

双模压缩真空场作用下 二能级原子的偶极压缩与相干俘获*

田永红¹⁾²⁾ 彭金生¹⁾

¹⁾ (华中师范大学物理系, 武汉 430070)

²⁾ (荆州师范学院物理系, 荆州 434100)

(1999 年 1 月 10 日收到)

运用全量子理论研究了双模压缩真空场与二能级原子双光子作用过程中原子的量子行为, 论证了原子发生相干俘获的条件, 讨论了压缩参数对原子偶极压缩的影响.

PACC: 4250

1 引 言

光场的压缩反映了光场的非经典性质, 在光通讯、弱信号检测和高精密测量方面具有重要的应用前景. 自 1976 年 Yuen 提出光场的压缩态^[1]概念以来, 对压缩光的产生一直是量子光学领域最活跃的课题^[2-4]. 近年来, 人们相继利用四波混频^[5]、二次谐波产生^[6]、双光子非谐振子^[7]和多光子 Jaynes-Cummings(J-C)模型^[8]等方法获得了压缩光, 这使得大量的理论研究更具有实际意义. 1981 年, Walls 等人^[9]将光场压缩的概念推广到原子系统, 给出了原子偶极压缩的概念. 那么初始处于压缩态的光场对原子的偶极压缩有什么影响呢? 从抑制原子偶极的量子噪声这一角度来看, 探讨这一问题是十分有意义的. 由于压缩真空态反映了压缩态的本质属性^[10], 因此本文将研究双模压缩真空态与一个二能级原子双光子作用过程中原子的量子行为. 本文给出了系统态矢演化的表达式, 讨论了原子粒子布居数的演化规律, 论证了处于适当叠加态的原子与双模压缩真空场作用会产生原子的相干俘获现象, 分析了压缩参量对原子偶极压缩的影响.

2 模型与态矢

描述具有相同宇称的二能级原子与双模腔场相互作用的系统, 在旋波近似下的哈密顿量为

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + \omega_0 s_z + \epsilon (a_1^\dagger a_2^\dagger s_- + a_1 a_2 s_+), \quad (1)$$

式中 a_i^\dagger 和 a_i 分别为频率为 ω_i ($i = 1, 2$) 的腔模的产生和湮没算符, s_z 和 s_\pm 为原子的赝自

* 国家自然科学基金(批准号: 69698019)资助的课题.

旋反转和升、降算符, ω_0 为原子的本征跃迁频率, ε 为双光子与原子耦合常数.

如果初始时刻原子处于相干叠加态:

$$|\psi_A(0)\rangle = \cos(\theta/2)|+\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\phi}|-\rangle \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \phi \leq \pi, \quad (2)$$

式中 $\cos(\theta/2)$ 和 $\sin(\theta/2)$ 分别为原子处于激发态和基态的概率幅, ϕ 为原子态位相. 而场处于双模压缩真空态^[11, 12]:

$$|\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n, n\rangle, \quad F_n = \frac{(\tanh r)^n}{\cosh r} e^{in\xi}, \quad (3)$$

式中 $\zeta = r \exp(i\xi)$ 为复压缩参数, r 为表征压缩程度的压缩因子, ξ 为压缩方向角. 于是, 原子-光场耦合系统初始时刻的态矢可写为

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n [\cos(\theta/2)|+, n, n\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\phi}|-, n, n\rangle]. \quad (4)$$

为简化计算结果, 假定系统满足双光子共振条件, 即 $\omega_{1+} = \omega_2 = \omega_0$. 在相互作用绘景中, 原子-光场耦合系统的态矢演化为

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(t)|+, n, n\rangle + B_n(t)|-, n, n\rangle], \quad (5a)$$

$$A_n(t) = F_n \cos(\theta/2) \cos[(n+1)\varepsilon t] - iF_{n+1} e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \sin[(n+1)\varepsilon t], \quad (5b)$$

$$B_n(t) = F_n e^{-i\phi} \sin(\theta/2) \cos(n\varepsilon t) - iF_{n-1} \cos(\theta/2) \sin(n\varepsilon t). \quad (5c)$$

3 原子布居的时间演化特性

由(5)式不难求出原子处于激发态的概率为

$$\begin{aligned} P_+(t) &= \sum_n |A_n(t)|^2 = \frac{1}{2} [\cos^2(\theta/2) + \tanh^2 r \sin^2(\theta/2)] \\ &+ \frac{1}{2} [\cos^2(\theta/2) - \tanh^2 r \sin^2(\theta/2)] \frac{\cosh^2 r \cos(2\varepsilon t) - \sinh^2 r}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\varepsilon t) + \cosh^4 r} \\ &- \frac{1}{2} \tanh r \sin\theta \sin(\phi - \xi) \frac{\cosh^2 r \sin(2\varepsilon t)}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\varepsilon t) + \cosh^4 r}, \quad (6) \end{aligned}$$

式中等号右边第三项为干涉项, 它依赖于原子-光场之间的相对位相. 不难发现, 对任意压缩参量 ζ , 如果下面的条件满足:

$$\tanh r = \cot(\theta/2), \quad \phi - \xi = k\pi \quad (k = 0, \pm 1), \quad (7)$$

则 $P_+(t) = \cos^2(\theta/2)$. 此时, 原子的吸收、自发辐射和受激辐射过程达到动态平衡, 粒子布居保持稳恒的状态, 即出现了相干俘获. 由于 $0 < \tanh r < 1$, 因此这种现象发生在 $\pi/2 < \theta < \pi$ 的原子态. 特别是在线压缩真空初态场 ($r \rightarrow \infty$) 作用下, θ_{trap} 接近 $\pi/2$, $P_+(t)$ 近似为 $1/2$, 这种情况与文献[13]讨论的相干态 JCM 和文献[14]讨论的热混态 JCM 中相干俘获现象一致. 原子的相干捕获现象, 可通过修饰规范变换来理解. 对于双模压缩真空场与二能级原子共振作用系统, 在以 $\{|-, n+1, n+1\rangle, |+, n, n\rangle\}$ 为基的修饰表象中, 系统哈密顿矩阵表示为

$$H = (n\omega_1 + n\omega_2 + \omega_0/2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon(n+1) \\ \varepsilon(n+1) & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

求解本征方程, 即可得到系统的修饰态及其能级为

$$\begin{aligned} E_{n+1}^{\pm} &= (n\omega_1 + n\omega_2 + \omega_0/2) \pm \varepsilon(n+1), \\ |u_{n+1}^{\pm}\rangle &= (\sqrt{2}/2)(|+, n, n\rangle \pm |- , n+1, n+1\rangle), \\ E_0 &= \omega_0/2, \quad |u_0\rangle = |- , 0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

而系统的初态(4)式可改写为

$$\begin{aligned} |\phi(0)\rangle &= F_0 \sin(\theta/2) e^{-i\phi} |- , 0, 0\rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} F_n [\cos(\theta/2) |+, n, n\rangle + \tanh r \sin(\theta/2) e^{i(\xi-\phi)} |- , n+1, n+1\rangle]. \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 当 $\tanh r = \cot(\theta/2)$, $\phi - \xi = 0$ 时

$$|\phi(0)\rangle = F_0 \sin(\theta/2) e^{-i\phi} |u_0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sqrt{2} \cos(\theta/2) |u_{n+1}^+\rangle. \quad (11)$$

随着时间的演化, 系统的态矢演变为

$$|\phi(t)\rangle = F_0 \sin(\theta/2) e^{-i\phi} |u_0\rangle e^{-i\omega_0 t/2} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sqrt{2} \cos(\theta/2) |u_{n+1}^+\rangle e^{-i(n\omega_1 + n\omega_2 + \omega_0/2)t}. \quad (12)$$

(12)式表明, 满足条件(7)式的系统, 其态矢为系统的修饰态按光场概率幅的加权叠加态. 由于修饰态是系统的定态, 因此在时间演化过程中, 原子的粒子数布居将保持其初始值, 光场的相干性也不会发生变化.

原子的粒子数布居差的演化为

$$\begin{aligned} W(t) = \langle s_z \rangle &= -\frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) (1 - \tanh^2 r) \\ &+ \frac{1}{2} [\cos^2(\theta/2) - \tanh^2 r \sin^2(\theta/2)] \frac{\cosh^2 r \cos(2\varepsilon) - \sinh^2 r}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\varepsilon) + \cosh^4 r} \\ &- \frac{1}{2} \tanh r \sin\theta \sin(\phi - \xi) \frac{\cosh^2 r \sin(2\varepsilon)}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\varepsilon) + \cosh^4 r}. \end{aligned} \quad (13)$$

可见, $W(t)$ 的时间演化明显依赖于压缩参数. 若 $r = 0$, 则

$$W(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2(\theta/2) [1 + \cos(2\varepsilon)]. \quad (14)$$

(14)式表明, 在双模真空场作用下, $W(t)$ 以周期 π/ε 作拉比振荡, 其振幅和振荡曲线的位置由原子初态决定, 见图 1. 而 $r \neq 0$ 时, $W(t)$ 的时间演化不仅与原子初态参数 θ 有关, 还与原子-光场的相对位相 $(\phi - \xi)$ 及压缩因子 (r) 有关. 对于不同的原子初态, 下面讨论压缩因子和原子-光场的相对位相对原子布居的影响.

(1) 当原子初始处于激发态, 即 $\theta = 0$ 时

$$W(t) = \frac{1}{2} \frac{\cosh^2 r \cos(2\varepsilon) - \sinh^2 r}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\varepsilon) + \cosh^4 r}. \quad (15)$$

对(15)式作数值计算如图 2 所示. 将图 2 与图 1(a) 进行比较, 压缩因子的影响是明显的. 首先, 随着 r 增大, 拉比振荡曲线向上移动, 其最小值由 $-1/2$ 变为零, 这说明压缩真空初态场对激发态的能量衰变具有抑制作用. 其次, 当 r 较大时, 原子布居呈现周期性崩塌-

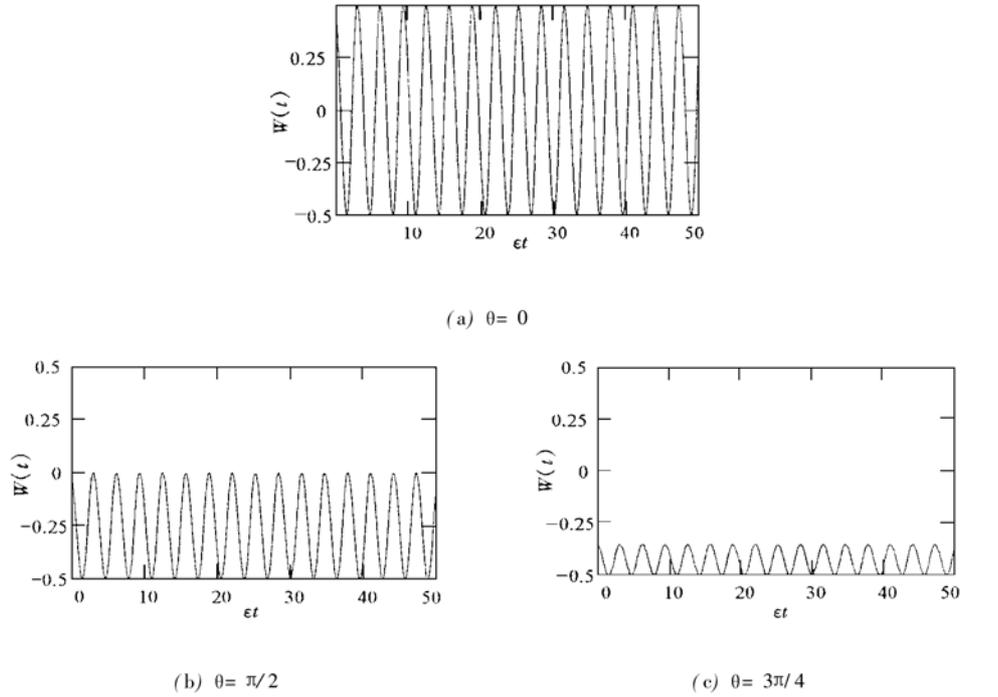


图1 $r = 0$, $W(t)$ 的时间演化曲线

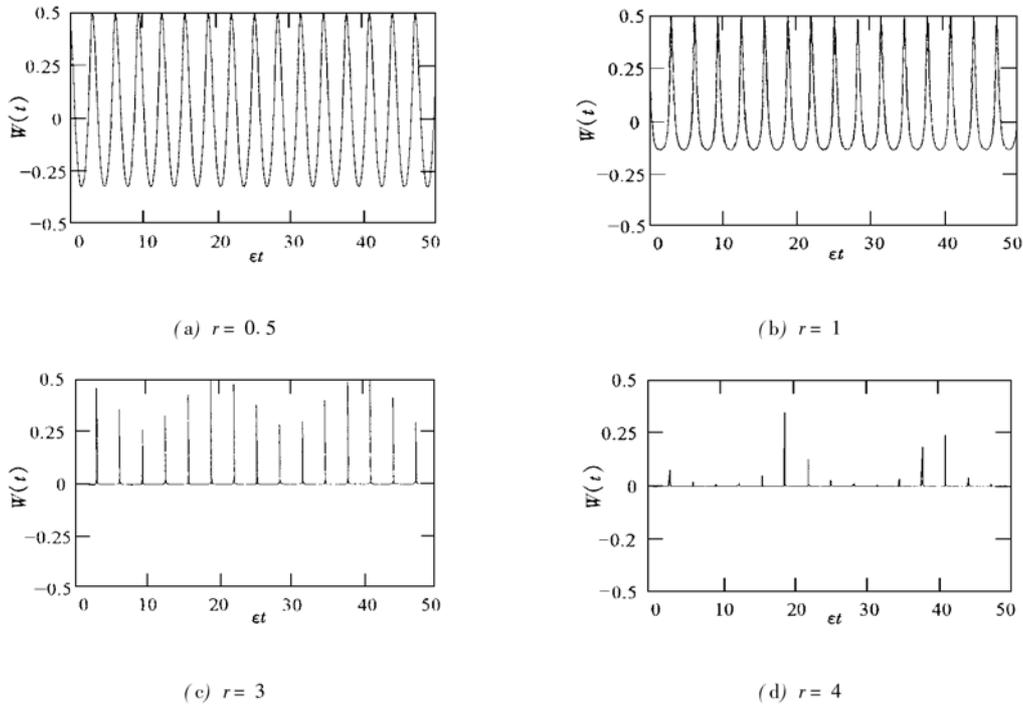


图2 $\theta = 0$, $W(t)$ 的时间演化曲线

回复现象, 且随着 r 增大, 振幅减小, 并被周期性“调制”, 当 $r \gg 1$ 时, 除时间点 $\epsilon t = k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 外, $W(t) = 0$. 另外, 拉比振荡频率不受压缩参数的影响.

(2) 当原子初始处于基态, 即 $\theta = \pi$ 时

$$W(t) = -\frac{1}{2}(1 - \tanh^2 r) - \frac{1}{2}\tanh^2 r \frac{\cosh^2 r \cos(2\epsilon t) - \sinh^2 r}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\epsilon t) + \cosh^4 r}. \quad (16)$$

(16) 式的数值模拟结果如图 3 所示. 压缩因子的影响表现为两个方面. 其一, $r \neq 0$ 时, 初始处于基态的原子也展现出拉比振荡, 且随着 r 增大, 拉比振荡曲线向上移动, 但最大值不大于零, 拉比振荡的振幅先增大后减小. 其二, 当 r 较大时, 原子布居具有与激发态类似的崩塌-回复现象.

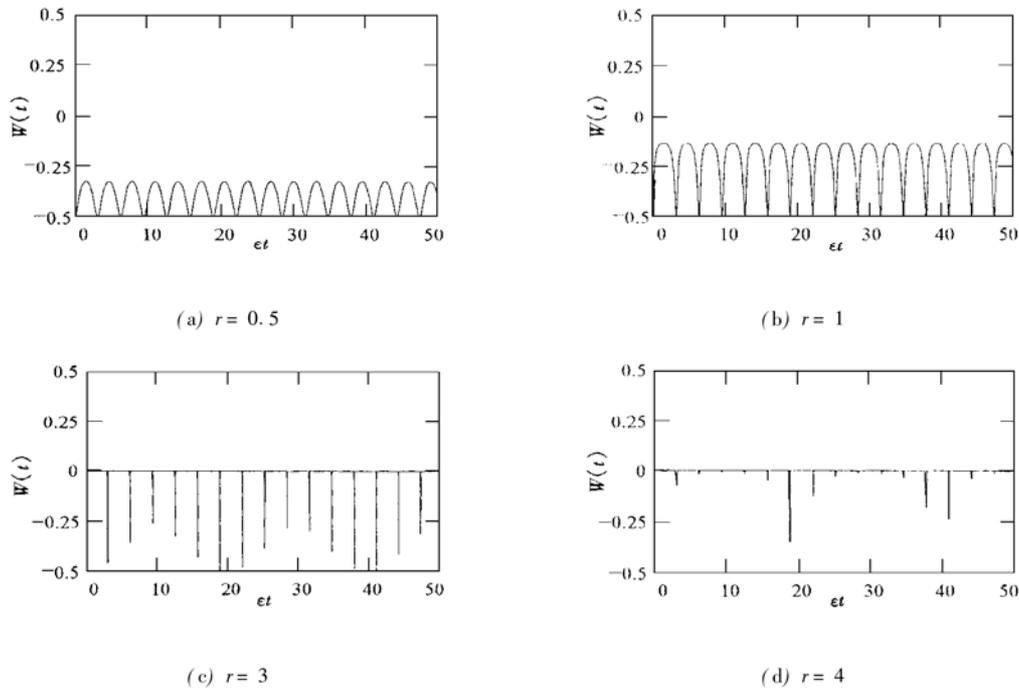


图 3 $\theta = \pi$, $W(t)$ 的时间演化曲线

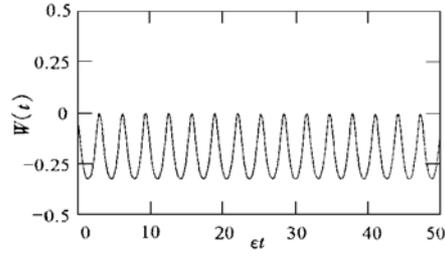
(3) 当原子初始处于等概率叠加态, 即 $\theta = \pi/2$ 时, 如(13)式所示, $W(t)$ 的演化明显依赖于原子-光场的相对位相, 见图 4 ($\phi - \xi = 0$) 和图 5 ($\phi - \xi = \pi/2$). 与图 1(b) 比较, 图 4 中随着 r 增大, 原子拉比振荡的振幅迅速衰减, 并很快趋于零, 振荡曲线向上移动. 而图 5 中随着 r 增大, 拉比振荡曲线也向上移动, 但由于干涉项的影响, 当 r 增大时, $W(t)$ 演变为上、下对称分布, 并展现出规则的周期崩塌-回复现象, 当 r 较大时, 拉比振荡的振幅被周期性“调制”, 并逐渐减小, 最后趋于零.

(4) 原子初始处于相干俘获态, 即 $\theta = \theta_{\text{trap}}$, $\phi - \xi = k\pi$ ($k = 0, \pm 1$) 时

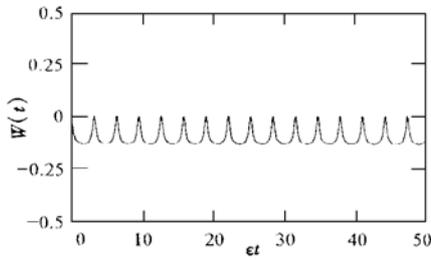
$$W(t) = -\frac{1 - \tanh^2 r}{2(1 + \tanh^2 r)} = -\frac{1}{2(1 + 2\bar{n})}, \quad (17)$$

式中 $\bar{n} = \sinh^2 r$ 为压缩真空初态场某一模的平均光子数. 显然, $-1/2 < W(t) < 0$, 并保

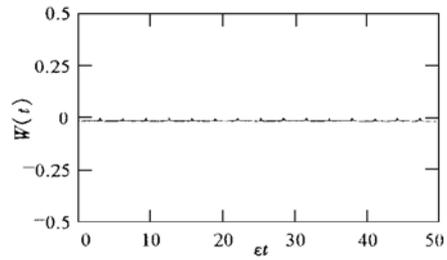
持为常数.



(a) $r = 0.5$

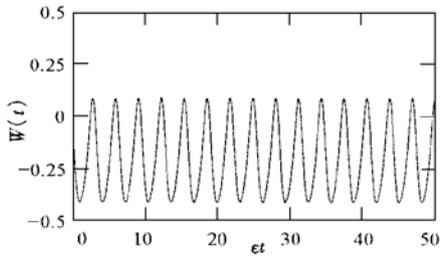


(b) $r = 1$

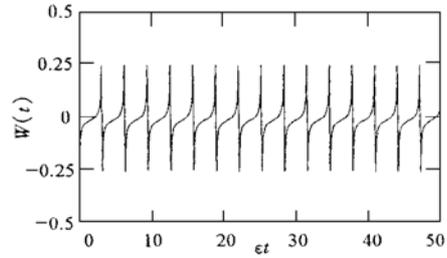


(c) $r = 2$

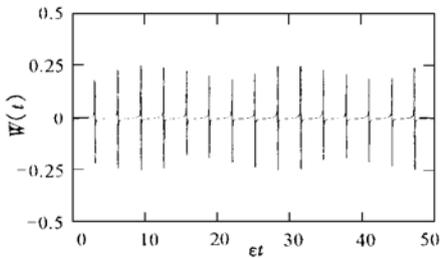
图 4 $\theta = \pi/2, \phi = \xi = 0, W(t)$ 的时间演化曲线



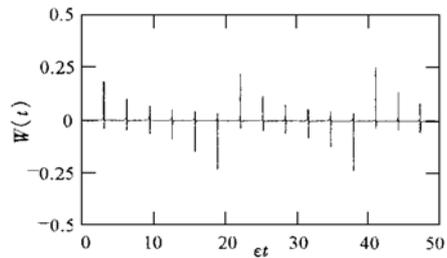
(a) $r = 0.5$



(b) $r = 2$



(c) $r = 3$



(d) $r = 4$

图 5 $\theta = \pi/2, \phi = \xi = \pi/2, W(t)$ 的时间演化曲线

4 原子偶极压缩的时间演化特征

为了反映原子偶极压缩的特征, 并与实际测量对应, 定义两个缓变的正交厄密算符:

$$S_1 = \frac{1}{2}(s_+ e^{-i\omega_0 t} + s_- e^{i\omega_0 t}), \quad S_2 = \frac{1}{2i}(s_+ e^{-i\omega_0 t} - s_- e^{i\omega_0 t}). \quad (18)$$

实际上, S_1 和 S_2 分别对应原子偶极矩的色散和吸收. 若系统存在某个态, 使得

$$(\Delta S_i)^2 < \frac{1}{2} |\langle s_z \rangle| \quad \text{或} \quad Q_i = (\Delta S_i)^2 - \frac{1}{2} |\langle s_z \rangle| < 0 \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

那么就称原子偶极矩 S_i 分量的涨落被压缩. 由(5)和(18)式, 不难求得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \langle S_1 \rangle \\ \langle S_2 \rangle \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \sin \theta \cos(\vartheta) + \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} \frac{\sin \theta \cos(\vartheta)}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\vartheta) + \cosh^4 r} \\ &+ \begin{pmatrix} \sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix} 2 \tanh r \sin(\vartheta) - \begin{pmatrix} \sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix} 2 \tanh r \cos^2(\theta/2) \frac{\cosh^2 r \sin(3\vartheta) - \sinh^2 r \sin(\vartheta)}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\vartheta) + \cosh^4 r} \\ &+ \begin{pmatrix} \sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix} 2 \tanh r \sin^2(\theta/2) \frac{(\cosh^2 r + \sinh^2 r) \sin(\vartheta)}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\vartheta) + \cosh^4 r} \\ &+ \begin{pmatrix} \cos(\phi - 2\xi) \\ \sin(\phi - 2\xi) \end{pmatrix} \tanh^2 r \sin \theta \cos(\vartheta) - \begin{pmatrix} \cos(\phi - 2\xi) \\ \sin(\phi - 2\xi) \end{pmatrix} \\ &\times \tanh^2 r \sin \theta \frac{\cosh^2 r \cos(3\vartheta) - \sinh^2 r \cos(\vartheta)}{\sinh^4 r - 2\sinh^2 r \cosh^2 r \cos(2\vartheta) + \cosh^4 r}. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\langle S_1^2 \rangle = \langle S_2^2 \rangle = 1/4. \quad (21)$$

将(13), (20)和(21)式代入(19)式, 并注意到 $(\Delta S_i)^2 = \langle S_i^2 \rangle - \langle S_i \rangle^2$, 即可得到描述原子偶极矩 S_i 分量的涨落函数 Q_i . 显然, Q_i 不仅与原子初态 (θ, ϕ) 有关, 而且还与压缩参数 (r, ξ) 有关. 当 $r = 0$ 时

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} - \sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2) \cos^2(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos^2 \phi \\ \sin^2 \phi \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left| \cos^2(\theta/2) \cos^2(\vartheta) - \frac{1}{2} \right|. \quad (22)$$

这正是文献[15]的结论. 不难看出, $\phi = 0$ 或 π , $\theta = \pi/3$ 或 $2\pi/3$ 时, Q_1 在时间点 $t_m = k\pi/\varepsilon$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 有最小值 $-1/16$, 此时原子偶极矩 S_1 分量的量子噪声被压缩到最小, 见图 6(a). 而 $r \neq 0$ 时, Q_1 的演化较复杂, 取 $\phi = 0$, $\theta = \pi/3$, 数值模拟见图 6(b)–(h). 图 6(b)–(d) 示出 $\phi = \xi = 0$ 情形下, Q_1 的时间演化. 随着 r 增大, 原子每次处于偶极压缩状态的时间变短, r 较大时, 压缩程度变浅, 而当 $r > 4$ 时, 原子的偶极压缩效应消失; 图 6(e)–(h) 示出 $\phi = \xi = -\pi/2$ 的情形. 当 $r < 1$ 时, 由于干涉项的影响, 压缩次数增加一倍. 且随着 r 增大, 压缩程度加深, 当 $r > 1$ 时, 随着 r 增大, 压缩时间范围变窄, 当 r 较大时, 压缩程度变浅, 压缩次数减少, 而当 $r > 4$ 时, 压缩效应消失.

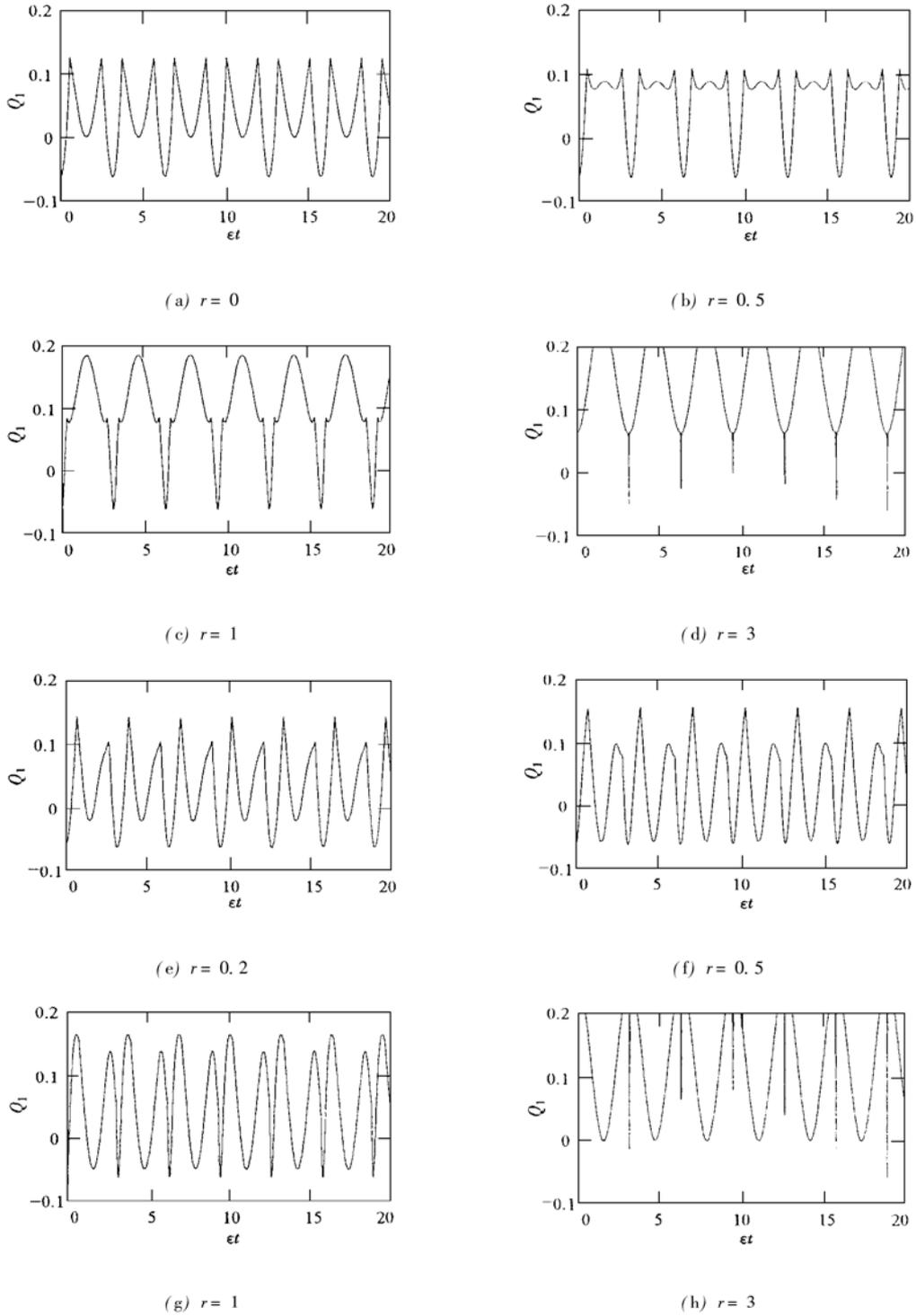


图6 $\phi = 0, \theta = \pi/3, Q_1$ 的时间演化曲线 (b)–(d): $\phi = \xi = 0$, (e)–(h): $\phi = \xi = -\pi/2$

5 结 论

运用全量子理论研究了与双模压缩真空场双光子作用的二能级原子的量子行为. 结果表明: 处于一定初态的二能级原子在双模压缩真空场作用下能产生相干俘获现象. 原子的拉比振荡周期仅由原子-光场的耦合常数决定, 但其振幅和振荡曲线的位置除与原子初态有关外, 还与压缩因子及原子-光场的相对位相密切相关, 当 r 增大时, 拉比振荡曲线上移, 并展现出周期性的崩塌-回复现象, 当 r 很大时, 原子的拉比振荡消失. 原子偶极压缩与原子-光场相对相位有关, 当 $\phi - \xi = 0$ 时, 随着 r 增大, 原子偶极压缩呈现的时间变短, 压缩程度变浅, 最后消失; 而当 $\phi - \xi = -\pi/2$ 时, 由于干涉项的影响, 随着 r 增大, 原子偶极压缩呈现的时间先变长后变短, 压缩程度先变深后变浅, 压缩次数先增加后减少, 呈现出非线性效应.

- [1] H. P. Yuen, *Phys. Rev.*, **A13**(1976), 2226.
- [2] J. A. Bergou, M. Hillery, D. Q. Yu, *Phys. Rev.*, **A43**(1991), 515.
- [3] J. S. Peng, G. X. Li, *Phys. Rev.*, **A47**(1993), 3167.
- [4] 郭光灿, 柴金华. 物理学报, **40**(1991), 912 [Guo Guang-can, Chai Jin-hua, *Acta Physica Sinica*, **40**(1991), 912(in Chinese)].
- [5] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2409.
- [6] M. Hillery, *Opt. Commun.*, **62**(1987), 135.
- [7] C. C. Gery, E. R. Vrscaj, *Phys. Rev.*, **A37**(1988), 1779.
- [8] X. Yang, X. Zheng, *Phys. Lett.*, **A138**(1989), 409.
- [9] D. F. Walls, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 709.
- [10] 郭光灿, 量子光学(高等教育出版社, 北京, 1990), 第 546—548 页 [Guo Guang-can, *Quantum Optics*(Higher Education Press, Beijing, 1990), pp. 546—548(in Chinese)].
- [11] 彭金生, 李高翔, 近代量子光学导论(科学出版社, 北京, 1996), 第 185—193 页 [Peng Jin-sheng, Li Gao-xiang, *An Introduction for Modern Quantum Optics*(Science Press, Beijing, 1996), pp. 185—193(in Chinese)].
- [12] S. M. Barnett, D. T. Pegg, *Phys. Rev.*, **A42**(1990), 6713.
- [13] K. Zaheer, M. S. Zubairy, *Phys. Rev.*, **A39**(1989), 2000.
- [14] M. Kozirowski, J. F. Poyatos, L. L. Sanchez-Soto, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 2450.
- [15] 李高翔, 彭金生, 物理学报, **44**(1995), 1670 [Li Gao-xiang, Peng Jin-sheng, *Acta Physica Sinica*, **44**(1995), 1670 (in Chinese)].

**ATOMIC DIPOLE SQUEEZING AND COHERENT POPULATION
TRAPPING IN THE SYSTEM OF TWO-MODE SQUEEZED
VACUUM FIELD INTERACTING WITH A
TWO-LEVEL ATOM***

TIAN YONG-HONG¹⁾²⁾ PENG JIN-SHENG¹⁾

¹⁾ (*Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

²⁾ (*Department of Physics, Jingzhou Teachers College, Jingzhou 434100*)

(Received 10 January 1999)

ABSTRACT

The atomic quantum behaviors in the system of two-mode squeezed vacuum field interacting with a two-level atom via two-photon process are studied by means of quantum theory. The condition for the occurrence of coherent trapping and the influence of the squeezing parameters on the atomic dipole squeezing are discussed.

PACC: 4250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69698019).