第45卷 第5期 1996年5月
1000-3290/96/45(05)/0738-09
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.45, No.5, May, 1996
©1996 Chin. Phys. Soc.

哈密顿算符是 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 算子含时线性组合量子系统的时间演变及厄密不变量

赖云忠
(太原重型机械学院基础部，太原 030024)
梁九卿
(山西大学物理系，太原 030006)
(1995年1月17日收到)

研究了哈密顿算符是 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 算子线性组合且系数显含时间量子系统的时间演化. 我们发现适当选取厄密不变量，不仅可得到统一的量子态时间演化封闭解，而且可得到时间演化幺正算符. 用时间演化算符我们讨论了含时双光子压缩态和 $SU(1,1)$ 相干态以及 $SU(2)$ 压缩态的压缩性质.

PACC: 0413

1 引 言

哈密顿量显含时间的动力学系统时间演变，因其广泛的应用，成为近年来有兴趣的研究课题之一. Lewis 和 Riesenfeld(LR)用厄密不变量最早开始系统地研究含时体系的动力学和量子化[1,2]. 若哈密顿量的时间依赖通过多重参数实现，在参数空间环绕一闭合回路，量子态的演变则附加一有明显几何意义的相因子. 这是 Berry 的重要发现，现称其为 Berry 相因子[3]. 作为讨论 Berry 位相的两个典型模型，即广义含时谐振子和自旋系统也因而被广泛研究[4—8]. 哈密顿量显含时间的系统在量子光学中也有重要的应用，经典抽运简并参数量子放大器是众所周知的例子.

因哈密顿量显含时间，它既不是一守恒量也非物理观察量[9]，以它的瞬时本征态为基矢往往得不到含时 Schrödinger 方程封闭形式的解. LR 不变量理论的要点是寻找一厄密不变量并以其本征态为基矢来求解含时系统，得到精确的量子态时间演化. 在量子光学和其他一些理论中，我们有时希望知道量子态的时间演变幺正算符或物理量算符的时间演化. 在这种情况下，使用 LR 定义的不变量并不方便，找到适当的不变量成为求解的关键. 本文引入一新的厄密不变量，并发现对于哈密顿算符是 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 代数算子线性组合且系数显含时间的量子系统可用我们引入的厄密不变量统一求解，而且可得到量子态的时间演化算符，它有非常简单的形式. 作为应用的例子，我们讨论了含时谐振子和自旋系统的 Berry 相因子及含时 $SU(1,1)$ 和 $SU(2)$ 相干态的压缩效应.

2 厄密不变量，量子态时间演化和 Berry 相因子

我们讨论的含时系统哈密顿算符有如下的形式：

$$\hat{H}(t) = \omega(t)\hat{K}_0 + G(t)[\hat{K}_+ e^{i\varphi(t)} + \hat{K}_- e^{-i\varphi(t)}], \tag{1}$$

其中 $\omega(t)$, $G(t)$ 和 $\varphi(t)$ 是任意的实时间函数, $\hat{K}_0$ 是厄密算符而 $\hat{K}_+ = (\hat{K}_-)^+$, 它们满足对易关系为

$$[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm, \quad [\hat{K}_+, \hat{K}_-] = D\hat{K}_0. \tag{2}$$

在(2)式中, 当 $D = \pm 2$ 时, $\hat{K}_0$ 和 $\hat{K}_\pm$ 构成 $SU(2)$ 和 $SU(1,1)$ 李代数.

量子态的时间演化遵从 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi(t)\rangle_s = \hat{H}(t) \mid \psi(t)\rangle_s \tag{3}$$

(本文使用自然单位 $\hbar = c = 1$). 假定存在一厄密不变量 $\hat{I}(t)$, 它满足条件:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{I}(t) + [\hat{I}(t), \hat{H}(t)] = 0. \tag{4}$$

本文的关键是用厄密算符 $\hat{K}_0$ 的幺正变换来构造这不变量, 即引入

$$\hat{I}(t) = \hat{R}(t)\hat{K}_0\hat{R}^+(t), \tag{5}$$

$$\hat{R}(t) = \exp[\frac{1}{2}r(t)(\hat{K}_+ e^{-i\beta(t)} - \hat{K}_- e^{i\beta(t)})], \tag{6}$$

其中 r 和 β 为实含时参量, 利用标准的算子公式[10]

$$e^{\eta\hat{A}}\hat{B}e^{-\eta\hat{A}} = \hat{B} + \eta[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}\eta^2[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \cdots \tag{7}$$

以及 $\hat{K}_0$ 和 $\hat{K}_\pm$ 的对易关系(2)式, 容易求得

$$\hat{I}(t) = \hat{K}_0\cos\frac{\lambda}{2}r - \frac{1}{\lambda}(\hat{K}_+ e^{-i\beta} + \hat{K}_- e^{i\beta})\sin\frac{\lambda}{2}r, \tag{8}$$

式中 $\lambda = (2D)^{\frac{1}{2}}$. 将此式代入(4)式, 经简单直接运算后可知, 只要 r 和 β 满足下述辅助方程:

$$\dot{r} = 2G\sin(\varphi + \beta), \tag{9}$$

$$\frac{1}{\lambda}(\dot{\beta} - \omega)\sin\frac{\lambda}{2}r = G\cos\frac{\lambda}{2}\cos(\varphi + \beta), \tag{10}$$

$\hat{I}(t)$ 必满足(4)式. 利用(7)式可得下述关系式:

$$\hat{R}^+(t)\hat{K}_0\hat{R}(t) = \hat{K}_0\cos\frac{\lambda}{2}r + \frac{1}{\lambda}(\hat{K}_+ e^{-i\beta} + \hat{K}_- e^{i\beta})\sin\frac{\lambda}{2}r, \tag{11}$$

$$\hat{R}^+(t)\hat{K}_+\hat{R}(t) = \hat{K}_+\cos^2\frac{\lambda}{4}r - \hat{K}_- e^{2i\beta}\sin^2\frac{\lambda}{4}r - \frac{D}{\lambda}\hat{K}_0 e^{i\beta}\sin\frac{\lambda}{2}r, \tag{12}$$

$$\hat{R}^+(t)\hat{K}_-\hat{R}(t) = \hat{K}_-\cos^2\frac{\lambda}{4}r - \hat{K}_+ e^{-2i\beta}\sin^2\frac{\lambda}{4}r - \frac{D}{\lambda}\hat{K}_0 e^{-i\beta}\sin\frac{\lambda}{2}r, \tag{13}$$

$$\hat{R}^+(t)[i\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}(t)] = -2\hat{K}_0\dot{\beta}\sin^2\frac{\lambda}{4}r + \hat{K}_+ e^{-i\beta}(i\frac{\dot{r}}{2} + \frac{\dot{\beta}}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}r) + \hat{K}_- e^{i\beta}(-i\frac{\dot{r}}{2} + \frac{\dot{\beta}}{\lambda}\sin\frac{\lambda}{2}r). \tag{14}$$

设 $|n\rangle$ 为厄密算符 $\hat{K}_0$ 的本征态,即

$$\hat{K}_0 \mid n\rangle = K_n \mid n\rangle . \tag{15}$$

因 $\hat{K}_0$ 不显含时间, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mid n\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_n = 0$.而厄密不变量算符 $\hat{I}$ 的本征态显然是

$$\hat{I}(t) \mid n,t\rangle = K_n \mid n,t\rangle, \quad \mid n,t\rangle = \hat{R}(t) \mid n\rangle . \tag{16}$$

按照 LR 不变量理论[2],含时 Schrödinger 方程(3)式的通解可用 $\hat{I}(t)$ 的本征态表示为

$$\begin{aligned} \mid \psi(t)\rangle_s &= \sum_n c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n(t)} \mid n,t\rangle \\ &= \sum_n c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n(t)} \hat{R}(t) \mid n\rangle , \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' \langle n,t' \mid \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'} - \hat{H}(t') \mid n,t'\rangle \\ &= \int_0^t \mathrm{d}t' \langle n \mid [\hat{R}^+(t')(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}\hat{R}(t')) - \hat{R}^+(t')\hat{H}(t')\hat{R}(t')] \mid n\rangle . \end{aligned} \tag{18}$$

利用(11)—(14)式可得

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= -\int_0^t \mathrm{d}t' \langle n \mid [\omega(t') + D\Omega(t')]\hat{K}_0 \mid n\rangle \\ &= -\int_0^t \mathrm{d}t' [\omega(t') + D\Omega(t')] K_n . \end{aligned} \tag{19}$$

这里

$$\begin{aligned} \Omega(t) = &(\dot{\beta} - \omega)\frac{4}{\lambda^2}\sin^2\frac{\lambda}{4}r \\ &- \frac{2}{\lambda}G\sin\frac{\lambda}{2}r\cos(\varphi + \beta) . \end{aligned} \tag{20}$$

Berry 位相很容易从通解(17)和(18)式得到.为此我们取绝热近似,即略去辅助方程(9)和(10)式中含时间导数 $\dot{r}$ 和 $\dot{\beta}$ 的项,得到

$$\beta(t) \approx -\varphi(t), \quad \frac{1}{\lambda}\omega(t)\sin\frac{\lambda}{2}r + G(t)\cos\frac{\lambda}{2}r \approx 0 . \tag{21}$$

使用(11)—(14)式不难得到在绝热近似条件下

$$\hat{R}^+(t)\hat{H}(t)\hat{R}(t) \approx (\omega(t) + D\Omega_0)\hat{K}_0 , \tag{22}$$

$$\Omega_0(t) = -\frac{4}{\lambda^2}\omega\sin^2\frac{\lambda}{4}r - \frac{2}{\lambda}G\sin\frac{\lambda}{2}r . \tag{23}$$

因而 $\hat{R}(t) \mid n\rangle$ 成为 $\hat{H}(t)$ 的近似瞬时本征态.相因子(18)式中第二项是动力学因子,第一项则为 Berry 位相,记为 γ_n .使用(14)式和对易关系(2)式得

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= -\int_0^t K_n \frac{4}{\lambda^2}D\sin^2\frac{\lambda}{4}r\,\mathrm{d}\beta \\ &= -\frac{4}{\lambda^2}DK_n\int_0^t [-\sin^2\frac{\lambda}{4}r]\,\mathrm{d}\varphi . \end{aligned} \tag{24}$$

上式第二等式使用了绝热条件(21)式.下面我们以文献[8]中的广义含时谐振子为例,说明由(24)式和用其他方法得到的 Berry 相因子一致.

取 $D = -2$, $\hat{K}_0$ 和 $\hat{K}_\pm$ 组成 $SU(1,1)$ 李代数.若用下面的玻色实现

$$\hat{K}_0 = \frac{1}{2}(a^+ a + \frac{1}{2}), \quad \hat{K}_+ = a^{+2}/2, \quad \hat{K}_- = a^2/2, \tag{25}$$

其中 a^+ 和 a 是通常的玻色子产生和湮没算符,则(1)式变为文献中常见的广义含时谐振子哈密顿算符形式[8].该算符表示的物理系统是有经典抽运的简并参数量子放大器[11].把 $D = -2, \lambda = \pm 2i$ 代入(24)式得

$$\begin{aligned}\gamma_n(c) &= (n + \frac{1}{2})\oint_c \sinh^2 \frac{1}{2} r \mathrm{d}\varphi \\ &= (n + \frac{1}{2})\oint_c \sinh^2 \frac{1}{2} r \frac{G}{Y} \nabla_{\boldsymbol{R}}(\frac{X}{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R}.\end{aligned} \tag{26}$$

此系统的参量空间为 $\boldsymbol{R} = \{X(t), Y(t), \omega(t)\}$,其中 $X(t) = G(t)\sin\varphi(t)$, $Y(t) = G(t)\cos\varphi(t)$,而 c 为此空间的闭合路径.(26)式与文献[8]中的结果一致.

当 $D = 2$ 时,哈密顿算符具有 $SU(2)$ 对称性,它描述在旋转外磁场中的自旋系统,取 $\lambda = \pm 2$,由(24)式求得 Berry 位相

$$\gamma_n(c) = 2m \oint_c \sin^2 \frac{r}{2} \mathrm{d}\varphi = m \oint_c (1 - \cos r) \mathrm{d}\varphi. \tag{27}$$

这与文献[12]结果一致.

3　时间演化算符

因(17)和(19)式可表示为

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle_s &= \hat{R}(t) \sum_n c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)K_n} |n\rangle \\ &= \hat{R}(t) e^{-i\varepsilon(t)\hat{K}_0} \sum_n c_n |n\rangle,\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathrm{d}t' [\omega(t') + D\Omega(t')]. \tag{29}$$

当 $t = 0$ 时,

$$|\psi(0)\rangle_s = \hat{R}(0) \sum_n c_n |n\rangle, \tag{30}$$

因而

$$\sum_n c_n |n\rangle = \hat{R}^+(0) |\psi(0)\rangle_s. \tag{31}$$

(28)式可改写为

$$|\psi(t)\rangle_s = \hat{R}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0} \hat{R}^+(0) |\psi(0)\rangle_s. \tag{32}$$

时间演变算符显然是

$$\hat{U}(t,0) = \hat{R}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0} \hat{R}^+(0), \tag{33}$$

$$\hat{U}^+(t,0) = \hat{U}(0,t) = \hat{R}(0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0} \hat{R}^+(t), \tag{34}$$

$$\hat{U}(t_2, t_1) = \hat{U}(t_2, 0) \hat{U}^+(t_1, 0). \tag{35}$$

在 Heisenberger 描述中,算符由下式给出:

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^{+}(t,0)\hat{A}(0)\hat{U}(t,0). \tag{36}$$

当 $D=\pm 2$ 时，由(33)式可得到具有 $SU(2)$ 对称性和 $SU(1,1)$ 对称性的含时哈密顿系统的时间演化算符，结果与文献[13]中给出的一致.

4 含时双光子压缩态和含时 $SU(1,1)$ 相干态的压缩效应

我们考虑形式如(1)和(25)式所示的含时哈密顿算符描述的系统. 使用(33)式给出的时间演化算符，不难求得玻色子产生和湮没算符的时间演变. 注意到

$$\hat{R}^{-}(t)\hat{a}\hat{R}(t) = \hat{a}\cosh\frac{r}{2} + \hat{a}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\sinh\frac{r}{2}, \tag{37a}$$

$$\hat{R}^{-}(t)\hat{a}^{+}\hat{R}(t) = \hat{a}^{+}\cosh\frac{r}{2} + \hat{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\sinh\frac{r}{2}, \tag{37b}$$

及

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0}\hat{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0} = \hat{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)/2}, \tag{38a}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0}\hat{a}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{K}_0} = \hat{a}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)/2}. \tag{38b}$$

由(36)式得

$$\hat{a}(t) = \hat{a}f_1(t) + \hat{a}^{+}f_2(t), \quad \hat{a}^{+}(t) = \hat{a}^{+}f_1^{*}(t) + \hat{a}f_2^{*}(t), \tag{39a}$$

$$f_1(t) = \cosh\frac{r_0}{2}\cosh\frac{r}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon/2} - \sinh\frac{r_0}{2}\sinh\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta_0-\beta)+\mathrm{i}\varepsilon/2}, \tag{39b}$$

$$f_2(t) = \cosh\frac{r_0}{2}\sinh\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varepsilon/2-\beta)} - \sinh\frac{r_0}{2}\cosh\frac{r}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\beta_0+\varepsilon/2)}, \tag{39c}$$

其中 $r_0 = r(t)\big|_{t=0}$, $\beta_0 = \beta(t)\big|_{t=0}$，而参数 r 和 β 由辅助方程(9)和(10)及 $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$ 确定. $\varepsilon(t)$ 由(29)和(20)式并取 $D=-2$ 和 $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$ 给出.

利用上述结果可讨论系统的压缩效应. 考虑特殊情况:

$$\varphi(t) = -\int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t' + \varphi_0, \tag{40}$$

则(9)和(10)式有如下特解:

$$r(t) = 2\int_0^t G(t')\mathrm{d}t', \quad \beta(t) = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t'. \tag{41}$$

将这一结果代入(20)和(29)式得

$$\Omega(t) = 0, \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t'. \tag{42}$$

于是(39b)和(39c)式成为

$$f_1(t) = \cosh\frac{r}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon/2}, \quad f_2(t) = -\mathrm{i}\sinh\frac{r}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon/2+\mathrm{i}\varphi_0}. \tag{43}$$

定义

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}[\hat{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)/2} + \hat{a}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)/2}], \tag{44a}$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\hat{a}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)/2} - \hat{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)/2}]. \tag{44b}$$

设系统初态为相干态 $|\alpha\rangle$, $\hat{a}(0)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$,则当 $t>0$ 后,系统处于含时相干态[8].利用(39a)和(43)式得 $\hat{X}_1$ 和 $\hat{X}_2$ 的偏差为

$$V(\hat{X}_{1,2}) = <\hat{X}_{1,2}^2> - <\hat{X}_{1,2}>^2$$
$$= \frac{1}{4}[\cosh r \pm \sin\varphi_0 \sinh r]. \tag{45}$$

显然上式与 $\omega(t)$ 无关.当 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 时,(45)式变为

$$V(\hat{X}_1) = \frac{1}{4}e^{r(t)},\ V(\hat{X}_2) = \frac{1}{4}e^{-r(t)}. \tag{46}$$

所以,当 $r(t) = 2\int_0^t G(t')dt' < 0$ 时, $\hat{X}_1$ 被压缩,而当 $r(t)>0$ 时 $\hat{X}_2$ 被压缩.若 G 和 ω 都是常数,(40)式变为 $\varphi = -\omega t + \varphi_0$,则这里所考虑的系统简化为经典抽运简并参数放大器的理论模型[11].在这种情况下,由相干态经时间演变幺正算符可生成双光子压缩态.

现在我们考虑初态为 $SU(1,1)$ 相干态的情形. $SU(1,1)$ 相干态定义为[14]

$$|\eta,k\rangle = \exp[-\frac{\rho}{2}(\hat{K}_+e^{-i\theta} - \hat{K}_-e^{i\theta})]|0,k\rangle$$
$$= (1-|\eta|^2)^k\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{\Gamma(n+2k)}{n!\Gamma(2k)}]^{\frac{1}{2}}\eta^n|n,k\rangle, \tag{47}$$

式中 $\eta = -\mathrm{th}\frac{\rho}{2}e^{-i\theta}$, $\rho\in(-\infty,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\hat{K}_\pm$ 由(25)式定义,Bargman 指标 k = 1/4 或 3/4,而态 $|n,\frac{1}{4}\rangle$ 和 $|n,\frac{3}{4}\rangle$ 分别为含有 $2n$ 个和 $(2n+1)$ 个光子数的数态[11].仍然考虑满足(40)式的特殊情况.利用(43)式可得

$$V_\eta(\hat{X}_{1,2}) = <\hat{X}_{1,2}^2> - <\hat{X}_{1,2}>^2$$
$$= k\cosh\rho[\cosh r \pm \sinh r\sin\varphi_0]$$
$$\pm k\sinh\rho[\cosh^2\frac{r}{2}\cos\theta - \sinh^2\frac{r}{2}\cos(\theta-2\varphi_0)]$$
$$+ k\sinh\rho\sinh r\sin(\varphi_0-\theta), \tag{48}$$

式中 $k=\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ 分别对应偶、奇相干态.当 $\theta=0$ 和 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ 时, $V_\eta(\hat{X}_{1,2}) = ke^{\pm(r+\rho)}$.若 $e^r < \frac{e^{-\rho}}{4k}$, $\hat{X}_1$ 被压缩;若 $e^{-r} < \frac{e^{\rho}}{4k}$, $\hat{X}_2$ 被压缩.当 $\varphi_0=\theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $V_\eta(\hat{X}_{1,2}) = k\cosh\rho e^{\pm r}$.若 $e^{-r} > 4k\cosh\rho$,则 $\hat{X}_1$ 被压缩,若 $e^r > 4k\cosh\rho$,则 $\hat{X}_2$ 被压缩.

由上述讨论可知,适当选取哈密顿算符的参数可产生稳定的压缩态.

5　含时 $SU(2)$ 压缩态

考虑哈密顿算符

$$\hat{H}(t) = \omega(t)\hat{J}_3 + G(t)[\hat{J}_+e^{i\varphi(t)} + \hat{J}_-e^{-i\varphi(t)}], \tag{49}$$

式中 $\hat{J}_3$, $\hat{J}_\pm$ 组成 $SU(2)$ 李代数.这时, $\lambda = \sqrt{2D} = 2$.对于特殊情形

$$\varphi(t) = -\int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t' + \varphi_0, \tag{50}$$

辅助方程(9)和(10)式有特解为

$$r(t) = 2\int_0^t G(t')\mathrm{d}t', \quad \beta(t) = \frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t'. \tag{51}$$

于是 $\Omega(t) = 0$、$\varepsilon(t) = \int_0^t \omega(t')\mathrm{d}t'$. 将这些结果代入(33)式，得到时间演化算符的简化形式

$$\hat{U}(t,0) = \exp\left[\frac{r}{2}(\hat{J}_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} - \hat{J}_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)\hat{J}_3}. \tag{52}$$

注意到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\hat{J}_3}\hat{J}_3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\hat{J}_3} = \hat{J}_3, \tag{53a}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon\hat{J}_3}\hat{J}_\pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\hat{J}_3} = \hat{J}_\pm \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\varepsilon(t)}, \tag{53b}$$

我们得到 $\hat{J}_3$ 和 $\hat{J}_\pm$ 的时间演化：

$$\hat{J}_3(t) = \hat{J}_3\cos r + \frac{\mathrm{i}}{2}\sin r[\hat{J}_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_0} - \hat{J}_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}], \tag{54a}$$

$$\hat{J}_\pm(t) = \mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\varepsilon}[\hat{J}_\pm \cos^2\frac{r}{2} - \hat{J}_\mp \sin^2\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mp2\mathrm{i}\varphi_0} \mp \mathrm{i}\hat{J}_3\sin r e^{\mp\mathrm{i}\varphi_0}]. \tag{54b}$$

设 $|jm\rangle$ 为 $\hat{J}_3$ 和 $\hat{J}^2 = \hat{J}_3^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)$ 的共同本征态，系统的初态为 $|jm\rangle$. 定义

$$\hat{J}_1 = \frac{1}{2}[\hat{J}_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)} + \hat{J}_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)}], \tag{55a}$$

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}[\hat{J}_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(t)} - \hat{J}_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(t)}]. \tag{55b}$$

它们的对易关系和测不准关系为

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = \mathrm{i}\hat{J}_3, \quad \Delta\hat{J}_1\Delta\hat{J}_2 \geqslant \frac{1}{2}|<\hat{J}_3>|. \tag{55c}$$

利用(54a)、和(54b)式得

$$\begin{aligned} V_{jm}(\hat{J}_1) &= <\hat{J}_1^2> - <\hat{J}_1>^2 \\ &= \frac{1}{2}[j(j+1) - m^2][1 - \sin^2\varphi_0\sin^2 r(t)], \end{aligned} \tag{56a}$$

$$\begin{aligned} V_{jm}(\hat{J}_2) &= <\hat{J}_2^2> - <\hat{J}_2>^2 \\ &= \frac{1}{2}[j(j+1) - m^2][1 - \cos^2\varphi_0\sin^2 r(t)], \end{aligned} \tag{56b}$$

$$<\hat{J}_3> = <jm|\hat{J}_3(t)|jm> = m\cos r(t). \tag{56c}$$

根据定义[15]，$V(\hat{J}_{1,2}) < \frac{1}{2}|<\hat{J}_3>|$ 则为压缩态.

当 $m = \pm j$ 和 $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 时，

$$V_{j\pm j}(\hat{J}_1) = \frac{j}{2}\cos^2 r(t) \leqslant \frac{j}{2}|\cos r(t)|, \tag{57}$$

所以,若 $r(t)=(n+\frac{1}{2})\pi$(n 为整数)有最小测不准关系,即 $\Delta\hat{J}_1\Delta\hat{J}_2=0$;当 $r(t)\neq(n+\frac{1}{2})\pi$ 时,$\hat{J}_1$ 被压缩;当 $\varphi_0=0$ 和 $r(t)\neq(n+\frac{1}{2})\pi$ 时,$\hat{J}_2$ 被压缩;当 $m=0$ 时,无压缩现象;而当 $m\neq0$ 时,$\hat{J}_1$ 和 $\hat{J}_2$ 的压缩效应随时间周期变化.

[1] Jr. H. R. Lewis, *Math. Phys.*, **9**(1968), 1976.

[2] Jr. H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld, *J. Math, Phys.*, **10**(1969), 1458

[3] M. V. Berry. *Proc. Roy. Soc, Lond.*, **A392**(1984), 45.

[4] Donald H. Kobe, *et al.*, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 3744.

[5] Donald H. Kobe, *et al.*, *J. Phys.*, **A23**(1990), 4249.

[6] J. Q. Liang and X. X. Ding, *Phys. Lett.*, **A153**(1991), 273.

[7] J. Q. Ling and H. J. W. Muller-Kirsten, *Ann. Phys.*, **219**(1992), 42.

[8] 高孝纯、许晶波、钱铁铮,物理学报,**40**(1991),25.

[9] C. Hohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, Quantum Mechanics (Wiley, New York, 1977).

[10] 曾谨言,量子力学(科学出版社,北京,1983),164 页;霍裕平、郑久仁,非平衡态统计理论(科学出版社,北京,1987),44 页.

[11] C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A33**(1986), 2207; **A35**(1987), 2147; **A37**(1988), 2683.

[12] 许晶波、钱铁铮、高孝纯,科学通报,**36**(1991),821.

[13] X. G. Zhao, *Phys. Lett.*, **A181**(1993), 425.

[14] 路洪、彭金生,物理学报,**43**(1994),1787.

[15] 黄洪斌,物理学报,**40**(1991),1396.

TIME EVOLUTION OF A QUANTUM SYSTEM WITH HAMILTONIAN CONSISTING OF TIME-DEPENDENT LINEAR COMBINATION OF *SU*(1,1)AND *SU*(2) GENERATORS AND THE HERMITIAN INVARIANT OPERATOR

LAI YUN-ZHONG

(*Department for Basic Courses, Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan* 030024)

LIANG JIU-QING

(*Department of physics, Shanxi University, Taiyuan* 030006)

(Received 17 January 1995)

ABSTRACT

We study the time evolution of a quantum system with Hamiltonian consisting of time-dependent linear combination of $SU(1,1)$ and $SU(2)$ generators. A proper hermitian invariant operator has been found to obtain not only closed formulas for the time evolution of quantum states but also the time evolution operators for both the $SU(1,1)$ and $SU(2)$ systems. The time evolution operators have been used to investigate the time-dependent two photons and $SU(2)$ squeezing states and squeezing properties of the time-dependent $SU(1,1)$ coherent states.

PACC: 0413