

Kerr 介质中双模 $SU(1, 1)$ 相干态场与 V 型三能级原子的相互作用

赖云忠

(太原重型机械学院基础部, 太原 030024)

梁九卿

(山西大学物理系, 太原 030006)

(1996 年 5 月 30 日收到; 1996 年 11 月 4 日收到修改稿)

导出了充满 Kerr 介质的高 Q 腔中 V 型三能级原子与双模 $SU(1, 1)$ 相干态场相互作用系统的态矢量, 并以此计算三能级原子布居概率和辐射场统计性质随时间的演化. 数值计算显示, Kerr 效应产生与两能级原子不同的 Rabi 振荡特性, 而双模场的关联特性受 Kerr 介质的影响较小. 还讨论了 Kerr 效应对 Cauchy-Schwartz 不等式的影响.

PACC: 4250; 3280

1 引 言

原子体系与光场的相互作用及由此引起的原子与光场的量子性质随时间的演化是当前一个十分活跃的研究课题. 自 1963 年提出 Jaynes-Cummings(J-C)模型后, 人们对该模型作了大量的研究. 在以往的工作中, 首先是研究单原子与各种光场的单光子及多光子相互作用^[1-6], 继而又研究多原子体系^[7-9]与光场的相互作用. 在研究中发现了许多特征各异的非经典现象, 如原子粒子数反转的崩溃与回复现象、光场的压缩和反聚束效应以及双模场的非经典相关特性等. 近来, 人们将 J-C 模型进行了推广^[10-13], 即考虑一个与单模或双模光场发生相互作用的两能级原子位于充满 Kerr 介质的高 Q 腔中(不计及腔体的单光子损耗), 研究了 Kerr 介质对原子动力学行为和光场性质的影响^[10, 11]. 发现由于 Kerr 介质的存在, 将使得原子粒子布居差的回复效应更具规律^[10, 13], 光场的亚泊松分布因 Kerr 效应的影响将减弱, 两模间的相关程度明显减小并且两模间的非经典相关程度(由 Cauchy-Schwartz 不等式描述)将减弱^[12].

然而, Kerr 效应对关联双模场与三能级原子相互作用系统的影响情况怎样呢? 本文将研究这一问题. 在求得系统态矢量后, 用数值计算分析, 高 Q Kerr 介质腔中双模 $SU(1, 1)$ 相干态场与 V 型三能级原子相互作用系统中, 原子能级布居概率及双模场的量子统计性质随时间的演化规律. 我们发现, 与文献[12]曾讨论过的高 Q Kerr 介质腔中相干态场与两能级原子相互作用系统相比较, Kerr 效应对关联双模场与 V 型三能级原子相互作用系统的原子 Rabi 振荡、双模场的互关联函数和 Cauchy-Schwartz 不等式随时间演

化的影响都呈现出一些新特征.

2 模型和系统的态矢量

Kerr 介质与双模光场的耦合在绝热近似和忽略相位自调制效应近似下^[12,14], 相互作用哈密顿量可表示为

$$V_1 = x a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2, \quad (1)$$

其中 x 是与介质三阶极化系数有关且反映 Kerr 效应强度的常数, a_i^\dagger 和 a_i ($i=1,2$) 分别是频率为 ν_i 的光场产生和湮没算符.

V 型三能级原子与双模场的共振相互作用如图 1 所示, 在旋波近似下其相互作用哈密顿量为^[16]

$$V_2 = g_1(a_1 R_{20} + R_{02} a_1^\dagger) + g_2(a_2 R_{10} + R_{01} a_2^\dagger), \quad (2)$$

式中 $R_{ij} = |i\rangle\langle j|$. 考虑 V 型三能级原子处在充满 Kerr 介质的高 Q 腔中(不计及腔体的单光子损耗), 与双模光场发生共振相互作用, 描述该系统的总相互作用哈密顿量(取 $\hbar=1$)可写为

$$H_I = V_1 + V_2. \quad (3)$$

若初始时刻原子处在激发态 $|2\rangle$, 光场处于

$$|\Psi(0)\rangle_f = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle, \quad (4)$$

式中 $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, 而 $|F_{n_1, n_2}|^2 = P_f(n_1, n_2)$ 表示态 $|\Psi(0)\rangle_f$ 中场模 1 有 n_1 个光子,

场模 2 有 n_2 个光子的概率. 在 t 时刻, 原子-光场耦合体系在相互作用绘景中的态矢量可写为

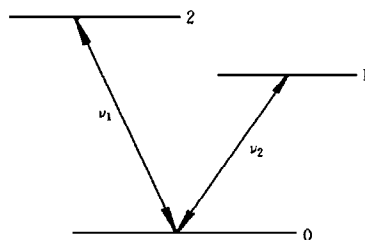


图 1 V 型三能级原子与双模场的相互作用

$$|\Psi_1(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} F_{n_1, n_2} \exp[-i n_2(n_1+1)xt] [B_2(n_1, n_2, t)|2, n_1, n_2\rangle + B_1(n_1, n_2, t)|1, n_1+1, n_2-1\rangle + B_0(n_1, n_2, t)|0, n_1+1, n_2\rangle]. \quad (5)$$

将上式代入 Schrödinger 方程

$$i \frac{d}{dt} |\Psi_1(t)\rangle = H_I |\Psi_1(t)\rangle, \quad (6)$$

考虑到(5)式中 $B_i(n_1, n_2, t)$ ($i=0,1,2$) 应该为有界函数, 因而它们所满足的一阶常系数微分方程组的特征根必定为相异的纯虚根或零根. 利用共振条件和初始条件可得(5)式中的各系数

$$B_0(n_1, n_2, t) = g_1 \sqrt{n_1+1} \sum_{j=1}^3 [x(n_1+1) - \lambda_j] A_j e^{i\lambda_j t},$$

$$B_1(n_1, n_2, t) = g_1 g_2 \sqrt{(n_1+1)n_2} \sum_{j=1}^3 A_j e^{i\lambda_j t},$$

$$B_2(n_1, n_2, t) = \sum_{j=1}^3 [\lambda_j^2 - x(n_1 + 1)\lambda_j - g_2^2 n_2] A_j e^{i\lambda_j t}. \quad (7)$$

式中 λ_j 和 A_j ($j=1, 2, 3$) 分别为 (λ_j 为实数)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= R \cos u - \frac{b}{3}, \\ \lambda_2 &= R \cos\left(u + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3}, \\ \lambda_3 &= R \cos\left(u + \frac{4}{3}\pi\right) - \frac{b}{3}. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ A_2 &= \frac{1}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)}, \\ A_3 &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3)}. \end{aligned} \quad (9)$$

(8) 式中 b , u 和 R 可由下述方程得到^[15]

$$\begin{aligned} b &= -x(n_1 + n_2 + 1), \\ d &= xg_1^2(n_1 + 1)^2 + xg_2^2 n_2^2, \\ c &= x^2(n_1 + 1)n_2 - g_1^2(n_1 + 1) - g_2^2 n_2; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P &= c - \frac{b^2}{3}, \\ Q &= d - \frac{bc}{3} + \frac{2b^3}{27}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{Q}{2} \left(-\frac{P}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right], \\ R &= \left(-\frac{4}{3} P \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

若 $x=0$, 则由(10)–(12)式可得 $u = \frac{\pi}{2}$. 此时本模型退化为高 Q 腔中双模场与 V 型三能级原子的相互作用模型^[16]. 容易验证, 当 $x=0$ 时, 上述结果与文献[16]一致.

我们取光场的初态为双模 SU(1, 1) 相干态, 它可表示为^[16]

$$|\zeta, q\rangle = (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(n+q)!}{n! q!} \right]^{\frac{1}{2}} \zeta^n |n+q, n\rangle. \quad (13)$$

比较(4)和(13)式, 可得 $n_1 = n+q$, $n_2 = n$. 光子分布函数为

$$F_{n_1, n_2} = F_{n+q, n} = (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1+q}{2}} \left[\frac{(n+q)!}{n! q!} \right]^{\frac{1}{2}} \zeta^n. \quad (14)$$

将(14)式代入(5)式, 得到相互作用绘景中的态矢量

$$|\Psi_1(t)\rangle = (1 - |\zeta|^2)^{\frac{1+q}{2}} \sum_n \left[\frac{(n+q)!}{n! q!} \right]^{\frac{1}{2}} \zeta^n \exp[-in(n+q+1)xt]$$

$$\begin{aligned} & \times [B_2(n+q, n, t)|2, n+q, n\rangle + B_1(n+q, n, t)|1, n+q+1, n-1\rangle \\ & + B_0(n+q, n, t)|0, n+q+1, n\rangle]. \end{aligned} \quad (15)$$

由于两模光子的关联, 在(15)式中已经用对 n 的单重求和代替了对 n_1 和 n_2 的双重求和. 下面从态矢量 $|\Psi_1(t)\rangle$ 出发, 计算三能级原子的粒子布居概率和辐射场的统计性质随时间的演化. 因为文献[16]已经对 $x=0$ 的情形作了详细的讨论, 本文仅研究 $x \neq 0$ 的情形. 为了与 $x=0$ 的情形作比较, 本文选取与文献[16]中相同的 q 和 ζ 参数, 除后面讨论单模二阶相干度 $g_{11}^{(2)}$ 和 $g_{22}^{(2)}$ 外, 文中涉及 $x=0$ 的情形时均参照文献[16]中的讨论. 以下文中均取 $g_1 = g_2 = 1$.

3 Kerr 效应对原子粒子布居概率的影响

由第二节的态矢量 $|\Psi_1(t)\rangle$ 可得原子处在第 i 个能级的概率为

$$P_i = \sum_n |F_{n+q, n}|^2 \cdot |B_i(n+q, n, t)|^2 \quad i = 0, 1, 2, \quad (16)$$

利用(7)–(12)及(14)式, 对(16)式所作的数值计算结果如图 2 所示. 图 2(a)表明, $x=1$, $q=0$ 时, P_0 , P_1 和 P_2 均随时间作无规振荡. 此结果与 $x=0$, $q=0$ 的情形相同, 它暗示这

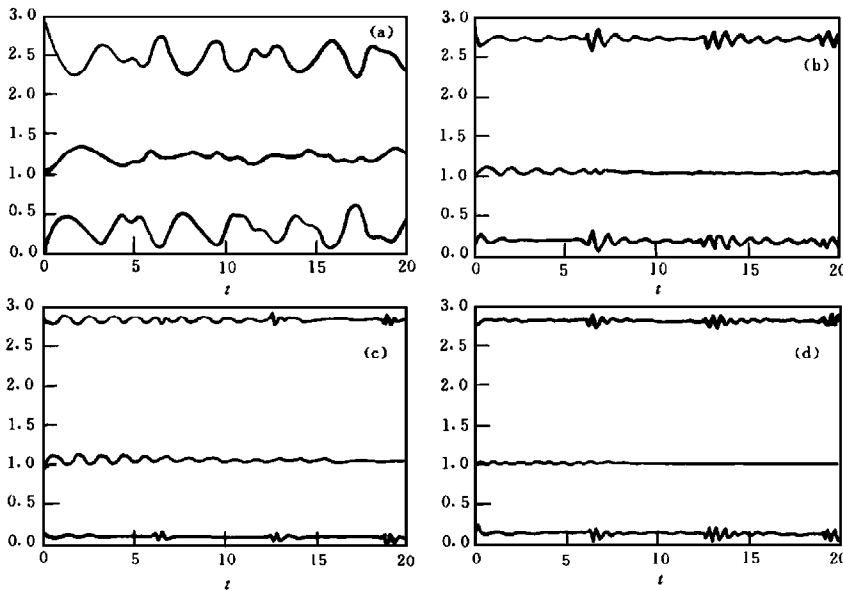


图 2 P_0 , P_1+1 和 P_2+2 的时间演化 $x=1$. (a) $\zeta=0.8$, $q=0$; (b) $\zeta=0.8$, $q=4$; (c) $\zeta=0.9$, $q=4$; (d) $\zeta=0.8$, $q=8$

时光场的光子数分布与热场相似而 Kerr 效应不影响此特征. 将图 2 与 $x=0$ 的情形比较可知, Kerr 效应的非线性作用使得原子能级间跃迁的概率减小, 导致原子-光场的耦合程度减弱, 从而使得原子 Rabi 振荡幅度减小且 P_2 , P_0 和 P_1 的平均值依次明显减小. 此特

征与 Kerr 效应对场与两能级原子相互作用下原子 Rabi 振荡特性的影响相似^[10,13], 但由图 2(b), (c)和(d)可看出, 与 $x=0$ 时相比, 由于 Kerr 效应的影响, 原子 Rabi 振荡的崩溃与回复现象变得不明显(见图 2(c)和(d)), 甚至不存在(见图 2(b)). 此特征与 Kerr 效应对场与两能级原子相互作用下原子的 Rabi 振荡特性不同. 由图 2 可见, 虽然 Kerr 效应使得原子 Rabi 振荡幅度减小, 但在原来(即 $x=0$)的崩溃区域出现微幅振荡, 从而使原来的崩溃与回复现象趋于消失. 这种微幅振荡的幅度在 ζ 一定而增加 q 或 q 一定而增加 ζ 时均变小, 这是由于增加 q 和 ζ 都使光子数分布展宽的缘故^[16].

4 场的量子统计性质

下面讨论 SU(1,1)相干态场与 V 型三能级原子相互作用下, 量子统计特性的时间演化受 Kerr 效应的影响.

首先讨论双模互关联函数, 把它定义为

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{\langle a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \rangle}{\langle a_1^\dagger a_1 \rangle \langle a_2^\dagger a_2 \rangle}. \quad (17)$$

利用(5)–(14)式可求出上式中的平均值. 若 $g_{12}^{(2)} > 1$, 称两模间是关联的; 若 $g_{12}^{(2)} < 1$, 则称为反关联的. 对(17)式所作的数值计算结果如图 3 和图 4 所示. 与文献[16]中 $x=0$ 的

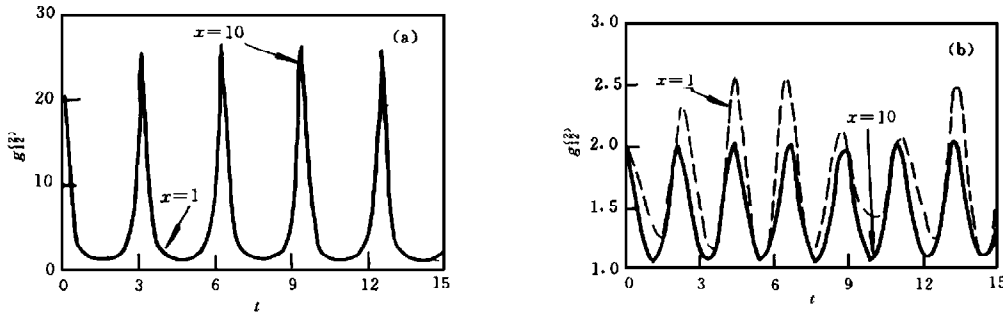


图 3 $\zeta=0.2$, $g_{12}^{(2)}$ 的时间演化 (a) $q=0$, (b) $q=1$

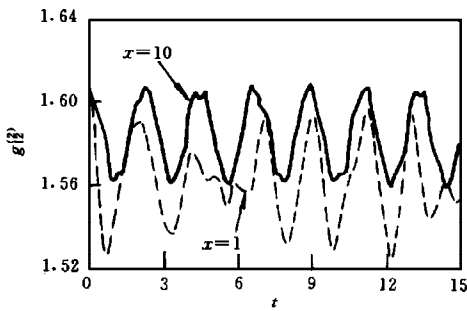


图 4 $\zeta=0.8$, $q=1$ 时 $g_{12}^{(2)}$ 的时间演化

情形比较可知, 在 $x=0, 1, 10$ 三种情形下, 两模互关联函数的时间演化特征都很相似. 在 $t=0$ 时刻, 双模 SU(1,1)场尚未与三能级原子相互作用时, 参数 ζ 和 q 的值越小, 两个模的关联程度就越强. 随时间的增加, 关联程度出现起伏, 但 $g_{12}^{(2)}(t)$ 总是大于 1, 即互关联总是存在. 从图 3 和图 4 还可以看到, 对于较弱的场, 关联程度随时间的起伏较大. 这说明就两模间的关联程度而言, 原子与场的相互作用对弱场的影响要大得多. 上述特征与 Kerr 效应的强弱无

关. Kerr 效应的强度对两模的关联程度只有较小的影响. 当 ζ 较小而 $q=0$ 时(如图 3(a) 所示), 在大部分时间内, Kerr 效应增强则关联程度减弱, 但在一些强关联阶段, 关联程度随 x 增大而增强. 当 ζ 较小, 而 $q \neq 0$ 时(如图 3(b) 所示), Kerr 效应增强, 则关联程度总是减弱. 当 ζ 较大时(如图 4 所示), Kerr 效应增强两模之间的关联程度是增强的. 由上述讨论可知, 关联双模 SU(1,1) 相干态场与 V 型三能级原子相互作用过程中场的关联特性受 Kerr 效应的影响较小, 且 Kerr 效应并不总是使两模间的关联程度减小. 此特征与两模相干态场与非简并双光子相互作用过程中, Kerr 效应使两模的关联程度减弱的特征不同^[12].

其次讨论 Cauchy-Schwartz 不等式. 对于双模场, Cauchy-Schwartz 不等式定义为^[16]

$$\langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2 \rangle^2 \leq \langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle \langle a_2^{+2} a_2^2 \rangle. \quad (18)$$

为了反映对上式偏离的相对程度, 引入^[16]

$$I_0 = \frac{[\langle a_1^{+2} a_1^2 \rangle \langle a_2^{+2} a_2^2 \rangle]^{\frac{1}{2}}}{|\langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_1 a_2 \rangle|} - 1. \quad (19)$$

若 $I_0 < 0$, 意味着 Cauchy-Schwartz 不等式不成立, 光场是非经典的.

图 5 和图 6 给出了(19)式的数值解. 从图中可见, I_0 总是小于零, 即 Cauchy-Schwartz 不等式总是不成立. 这说明双模场是非经典场, 两模间是一种非经典相关. 与 $x=0$ 的情形比较可知, Kerr 效应增强光场的非经典相关程度. 此结论与相干态场同非简并双光子相互作用过程中 Kerr 效应对 Cauchy-Schwartz 不等式的影响显然不同^[12]. 比较图 5 和图 6 及文献[16]可知, ζ 越小 Kerr 效应对 I_0 的影响越显著.

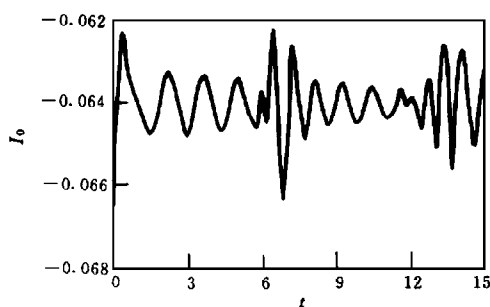


图 5 $\zeta=0.8, q=4, x=1$ 时 I_0 的时间演化

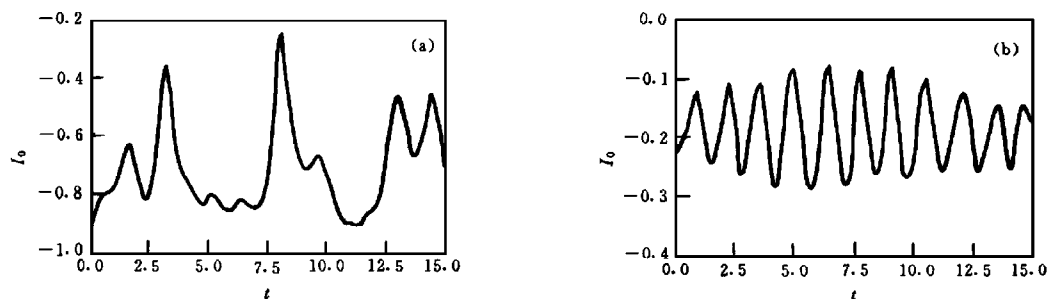


图 6 $\zeta=0.2, x=1$ 时 I_0 的时间演化 (a) $q=0$, (b) $q=4$

最后讨论 Kerr 效应对双模光场第 i 模的二阶相干度的影响. 光场第 i 模的二阶相干度定义为^[12]

$$g_{ii}^{(2)} = \frac{\langle a_i^{+2} a_i^2 \rangle}{\langle a_i^+ a_i \rangle^2} \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

若 $g_{ii}^{(2)} < 1$, 则光场第 i 模处于亚泊松分布. 图 7 表明, ζ 较小时 (见图 7(a)), $g_{11}^{(2)} < 1$, 光场的第一模处于亚泊松分布, $g_{11}^{(2)}$ 作无规振荡且 Kerr 效应对其振荡特征和亚泊松分布无显著影响; 当 ζ 较大时 (见图 7(b)), $g_{11}^{(2)} > 1$, 光场第一模处于泊松分布. 在 $x=0$ 时,

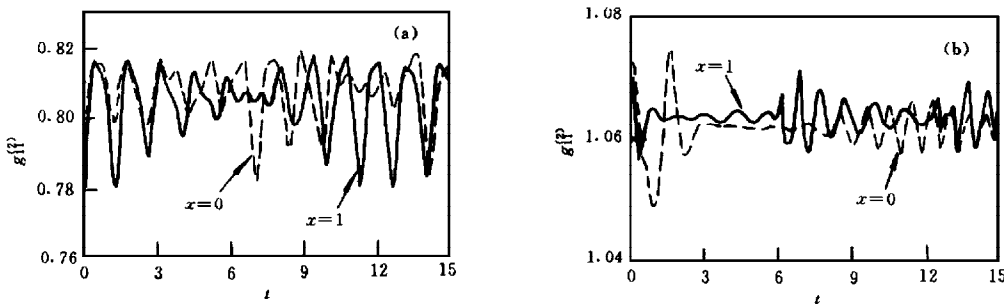


图 7 $q=4$ 时, $g_{11}^{(2)}$ 的时间演化 (a) $\zeta=0.2$, (b) $\zeta=0.8$

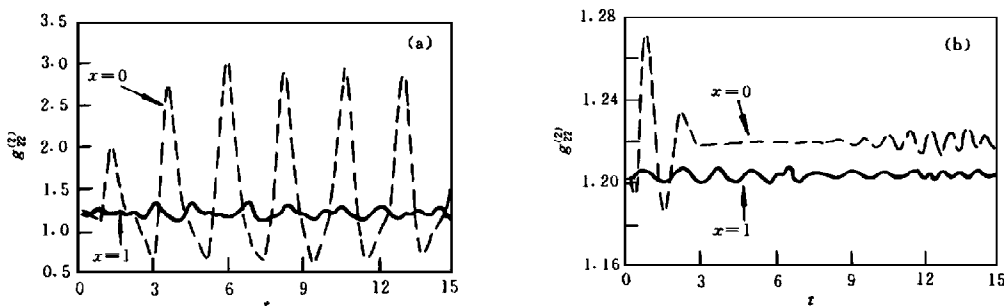


图 8 $q=4$ 时, $g_{22}^{(2)}$ 的时间演化 (a) $\zeta=0.2$, (b) $\zeta=0.8$

$g_{11}^{(2)}$ 的振荡呈现崩溃与回复现象, 而 $x=1$ 时, $g_{11}^{(2)}$ 的振荡无崩溃回复现象. 图 8(a) 表表, ζ 较小时, 若 $x=0$, $g_{22}^{(2)}$ 的振荡幅度较大, 在一些时间区域内光场第二模呈现出亚泊松分布; 若 $x=1$, $g_{22}^{(2)} > 1$ 且作小幅度无规振荡, 第二模处于泊松分布. 图 8(b) 表明, 当 ζ 较大时, $g_{22}^{(2)} > 1$, 第二模为泊松分布, 若 $x=0$, $g_{22}^{(2)}$ 的振荡呈现崩溃回复现象; 若 $x=1$, $g_{22}^{(2)}$ 作小幅度无规振荡.

5 结 语

本文研究了双模 $SU(1,1)$ 相干态场与 V 型三能级原子相互作用过程中, Kerr 效应对原子 Rabi 振荡和场的量子统计性质的影响. 结果表明: Kerr 效应对 V 型三能级原子的 Rabi 振荡的崩溃与回复现象存在破坏作用. 双模场的互关联函数的时间演化受 Kerr 效应

的影响较小. 当初始光场较弱(即 ζ 较小)时, Kerr 效应增强则关联程度小幅度减弱; 而当初始光场较强(即 ζ 较大)时, Kerr 效应增强则关联程度小幅度增强. Kerr 效应使 Cauchy-Schwartz 不等式总是不成立. 此结论与初始光场的强弱无关. 当初始光场较弱时, 第一模呈现泊松分布且受 Kerr 效应的影响很小; Kerr 效应对第二模的影响较明显, 当腔中无 Kerr 介质时, 第二模准周期性地呈现泊松和亚泊松分布, 当腔中存在 Kerr 介质时, 第二模呈现泊松分布; 当初始光场较强时, 光场两模均呈现泊松分布, 且受 Kerr 效应的影响较小.

- [1] P. L. Knight, P. M. Radmore, *Phys. Lett.*, **A90**(1982), 342.
- [2] 刘正东, 物理学报, **36**(1987), 1645.
- [3] 周 鹏、彭金生, 光学学报, **10**(1990), 837.
- [4] Shih-chuan Gou, *Phys. Rev.*, **A40**(1989), 5116.
- [5] W. K. Lai, V. Buzek, P. L. Knight, *Phys. Rev.*, **A44**(1991), 6043.
- [6] 王继锁、孙金祚、王传奎等, 光学学报, **13**(1993), 1096.
- [7] 罗振飞、徐至展、徐 磊, 物理学报, **41**(1992), 1950.
- [8] 刘三秋、刘正东、李佛铨等, 物理学报, **40**(1991), 1049.
- [9] 吴 强、姚 、郭光灿, 光学学报, **14**(1994), 469.
- [10] V. Buzek, I. Jex, *Opt. Commun.*, **78**(1990), 425.
- [11] V. Buzek, I. Jex, *J. Mod. Opt.*, **38**(1991), 987.
- [12] 李高翔、彭金生, 物理学报, **42**(1993), 1443.
- [13] H. T. Dung, A. S. Shumovsky, *Phys. Lett.*, **A160**(1991), 437; P. Gora, C. Jędrzejek, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), 6816.
- [14] N. Imoto, H. A. Haus, Y. Yamamoto, *Phys. Rev.*, **A32**(1985), 2287.
- [15] 王竹溪、郭敦仁, 特殊函数概论(科学出版社, 北京, 1979), 第 729 页.
- [16] 路 洪、彭金生、李高翔, 物理学报, **44**(1995), 708.

INTERACTION OF TWO-MODE $SU(1,1)$ COHERENT STATES WITH THE V-TYPE THREE-LEVEL ATOM IN A KERR-LIKE-MEDIUM

LAI YUN-ZHONG

(Department for Basic Courses, Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan 030024)

LIANG JIU-QING

(Department of Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006)

(Received 30 May 1996; revised manuscript received 4 November 1996)

ABSTRACT

We first derive the state vector of a V-type three-level atom interacting with two-mode $SU(1,1)$ coherent states in a Kerr-like medium. It is shown by numerical calculations that the Kerr effect results in different characters of the Rabi oscillation, as compared with the two-level atom case, while the correlation of the two-mode coherent states is less affected by the Kerr medium. We also discuss the influence of Kerr effect on the Cauchy-Schwartz inequality.

PACC: 4250; 3280