

# 调制驻波光场中二能级原子 动量扩散的动力学研究

王中结<sup>1)</sup> 路轶群<sup>2)</sup> 陆同兴<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(安徽师范大学物理系, 芜湖 241000)

<sup>2)</sup>(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

(1998 年 11 月 24 日收到)

分析了二能级原子在振幅调制驻波光场作用下动量扩散模型. 这个量子系统在经典极限下表现混沌行为. 在相同参数条件下, 这个系统具有动力学局域特征.

PACC: 0545; 3280

## 1 引 言

量子局域这一奇特现象首先由安德森在凝聚态物理研究中被发现. 近来这一课题已引起人们广泛兴趣. Casati 等人对量子周期受激转子的数值研究发现该系统具有安德森局域效应, 即其波函数概率具有稳定的指数型局域分布<sup>[1]</sup>. Chirikov 等人进一步研究发现其能级间隔统计分布表现为维格纳分布<sup>[2]</sup>. Leopold 等人所做的高激发态氢原子微波电离实验很难用量子理论解释<sup>[3]</sup>. Casati 等人注意到高激发态氢原子微波电离与量子周期受激转子间的联系, 并用经典混沌扩散模型成功地解释了高激发态氢原子电离过程出现的电离阈现象<sup>[4]</sup>.

冷却原子技术可以实现单个原子的测量<sup>[5]</sup>. Moore 等人首先根据冷却原子原理实现了量子周期受激转子模型<sup>[6]</sup>. Graham 和 Schlautmann 研究了原子束与调制驻波光场相互作用的量子局域现象, 并在实验上观察到这个奇特现象<sup>[7]</sup>. 另外还有许多学者在“俘获”离子与驻波光场相互作用的研究中, 指出这样的系统也存在量子局域现象<sup>[8,9]</sup>.

本文研究了原子束与振幅调制驻波光场相互作用的动量扩散模型. 它相应的经典极限是一参数激励下的单摆. 研究了经典单摆出现混沌的参数条件, 以及在同样的参数条件下量子模型出现的局域现象. 结果启示我们去考虑, 量子局域现象与经典系统混沌之间是否必然联系? 本文给出了一个图像, 二能级原子与振幅调制驻波光场相互作用的扩散模型在经典极限条件下具有混沌行为, 在相同的参数条件下对应的量子模型将出现局域效应. 选取经典极限条件下非混沌和周期区的参数, 对应的量子模型将不出现局域效应.

## 2 量子模型

考虑一能级差为  $\hbar\omega_0$  的二能级原子以  $z$  方向射入单模调制驻波光场中, 假定原子初始处于基态, 并具有动能  $E_0$ . 忽略延迟效应, 采用旋转波近似, 这个系统的哈密顿量<sup>[7]</sup>为

$$H = \frac{P^2}{2M} + \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| - \{d\varepsilon(t) \cos(k_L x) \exp(i\omega_L t) \sigma_+ + \text{H. c.}\}, \quad (1)$$

式中  $M$  为原子的质量,  $P$  为原子的质心动量,  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  为 Pauli 自旋算符,  $d$  为原子偶极距,  $|e\rangle$ ,  $|g\rangle$  分别为原子的激发态和基态,  $\varepsilon(t)$  为单模光场的振幅,  $k_L$  为波数. 在以速度为  $v_z = \sqrt{2E_0/M}$  的参考坐标系下, 只考虑原子的  $x$  方向的横向运动. 令原子的状态表为  $\Psi_g(x, t)|g\rangle + \Psi_e(x, t)\exp(-i\omega_L t)|e\rangle$ , 系统的运动方程为

$$i\hbar \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial x^2} - \frac{d\varepsilon(t)}{2} \cos(k_L x) \phi_e, \quad (2)$$

$$i\hbar \frac{\partial \phi_e}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} + \hbar\delta_L \phi_e - \frac{d\varepsilon(t)}{2} \cos(k_L x) \phi_g, \quad (3)$$

式中  $\delta_L = \omega_0 - \omega_L$  为失谐量. 假定失谐量足够大, 自发辐射的影响就可忽略不计, 于是就可进一步推出

$$i\hbar \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 \phi_g}{\partial x^2} - \frac{dI(t)}{\hbar\delta_L} \cos^2(k_L x) \phi_g, \quad (4)$$

式中  $I(t) = \varepsilon^2(t)$ . 假定光强受到余弦调制, 那么  $I(t) = \varepsilon_0^2(1 + m \cos \omega t)$ ,  $m$  为调制深度,  $\omega$  为调制频率. 系统的哈密顿量可写为

$$H = \frac{P^2}{2M} - \frac{\hbar\Omega_{\text{eff}}}{4} (1 + m \cos \omega t) \cos^2 k_L x, \quad (5)$$

式中  $\Omega_{\text{eff}} = 4d^2\varepsilon_0^2/\hbar^2\delta_L$  为有效 Rabi 频率.

使用无量纲变量  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \left[ \frac{\hbar k_L^2 \Omega_{\text{eff}}}{2M} \right]^{1/2}$ ,  $\phi = 2k_L x$ ,  $\rho = \frac{2k_L}{M\omega_0} P$ , 算符  $\phi$ ,  $\rho$  的对易关系式为  $[\phi, \rho] = i\hbar k$ ,  $k$  为等效普朗克参数,  $k = \frac{4k_L^2 \hbar}{M\omega_0}$ , 则无量纲哈密顿量(与原哈密顿量相差一常数因子)为

$$H = \frac{\rho^2}{2} - 2(1 + m \cos \Omega\tau) \cos^2(\phi/2), \quad (6)$$

式中  $\Omega = \omega/\omega_0$ .

## 3 经典情形

考虑  $k=0$  的经典情形. 利用哈密顿正则方程, 上述量子系统在经典极限条件下的运动方程可写为

$$\dot{\phi} = \rho, \quad (7a)$$

$$\dot{\rho} = -(1 + m \cos \Omega\tau) \sin \phi. \quad (7b)$$

方程(7)为无阻尼参数激励的非线性单摆方程, 在合适的参数区域会出现混沌行为. 为简单起见, 取参数  $\Omega = 1.56$ . 用数值积分方法直接求解方程(7), 并每隔一个周期记录所得结果. 这样便得到参数激励的单摆在  $(\rho, \phi)$  相平面的频闪取样轨迹, 即 Poincare 截面图, 如图 1 所示.

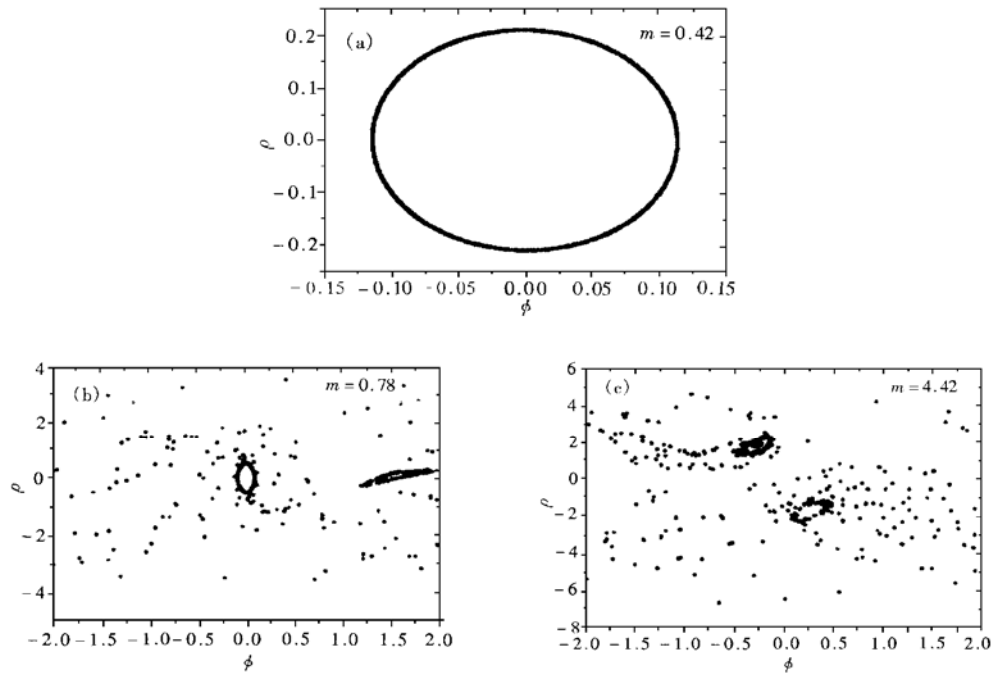


图 1 经典系统的 Poincare 截面图  $\Omega = 1.56$

当外场激励振幅  $m = 0.42$  时, 相平面上的轨迹出现规则运动的现象, 如图 1(a) 所示;  $m = 0.78$  时, 在分隔共振区的某些 KAM 环面附近出现很薄的随机层, 如图 1(b) 所示; 而当外场激励振幅增至  $m = 4.42$  时, 分隔共振区的所有 KAM 环面都遭到破坏, 系统从局部混沌过渡到全局混沌, 如图 1(c) 所示.

## 4 量子情形

现在讨论量子系统. 注意到哈密顿量中常数项和纯时间项仅对波函数的相位有贡献, 故可忽略. 这样参数激励的量子单摆的无量纲哈密顿量[见(6)式]可重写为

$$H = \frac{\rho^2}{2} - (1 + m \cos \Omega\tau) \cos \phi. \quad (8)$$

对应于哈密顿量(8)式的时间依赖的 Schrödinger 方程可写为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\phi, \tau)}{\partial \tau} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + (1 + m \cos \Omega\tau) \cos \phi \right] \psi(\phi, \tau). \quad (9)$$

为了研究参数激励的量子单摆的长期行为, 必须构造演化算符. 一个受周期力驱动的量子系统的长期行为可由时间无关的 Hermitian 算符  $G$  来确定. 这一 Hermitian 算符  $G$  与演化算符  $U$  的关系为

$$U(t, t_0) = P(t - t_0) \exp[-iG(t - t_0)/\hbar], \quad (10)$$

式中  $P(t)$  为周期为  $T$  的单位算符. 令

$$G \varphi^\alpha(\phi) = \omega_\alpha \varphi^\alpha(\phi), \quad (11)$$

式中  $\omega_\alpha$  为准能量,  $\varphi^\alpha(\phi)$  为准能量本征态. 一个周期的演化算符在准能量本征态下将是对角的, 即

$$U(t_0 + T, t_0) \varphi^\alpha(\phi) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \omega_\alpha T\right] \varphi^\alpha(\phi). \quad (12)$$

假定初始波函数为  $\phi_0$ ,  $\phi_0 = \sum_\alpha a_\alpha \varphi^\alpha$ ,  $a_\alpha$  为  $\phi_0$  在准能量本征态中的展开系数.  $N$  个周期后的波函数  $\phi_N$  将演化成

$$\begin{aligned} \phi(t_0 + NT) &= U(t_0 + NT, t_0) \phi(0) \\ &= \sum_\alpha a_\alpha \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \omega_\alpha NT\right] \varphi^\alpha(\phi), \end{aligned} \quad (13)$$

所以只要知道  $\omega_\alpha$ ,  $\varphi^\alpha(\phi)$ , 就可确定整个系统的行为. 但在大多数情况下,  $\omega_\alpha$ ,  $\varphi^\alpha(\phi)$  不可能解析地表示出来.

选取无量纲动量表象,  $|n\rangle = k|n\rangle$ , 量子系统的波函数可表示为

$$\phi(\phi, \tau) = \sum_n C_n(\tau) |n\rangle. \quad (14)$$

将此展开式代入时间依赖的 Schrödinger 方程(9), 可得到一组耦合微分方程

$$i\hbar \dot{C}_n(\tau) = \frac{n^2 k^2}{2} C_n(\tau) - \frac{1}{2} (1 + m \cos \Omega\tau) [C_{n+1}(\tau) + C_{n-1}(\tau)]. \quad (15)$$

通过数值积分方程(15)可构造演化算符  $U$ .

选取经典混沌的参数区域  $\Omega = 1.56$ ,  $m = 4.42$ , 假定波函数初始处于  $|0\rangle$  态, 等效普朗克参数  $k = 0.75$ . 二能级原子系统波函数的展开系数绝对值的平方  $|C_n(N)|^2$  (即系统未扰态布居数概率) 在不同叠代次数条件下随  $n$  分布的情形, 如图 2 所示. 从图 2 可看出在动量表象下波函数概率分布在足够的次数 (如 1000 次) 叠代后具有指数局域分布. 量子单摆的平均能量随叠代次数的变化如图 3 所示. 从图 3 可看出, 当  $k = 0.75$  时, 经过足够的时间之后能量不再随时间变化, 说明在量子情形下混沌扩散受到抑制.

为了探讨量子局域与经典混沌的联系, 选取量子单摆在经典极限下处于周期状态的参数, 例如取  $\Omega = 1.56$ ,  $m = 0.42$ , 此时二能级原子系统波函数的展开系数绝对值的平方  $|C_n(N)|^2$  在不同叠代次数条件下随  $n$  的分布如图 4 所示. 图 4 波函数在动量表象下并不呈现指数型局域分布. 图 5 给出系统的平均能量随叠代次数的变化. 从图 5 可看出系统的能量作较大的振荡变化.

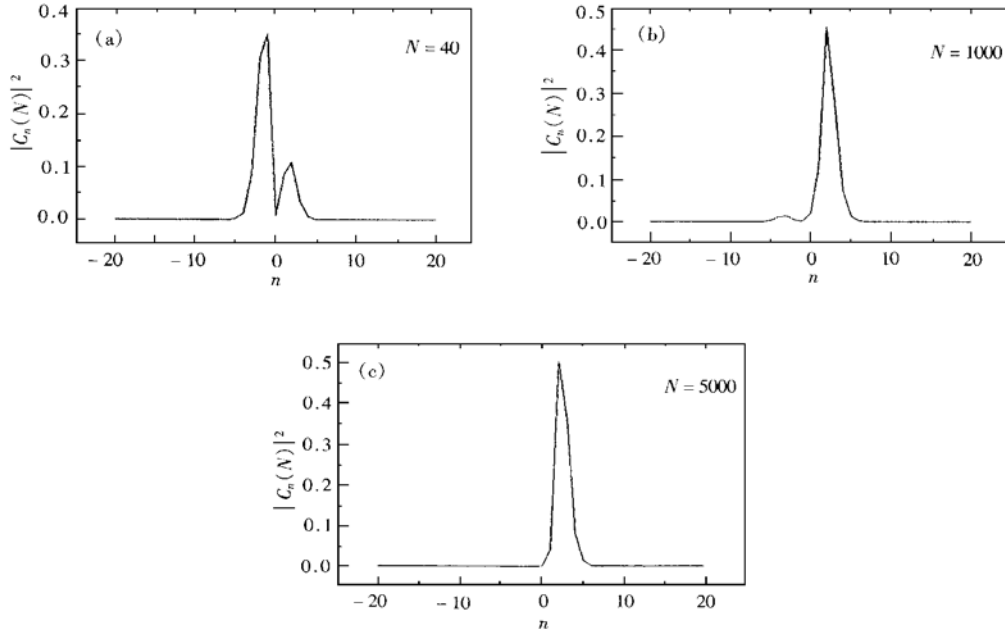


图 2  $\Omega = 1.56, m = 4.42$  二能级原子系统的概率分布

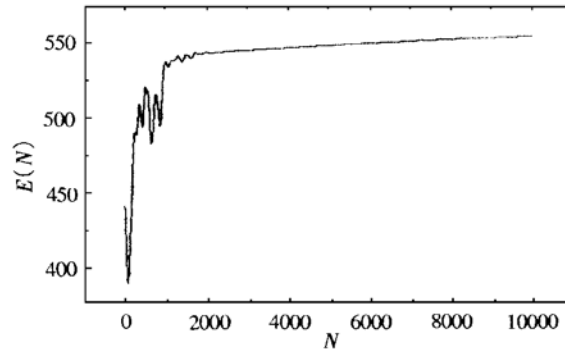


图 3 量子单摆的平均能量随叠代次数的变化  $k = 0.75, \Omega = 1.56, m = 4.42$

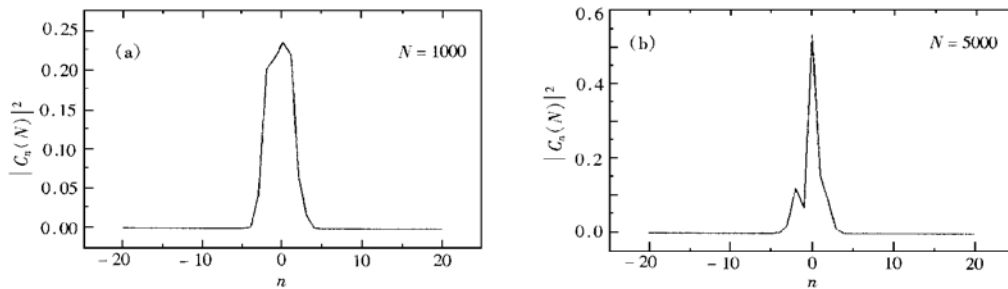


图 4  $\Omega = 1.56, m = 0.42$  二能级原子系统的概率分布

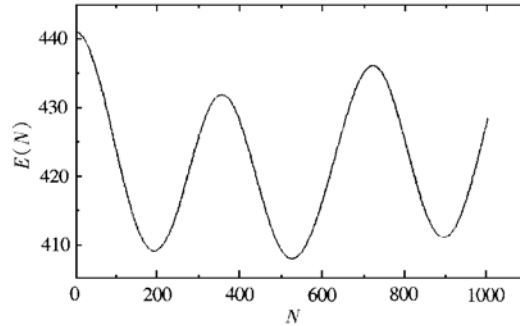


图5 系统的平均能量随叠代次数的变化  $k=0.75$ ,  $\Omega=1.56$ ,  $m=0.42$

## 5 讨论与结论

对于参数激励的非线性量子单摆, 其经典和量子动力学行为与周期受激的量子转子具有类似的性质. 前者系统的激励力为余弦函数参数激励, 后者系统的激励力为一系列周期  $T$  的  $\delta$  脉冲. 这两种量子系统都发生安德森局域.

本文的计算结果表明, 二能级原子与振幅调制的驻波光场相互作用扩散模型的经典极限是混沌的, 并且指出在经典极限混沌区间的参数范围这种量子系统具有安德森局域效应, 在经典极限周期区间(非混沌区)这种量子系统将不出现安德森局域效应. 上述模型是在忽略自发辐射效应下得到的. 对有自发辐射的量子系统的研究是一个非常有趣的课题, 待进一步探讨.

- [1] G. Casati *et al.*, *Lecture Notes in Physics*, **93**(1979), 334.
- [2] B. V. Chirikov *et al.*, *Physica*, **D33**(1988), 77.
- [3] J. G. Leopold, I. C. Percival, *Phys. Rev. Lett.*, **41**(1978), 944.
- [4] G. Casati *et al.*, *Phys. Rev.*, **A36**(1984), 386.
- [5] S. Chu, *Science*, **253**(1991), 861.
- [6] F. L. Moore *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **75**(1995), 4598.
- [7] R. Graham, M. Schlautrann, *Phys. Rev.*, **A45**(1992), R19.
- [8] S. A. Gardiner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **79**(1997), 4790.
- [9] J. K. Breslin *et al.*, *Phys. Rev.*, **A56**(1997), 3022.

## DYNAMICAL INVESTIGATION ON MOMENTUM SPREAD OF TWO-LEVEL ATOMS BY A MODULATED STANDING LIGHT WAVE

WANG ZHONG-JIE<sup>1)</sup> LU YI-QUN<sup>2)</sup> LU TONG-XING<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (*Department of Physics, Anhui Normal University, Wuhu 241000*)

<sup>2)</sup> (*Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031*)

(Received 24 November 1998)

### ABSTRACT

In this paper the model of two-level atomic momentum spread in amplitude-modulated standing light wave was investigated. This model shows chaotic behaviour in the classical limit. The system displays the characteristic of dynamical localization for the same parameters as those in the classical model corresponding to it.

**PACC:** 0545; 3280