{00} = 0. \quad (19)$$

方程(19)的解为

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \frac{-\bar{g}_{01} \pm (\bar{g}_{01}^2 - \bar{g}_{00}\bar{g}_{11})^{\frac{1}{2}}}{\bar{g}_{11}}. \quad (20)$$

由(16)和(17)式分别得到

$$\frac{dx^2}{dx^0} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{dx^3}{dx^0} = 0, \quad (22)$$

其中  $x^0 = ct$ , 即光子速度的三个分量分别为

$$v_x = \frac{c[-\bar{g}_{01} \pm (\bar{g}_{01}^2 - \bar{g}_{00}\bar{g}_{11})^{\frac{1}{2}}]}{\bar{g}_{11}}, \quad (23)$$

$$v_y = 0, \quad (24)$$

$$v_z = 0. \quad (25)$$

由(23),(24)和(25)式可以看出,光子速度的  $y$  和  $z$  分量均为零,即光子只沿  $x$  方向运动,其速度

$$v = v_x. \quad (26)$$

由(3),(4),(5),(23)和(26)式得到

$$v = \frac{-c_i N_i \pm [(c_i N_i)^2 + c^2(1-N)]^{1/2}}{(1-N)}, \quad (27)$$

其中的两个表达式是否均为光子速度,应由边界条件来确定.光子在激光等离子体中运动应满足临界密度点处光子速度为有限的边界条件.当(27)式取

$$v = \frac{-c_i N_i - [(c_i N_i)^2 + c^2(1-N)]^{1/2}}{(1-N)} \quad (28)$$

时,容易算出,  $N \rightarrow 1$  时  $v \rightarrow -\infty$ , 显然(28)式不满足边界条件,应舍弃;而另一解

$$v = \frac{-c_i N_i + [(c_i N_i)^2 + c^2(1-N)]^{1/2}}{(1-N)}, \quad (29)$$

当  $N \rightarrow 1$  时  $v \rightarrow c^2/2c_i N_i$  为有限,因而光子速度由(29)式给出,从式中可以看出,光子速度只是等离子体密度  $N$  的函数,亦即光子速度只是空间坐标的函数,不随时间变化.

由此可知,(20)式中取“-”号的解亦应舍弃,即

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \frac{-\bar{g}_{01} + (\bar{g}_{01}^2 - \bar{g}_{00}\bar{g}_{11})^{\frac{1}{2}}}{\bar{g}_{11}} \quad (30)$$

也是唯一解.

下面求四维波矢量的各分量.

$$\frac{dk^0}{d\lambda} = \frac{dk^0}{dx^0} \frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{dk^0}{dx^0} k^0, \quad (31)$$

$$k^1 = \frac{dx^1}{d\lambda} = \frac{dx^1}{dx^0} \frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{dx^1}{dx^0} k^0. \quad (32)$$

将(31)和(32)式代入(8)式,得到

$$\frac{dk^0}{dx^0} k^0 + \Gamma_{00}^0 k^0 k^0 + 2\Gamma_{01}^0 k^0 k^0 \frac{dx^1}{dx^0} + \Gamma_{11}^0 k^0 k^0 \left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 = 0. \quad (33)$$

上式两边除以  $(k^0)^2$ , 得到

$$\frac{1}{k^0} \frac{dk^0}{dx^0} + \Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dx^1}{dx^0} + \Gamma_{11}^0 \left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 = 0. \quad (34)$$

从上式解出四维波矢量的第一分量

$$k^0 = \exp \left\{ - \left[ \Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dx^1}{dx^0} + \Gamma_{11}^0 \left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 \right] x^0 \right\}. \quad (35)$$

将(35)式代入(32)式, 得到四维波矢量的第二分量

$$k^1 = \frac{dx^1}{dx^0} \exp \left\{ - \left[ \Gamma_{00}^0 + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dx^1}{dx^0} + \Gamma_{11}^0 \left(\frac{dx^1}{dx^0}\right)^2 \right] x^0 \right\}, \quad (36)$$

其中  $dx^1/dx^0$  由(30)式给出, 四维波矢量的其余二分量分别由(12)和(13)式给出.

#### 4 速度的空间分布

前面已经得到了准静态条件下沿  $x$  方向等温膨胀的自洽激光等离子体中光子运动的三维速度的数学表达式(29式), 这里将对这一结果作图示.

在人射光密度  $A_{01} = 0.62$ , 反射系数  $\beta = 1$  时, 沿  $x$  方向等温膨胀的准静态自洽激光等离子体密度的空间分布(图1)已由文献[6]给出, 这里仍然取  $A_{01} = 0.62$ ,  $\beta = 1$ , 并

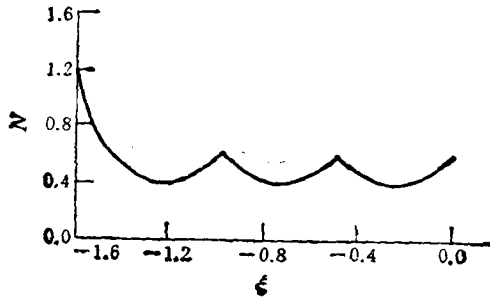


图1 准静态时沿  $x$  方向等温膨胀的自洽激光等离子体密度的空间分布曲线

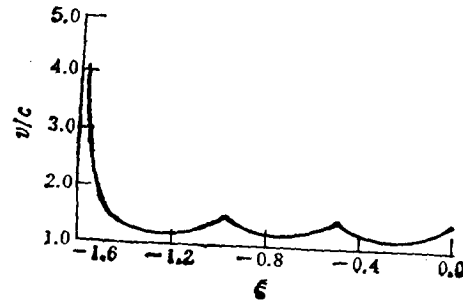


图2 准静态时一维等温膨胀的自洽激光等离子体中光子速度的空间分布曲线

算得声速点的等离子体密度  $N_s = 0.563^{[6]}$ , 当取  $c_s/c = 0.0001$  时, 得到光子速度的空间分布曲线(图2), 其横坐标  $\xi = kx$  为无量纲变量, 代表空间的变化, 其中  $k$  为波数, 纵坐标  $v/c$  也是无量纲量, 代表强激光等离子体中的光子速度相对于光速  $c$  的大小. 从图2中可以看到光子在激光等离子体中的速度大于光速  $c$ , 既然等离子体的折射率  $n = (\epsilon\mu)^{1/2} = (1 - N)^{1/2} < 1$ , 这一结果是容易理解的. 从图2中还可以看出光子速度在密度  $N < 1$  的激光等离子体内表现出随驻波场的振荡行为, 而在等离子体的临界密度  $N = 1$  处光子速度迅速增大, 光子速度的空间分布走向与等离子体密度的空间分布走向基本一致.

#### 5 结 论

通过严格求解广义协变的光子运动的测地线方程, 得到了一维等温膨胀的准静态自

沿激光等离子体中光子运动的三维速度及四维波矢量, 并利用计算机模拟绘出了光子速度的空间分布曲线。结果表明, 光子只沿光线入射的方向运动, 其速度大于光速  $c$ , 在低于临界密度的等离子体内光子速度表现出随驻波场的振荡行为, 而在等离子体的临界密度点光子速度迅速增大, 光子速度的空间分布走向与等离子体密度的空间分布走向一致。

- [1] Shitong Zhu and Wenda Shen, *J. Opt. Soc. Am.*, B4 (1987), 739.
- [2] 朱荫通、沈文达、邓锡铭、王之江, *物理学报*, 38(1989), 559.
- [3] 朱荫通, *物理学报*, 38(1989), 1167.
- [4] Zhu Shitong and Shen Wenda, A Satellite Meeting of IQEC (Shanghai, 1988).
- [5] Zhu Shitong, *Inter. Laser. Con.* (Beijing, 1992).
- [6] Wenda Shen and Shitong Zhu, *Phys. Rev.*, A37 (1988), 4387.
- [7] 朱荫通、沈文达, *物理学报*, 42(1993), 1438.
- [8] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

## MOTION OF PHOTONS IN A STRONG-LASER PLASMA

GUO QI-ZHI SHEN WEN-DA

(Department of Physics Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

ZHU SHI-TONG

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai 201800)

(Received 19 January 1994)

### ABSTRACT

The motion of photons in a one-dimensional isothermal expanding self-consistent laser plasma is discussed by solving the general covariant geodesic equation for the motion of photons. The curve of the spatial distribution of the photon velocity is obtained with numerical method.

**PACC:** 4220; 5240; 0490