第 46 卷 第 5 期 1997 年 5 月
1000-3290/97/46(5)/0846-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.46, No.5, May, 1997

旋转荷电球体外部引力场中引力效应

罗新炼 王永久 程立伟
(湖南师范大学物理系,物理研究所,长沙 410081)
(1996 年 7 月 1 日收到)

以实验粒子的短程线方程为出发点,计算了由旋转参量与电荷参量所引起的近日点进动效应.当粒子绕行方向与场源旋转方向一致时,与 Kerr 场中情况相比修正项将使进动效应增大.此外,通过引入局域洛伦兹空间截面,可给出该场中运动物体上加速度.显然在随动系中($v^i=0$),从极轴方向和赤平面粒子均不能到达场源,而是分别停滞在 $r=\frac{k+\sqrt{k^2+4m^2a^2}}{2m}$ 和 $r=\frac{k}{m}$ 处.此时可以计算对星系尘埃的吸积作用,即尘埃的分布状况.最后还讨论了赤平面上作圆周运动物体(仅 $v^3\neq 0$)的类柯里奥利加速度.

PACC: 0420; 0480

1 引 言

引力场中的引力效应一直是人们关注的一个问题, Schwarschild, Reissner-Nordström, Kerr 场中的引力效应已经得到相当充分的研究[1—4],作者之一在此领域也曾从事过一定的研究工作[5—8].由无毛定理可知黑洞的性质用三个参量(质量、角动量和电荷)就可描述,因此研究旋转荷电球体(包括黑洞)外部引力场即 Kerr-Newman(K-N)场中引力效应具有更普遍的意义.

K-N 度规在 Boyer-Lindquist 坐标系中表示为

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(1-\frac{2mr-k}{\rho^2}\right)dt^2-\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2-\rho^2 d\theta^2 \\ &-\left[\frac{(2mr-k)a^2\sin^2\theta}{\rho^2}+(r^2+a^2)\right]\sin^2\theta d\phi^2 \\ &+\frac{a\sin^2\theta}{\rho^2}(2mr-k)dtd\phi, \end{aligned} \tag{1}$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2-2mr+a^2+k, \\ \rho^2 &= r^2+a^2\cos^2\theta, \end{aligned} \tag{2}$$

m, k 和 a 分别为源的质量、电荷的平方和角动量.另外文中希腊字母角标对 0,1,2,3 取值,拉丁字母角标对 1,2,3 取值.

2 K-N 场中试验粒子的轨道效应

在此,仅讨论中性试验粒子在 K-N 场中轨道近日点的进动效应.

选用球坐标系,考虑试验粒子在赤道平面$\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$内运动的情况.运动轨道可以用圆锥曲线的形式来表示

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{p}(1+e\cos\psi),$$
$$\psi=\phi+\alpha(\phi)=\phi+\delta\phi, \tag{3}$$

式中 p 和 e 分别为焦线参数和离心率,ψ 是真实的反常角位移,其中包括(与牛顿理论比较)附加的角位移 $\alpha(\phi)$.

由试验粒了的短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\sigma\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}\lambda}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\sigma}}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{4}$$

$$g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda}=1 \tag{5}$$

出发进行讨论.因为 K-N 场是稳态辐射对称引力场,即 $g_{\mu\nu}$中不含 t,ϕ,对(4)式积分有

$$g_{0\sigma}\dot{x}^{\sigma}=-\varepsilon, \tag{6}$$

$$g_{3\sigma}\dot{x}^{\sigma}=h, \tag{7}$$

式中 ε 为恒定能量,h 为恒定面积速度.将它们代入(5)式,作变换 $u=\frac{1}{r}$,整理后可得

$$\begin{aligned}F(u)=&\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]u\\&-\left\{\left(1+\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon^3\right)+\frac{k}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]\right\}u^2\\&+\left\{2m\left[1-\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon-\frac{8m^3a}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]+\frac{8mka}{h^3}\varepsilon^3\right\}u^3\\&-k\left[1-\frac{24m^2a}{h^3}\varepsilon-\frac{32m^3a}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]u^4\\&+o(k^2),\end{aligned} \tag{8}$$

式中 $F(u)=\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi}\right)^2$.

将(3)式代入,有

$$\begin{aligned}F(u)&=\frac{e^2}{p^2}\sin^2\psi\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\\&=A(\varepsilon,h,p,e)+B(\varepsilon,h,p,e)\frac{e}{p}\cos\psi+C(\varepsilon,h,p,e)\frac{e^2}{p^2}\sin^2\psi,\end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$\begin{aligned}A=&\frac{\varepsilon^2-1}{h^2}+\frac{2m}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]\frac{1}{p}-\left\{\left(1+\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon^2\right)\right.\\&\left.+\frac{k}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]\right\}\cdot\frac{1+e^2}{p^2}+\left\{2m\left[1-\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon\right.\right.\\&\left.\left.-\frac{8m^3a}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]+\frac{8mka}{h^3}\varepsilon^3\right\}\cdot\frac{1+3e^2}{p^3}-\left[k-\frac{24m^2ka}{h^3}\varepsilon\right.\end{aligned}$$

$$-\frac{32m^3ka}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\Big]\cdot\frac{1+6e^2+e^4}{p^4}+o(k^2),$$

$$B=\frac{2m}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]-\left\{\left[1+\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon^3\right]+\frac{k}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]\right\}\frac{2}{p}$$
$$+\left\{2m\left[1-\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon-\frac{8m^3a}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]+\frac{8mka}{h^3}\varepsilon^3\right\}\cdot\frac{3+e^2}{p^2}$$
$$-\left[k-\frac{24m^2ka}{h^3}\varepsilon-\frac{32m^3ka}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]\cdot\frac{4+4e^2}{p^3}+o(k^2),$$

$$C=\left\{\left(1+\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon^3\right)+\frac{k}{h^2}\left[1-\frac{2a\varepsilon}{h}(\varepsilon^2-1)\right]\right\}$$
$$-\left\{2m\left[1-\frac{8m^2a}{h^3}\varepsilon-\frac{8m^3a}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]+\frac{8mka}{h^3}\varepsilon^3\right\}\cdot\frac{3+e\cos\psi}{p}$$
$$+\left[k-\frac{24m^2ka}{h^3}\varepsilon-\frac{32m^3ka}{h^4}\varepsilon(\varepsilon^2-1)\right]\cdot\frac{6+4e\cos\psi+e^2+e^2\cos^2\psi}{p^2}$$
$$+o(k^2). \tag{10}$$

比较(9)式两边系数可得二元方程组 $A=0$, $B=0$. 解之可得 ε, h. 再将它们代入 C 的表达式,作积分

$$\left(\frac{\delta\alpha}{2\pi}\right)=\int_0^{2\pi}\frac{C^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\mathrm{d}\psi-1, \tag{11}$$

便得到试验粒子轨道的近日点进动效应. 但由于此方程中含有 ε, h 的高阶项,无法得到严格的解析解,我们仅作一低级近似来看 K-N 场中试验粒子的轨道效应. 令荷电球体以低速旋转,则试验粒子的能量 ε、面积速度 h 近似等于 R-N 场中相应的值. 为了使计算简化,令试验粒子作圆周运动($e=0$),且轨道半径 p 足够大,使$\frac{m}{p}<1$. 此时有

$$\varepsilon^2=\left(1-\frac{2m}{p}+\frac{k}{p^2}\right)^2\left(1-\frac{3m}{p}+\frac{2k}{p^2}\right)^{-1},$$
$$h^2=(mp-k)\left(1-\frac{3m}{p}+\frac{2k}{p^2}\right)^{-1}. \tag{12}$$

代入(11)式积分,有

$$\left(\frac{\delta\alpha}{2\pi}\right)=\frac{3m}{p}+\frac{27m^2}{p^2}+\frac{135}{2}\frac{m^3}{p^3}$$
$$-\frac{k}{2pm}-\frac{6k}{p^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{k}{pm}\right)^2-\frac{189}{4}\frac{km}{p^3}+\frac{33}{8}\frac{k^2}{p^3m}+\frac{3}{4}\left(\frac{k}{pm}\right)^3$$
$$+24\frac{ma^2}{p^3}-\frac{4\sqrt{ma}}{p\sqrt{p}}\left[1+\frac{9m}{p}+\frac{75}{2}\frac{m^2}{p^2}\right]$$
$$+\frac{4\sqrt{ma}}{p\sqrt{p}}\left[\frac{11}{4}\frac{k}{pm}+\frac{161}{4}\frac{k}{p^2}+2\left(\frac{k}{pm}\right)^2\right]+o\left(\frac{1}{p^4}\right). \tag{13}$$

其中由旋转电荷引起的轨道近日点进动效应为

$$\left(\frac{\delta\alpha}{2\pi}\right)_{k,a} = \frac{4\sqrt{ma}}{p\sqrt{p}}\left[\frac{11}{4}\frac{k}{pm} + \frac{161}{4}\frac{k}{p^2} + 2\left(\frac{k}{pm}\right)^2\right]. \tag{14}$$

由此可见,当粒子绕行方向与场源旋转方向相同时,修正量使进动效应增大,反向绕行时使之减小.

3 K-N 场中引力加速效应

在广义相对论中,将试验物体在四维时空中沿短程线的运动看作自由物体的惯性运动,不涉及引力和加速度的概念.若采用洛伦兹局域空间截面来研究物体运动就又回到了加速度和力的概念.这时三维加速度可写为[1]

$$g^i = -\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d}{ds}\frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{15}$$

速度 v^i 属于上述局域截面,三维速度大小由纯空间度规给出

$$v = \sqrt{\gamma_{ij}v^iv^j}, \tag{16}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}. \tag{17}$$

加速度(15)式可化为形式

$$g^i = \frac{1}{1-\beta^2}\left[-\frac{\Gamma^i_{00}}{g_{00}} - \frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}}{g_{00}}\Gamma^i_{00}\right)\frac{v^k}{c}\right.$$
$$\left. - \left(\Gamma^i_{kj} - \frac{g_{0j}}{g_{00}}\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}}{g_{00}}\Gamma^i_{0j} + \frac{g_{0j}g_{0k}}{g^2_{00}}\Gamma^i_{00}\right)\frac{v^j}{c}\cdot\frac{v^k}{c}\right]. \tag{18}$$

三维加速度大小也由纯空间度规给出

$$g = \sqrt{\gamma_{ij}g^ig^j}. \tag{19}$$

下面来讨论 K-N 场中加速效应.

3.1 随动系中加速效应

仅讨论中性试验粒子的情况.

在随动坐标系($v^i=0$)中,加速度可写为

$$g^i = -\frac{1}{g_{00}}\Gamma^i_{00}. \tag{20}$$

将(1)式代入,可得非零加速度分量

$$g^1 = \frac{\Delta}{(\rho^2)^2}(ma^2\cos^2\theta + rk - mr^2)\left(1 - \frac{2mr-k}{\rho^2}\right)^{-1}, \tag{21}$$

$$g^2 = \frac{1}{2}\frac{2mr-k}{(\rho^2)^2}a^2\sin2\theta\left(1 - \frac{2mr-k}{\rho^2}\right)^{-1}. \tag{22}$$

注意到 K-N 场中纯空间度规

$$\gamma_{11} = -g_{11}, \quad \gamma_{22} = -g_{22}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0, \tag{23}$$

可得随动系中,中性试验粒子三维加速度大小的表达式

$$g=\frac{1}{(\rho^2)^{3/2}}[\rho^2-(2mr-k)]^{-1}\cdot\{\Delta[(2mr-k)r-m\rho^2]^2+\frac{1}{4}(2mr-k)^2a^4\sin^2 2\theta\}^{1/2}. \tag{24}$$

显然,此效应依赖于试验粒子的位置

由(22)式可见,由于场源的旋转使得出现了极向加速度.在极轴和赤平面以及半径为$r=r_k=\frac{k}{2m}$的球面上极向加速度均为零.

由(21)式可见在K-N场的视界面($r=m\pm\sqrt{m^2-a^2-k}$)上及$r=\frac{k+\sqrt{k^2+4m^2a^2\cos^2\theta}}{2m}$处径向加速度为零.

由此可来讨论试验粒子在K-N场中的平衡位置(在此仅讨论了极轴和赤平面两个方向).

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时,

$$g=\frac{1}{r^2}(r^2-2mr+k)^{-1}(r^2-2mr+a^2+k)^{1/2}(mr-k), \tag{25}$$

可知源电荷引力作用减小了引力质量和动量产生的加速度,即引力电荷的作用是使中性试验粒子受到一种推斥作用.当$r<\frac{k}{m}$时,推斥大于吸引;当$r=\frac{k}{m}$时,$g=0$.因此在赤平面上试验粒子不能到达场源,而是停滞在$r=\frac{k}{m}$处.

当$\theta=0$或$\theta=\pi$时,

$$g=\frac{1}{(r^2+a^2)^{3/2}}[r^2+a^2-2mr+k]^{-1/2}[mr^2-kr-ma^2], \tag{26}$$

可知引力电荷和角动量的作用是使中性试验粒子受到了一种推斥作用.当$r<\frac{k+\sqrt{k^2+4m^2a^2}}{2m}$时,推斥将大于吸引.可见由极轴方向试验粒子也不能到达场源,而停滞在$r=\frac{k+\sqrt{k^2+4m^2a^2}}{2m}$处.

若由(21),(22),(24)式来讨论任意方向的情况,便可计算场对星系尘埃的吸积作用,即尘埃的分布状况.

若考察试验电荷在K-N场中的加速度,只需在(21)式右端附加一项由库仑力产生的加速度即可.

3.2 类柯里奥利加速度

设试验粒子在赤平面内作圆周运动(仅$v^3\neq 0$),由(18)式并略去v^i的二次项,有

$$g^i=\left[-\frac{\Gamma^i_{00}}{g_{00}}-\frac{2}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^i_{03}-\frac{g_{03}}{g_{00}}\Gamma^i_{00}\right)\frac{v^3}{c}\right]\frac{1}{1-\beta^2}. \tag{27}$$

若将 K-N 场中度规仅保留 a 的一次项代入,则仅有径向加速度不为零,

$$g^1 = \frac{1}{1-\beta^2}\left\{-\frac{1}{r^2}\left(m-\frac{k}{r}\right)+2\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{k}{r^2}\right)^{-1/2}\left[\frac{a}{r^2}\left(m-\frac{k}{r}\right)\right]\frac{v^3}{c}\right\}. \quad (28)$$

那么加速度大小为

$$g = \frac{1}{1-\beta^2}\frac{m-\dfrac{k}{r}}{r^2}\left[1-2a\frac{v^3}{c}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{k}{r^2}\right)^{-1/2}\right]\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{k}{r^2}\right)^{-1/2}. \quad (29)$$

可见粒子相对于 a 顺行时,a 的贡献是附加的推斥,而源电荷 k 将减小这一推斥作用;当粒子逆行时,a 的贡献是附加的吸引,源电荷 k 将减小这一吸引作用.

[1] O. S. Ivanitzkaya, Lorentz Basis and Gravitational Effect in Einstein's Theory of Gravitation (Science and Technology, The Soviet Union 1979), pp. 1—65.

[2] B.B, Godfrey, *Phys. Rev.*, **D1**(1970), 2721.

[3] J.K. Chose, P. Kumar, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2736.

[4] D.C. Wilkins, *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 814.

[5] 王永久、唐智明,科学通报,**30**(1985),345.

[6] 彭秋和、王永久,科学通报,**30**(1985),418.

[7] Jing Ji-liang, Yu Hong-wei, Wang Yong-jiu, *Chin, Phys. Lett.*, **10**(1993), 445.

[8] Jing Jiliang, Wang Yougjiu, Zhu Jiuyun, *Phys. Lett.*, **A187**(1994), 31.

GRAVITATIONAL EFFECT IN THE OUTSIDE OF THE CHARGED ROTATING SPHERE

LUO XIN-LIAN　WANG YONG-JIU　CHENG LI-WEI

(*Department of Physics, Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha*　410081)

(Received 1 July 1996)

ABSTRACT

The geodesic equations of a test particle are used as the starting point for calculating the effect of perihelion advance, caused by rotating charge. Compared with that of Kerr field, the correction terms enhance the advance effect as the revolutionary direction of particle coincides with that of field source. Moreover, by introducing local Lorentz spacial section, the acceleration of a moving body in this field can be given. It is easy to show that particles cannot arrive at field source from the axis direction or from equatorial plane, but can be held up at $r = \frac{k+\sqrt{k^2+4m^2a^2}}{2m}$ or $r = \frac{k}{m}$ in comoving coordinates ($v^i = 0$). In a way, the accretive effect of galatic dust, i.e. the distribution of dust can be calculated then. Finally, the Coriolis-like acceleration of the moving body circling around the source on equatorial plane (only $v^3 \neq 0$) is also discussed.

PACC:　0420; 0480