

# 自仿射 Sierpinski 地毯中的粘滞指进\*

田巨平<sup>1)2)</sup> 姚凯伦<sup>1)3)</sup>

<sup>1)</sup>(华中理工大学物理系, 武汉 430074)

<sup>2)</sup>(江汉石油学院基础科学系, 荆州 434102)

<sup>3)</sup>(中国科学院国际材料物理中心, 沈阳 110015; 中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京 100080)

(1998 年 5 月 28 日收到; 1998 年 9 月 7 日收到修改稿)

构造了自仿射 Sierpinski 地毯. 在自仿射 Sierpinski 地毯中, 认为喉管半径服从截断瑞利分布, 采用逐次超松弛技术, 模拟了自仿射 Sierpinski 地毯中的粘滞指进. 计算了粘滞指进分维, 结果表明, 当粘滞比  $M \rightarrow \infty$  时, 指进图样与在自仿射 Sierpinski 地毯中 DLA 模拟的结果类似; 当  $M=1$  时, 驱替流体在长标度范围内具有紧凑的结构, 且具有稳定的位移.

PACC: 0540

## 1 引 言

粘滞指进不仅使诸层中大量的石油无法采出, 而且使采出的石油含有一定量的水, 从而降低了采收率, 造成严重的经济损失. 因此, 关于粘滞指进现象的研究具有重要意义. 粘滞指进源于多孔介质中二相流体驱替过程中的动力学不稳定性, 尽管描述该现象的基本方程为关于压力场的拉普拉斯方程, 但其边界条件异常复杂, 使得用传统的方法碰到了极大的困难. 研究表明, 许多砂岩具有分形结构<sup>[1]</sup>, 而且驱替前沿也是一种分形结构, 因此, 应用分形几何研究粘滞指进具有新的生命力<sup>[2]</sup>. 至今为止, 模拟粘滞指进图样的模型主要有<sup>[3]</sup>DLA, DBM, 梯度支配生长, 二行走模型, 随机模型和决定论模型以及修改的 DLA<sup>[4]</sup>和分层聚集模型<sup>[5,6]</sup>等等. 在决定论模型中, 许多作者已经使用了超松弛技术<sup>[3]</sup>. 以往所采用的几何模型一般是正方网格、六角形网格、立方网格等等. 但沉积岩几乎很少是均匀的, 而且研究表明, 一些沉积岩的孔隙空间至少在一定的长度标度范围具有分形结构<sup>[1]</sup>. 研究分形网格中的粘滞指进具有非常重要意义. 本文提出了一种简单的方法构造自仿射谢尔平斯基(Sierpinski)地毯, 在自仿射 Sierpinski 地毯中, 视格点为孔隙, 键为喉咙, 并认为喉咙半径是随机分布的, 采用超松弛技术, 模拟了自仿射 Sierpinski 地毯中粘滞指进. 结果表明, 其指进图像与正方网格中的指进图像有一些不同的性质.

## 2 随机 Sierpinski 地毯的构造

自仿射 Sierpinski 地毯可以采用映射膨胀法获得: 对于一个  $n$  级自仿射 Sierpinski 地

\* 国家自然科学基金(批准号:19744002)和国家高性能计算基金(批准号:984050)资助的课题.

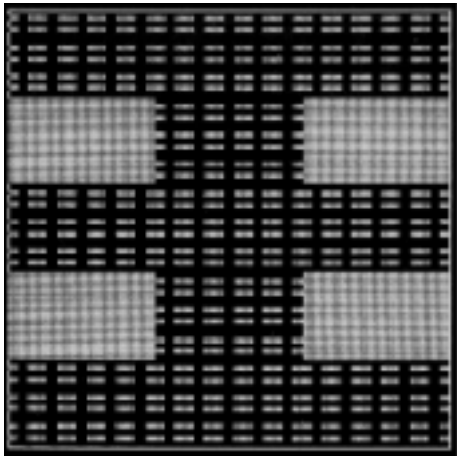


图 1 二级自仿射 Sierpinski 地毯

毯, 共有格点  $15^n \times 15^n$  个. 在第一级地毯中, 除座  $S^1(I, J) = 0 (i = 1, 2)$  外, 其中  $I_1 = 1, 2, \dots, 5, I_2 = 11, 12, \dots, 15, J_1 = 4, 5, 6, J_2 = 10, 11, 12$ , 其余 165 个座  $S^1(I, J) = 1, (I, J) = 1, 2, \dots, 15$ . 在第  $k + 1$  级地毯中, 如果  $S^k(I, J) = 0$ , 则  $S^{k+1}(II, JJ) = 0$ , 其中  $I, J = 1, 2, \dots, 15^k, II = 15(I - 1) + 1, 15(I - 1) + 2, \dots, 15I, JJ = 15(J - 1) + 1, 15(J - 1) + 2, \dots, 15J$ ; 如果  $S^k(I, J) = 1$ , 则除座  $S^{k+1}(II_i, JJ_i) = 0 (i = 1, 2)$  外, 其中  $II_1 = 15(I - 1) + 1, 15(I - 1) + 2, \dots, 15(I - 1) + 5, II_2 = 15I - 4, 15I - 3, \dots, 15I; JJ_1 = 15(J - 1) + 4, 15(J - 1) + 5, 15(J - 1) + 6, JJ_2 = 15(J - 1) + 10, 15(J - 1) + 11, 15(J - 1) + 12$ , 其余座  $S^{k+1}(II, JJ) =$

$1$ , 其中  $II = 15(I - 1) + 1, 15(I - 1) + 2, \dots, 15I, JJ = 15(J - 1) + 1, 15(J - 1) + 2, \dots, 15J$ . 因此, 我们能够构造任意级自仿射 Sierpinski 地毯. 图 1 是一个二级自仿射 Sierpinski 地毯, 阴影部分为被挖去的座 ( $S(i, j) = 0$ ), 其分维值<sup>[7]</sup>  $d_s = \frac{\log p_1}{\log p} + \log\left(\frac{1}{p_1} \sum_{j=1}^p N_j\right) \frac{1}{\log q}$ , 式中, 符号的意义见文献[7],  $p_1 = 3, p = 3, q = 5, N_1 = N_3 = 3, N_2 = 5$ , 故  $d_s = 1.807$ .

### 3 模拟方法

视多孔介质为自仿射 Sierpinski 地毯, 其被挖去的部分为不连通的岩石, 格点代表孔隙, 且喉管的半径服从截断瑞利(Rayleigh)分布, 即<sup>[8]</sup>

$$f(r) = r \exp(-r^2/2r_m^2) / r_m^2 [\exp(-a^2/2r_m^2) - \exp(-b^2/2r_m^2)], \quad (1)$$

式中  $r$  的取值范围为  $a \leq r \leq b$ , 在其他区间  $f(r) = 0$ , 而  $a, b$  和  $r_m$  分别是孔隙介质中喉管的最小、最大和最可几半径. 在(1)式中, 取  $a = 5 \mu\text{m}, b = 20 \mu\text{m}$ <sup>[6,9]</sup>.

设注入点(网格中心)的压力  $p = 1$ , 地毯周界的  $p = 0$ , 由逐次超松弛算法可解出压力场<sup>[3]</sup>

$$p_j = \omega \sum_j g_{ij} p_j / \sum_j g_{ij} + (1 - \omega) p_j$$

式中  $g_{ij} = \pi r_{ij}^4 / 8 [\eta_1 x_{ij} + \eta_2 (L - x_{ij})]$  为导流率, 这里,  $r_{ij}$  和  $L$  分别是格点  $i, j$  间键的半径和键长,  $x_{ij}$  为驱替流体在键中的长度,  $\eta_1$  和  $\eta_2$  分别为驱替流体和被驱替流体的粘滞系数, 而  $\omega (= 1.66)$  为超松弛参数. 确定了压力场分布之后, 由泊肃叶(Poiseuille)定律所确定的流量  $Q_{ij}$  可得驱替流体的前锋每步移动位移  $\Delta x_{ij} = (Q_{ij} / \pi r_{ij}^2) \Delta t$ , 由此可以得到计算机模拟多孔介质两相流驱替过程的逐次超松弛算法步骤:

求解自仿射 Sierpinski 地毯中的压力场; 判断键的状态, 若格点  $i, j$  皆未被挖去, 则键

导通, 此时计算流量  $Q_{ij} = g_{ij}(p_i - p_j)$ , 若格点  $i, j$  任一被挖去, 则键封闭, 此时  $Q_{ij} = 0$ ; 根据流量  $Q_{ij}$  计算时间步长  $\Delta t$ , 使每个  $\Delta t$  中有且只有一个键完全被驱替流体 1 占据; 按相应的时间步长  $\Delta t$  移动两相流的界面并引入新的界面; 按新的界面修正各键中  $x_{ij}$  及导流率  $g_{ij}$  的值; 重复以上步骤直到驱替流体 1 到达网格边界, 模拟结束.

#### 4 模拟结果与讨论

图 2(a) 和 (b) 分别为当粘滞比  $M(= \eta_2 / \eta_1) \rightarrow \infty$  和  $M=1$  且  $r_m = b$  时, 在自仿射 Sierpinski 地毯中模拟的结果. 图 2(a) 的指进图样表明, 当  $M \rightarrow \infty$  时, 指进图样具有开放的分枝结构, 且与在自仿射 Sierpinski 地毯中 DLA 模拟的结果类似; 图 2(b) 的指进图样表明, 当  $M=1$  时, 驱替流体在长标度范围内具有紧凑的结构, 这意味着在长标度范围内, 集团的内部被完全驱扫, 即驱替流体是稳定的, 且驱扫效率  $E^{[10]} (\sim L^{D-d_s})$  为 100%, 此时, 集团的分维为  $D = d_s$ . 通过选取不同的粘滞比  $M$  进行模拟, 我们发现, 驱扫效率和指进的分维随着  $M$  的增加而减少, 当  $M \rightarrow \infty$  时, 指进的分维(当  $r_m = b$  时):  $D = D_{DLA} = 1.547$ . 这与在正方形网格中的模拟有类似的结果. 图 3(a) 和 (b) 分别为当最可几半径  $r_m =$

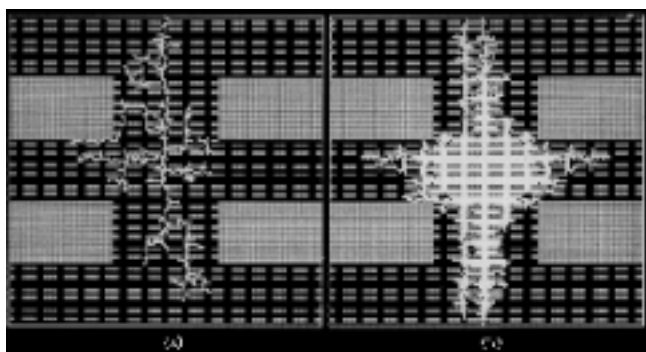


图 2 自仿射 Sierpinski 地毯中的粘滞指进图样( $r_m = b$ ) (a)  $M \rightarrow \infty$ , (b)  $M=1$

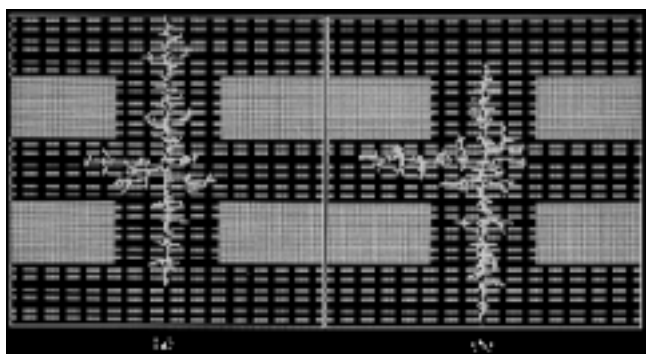


图 3 自仿射 Sierpinski 地毯中的粘滞指进图样( $M=10$ ) (a)  $r_m = a$ , (b)  $r_m = b$

$a$  和  $r_m = b$  且  $M=10$  时, 在自仿射 Sierpinski 地毯中模拟的结果. 图 3 表明, 对于具有相同粘滞比  $M$  的指进图样, 较大的最可几半径  $r_m$  将具有较大的驱扫效率和较大的分维

值.而且,在集团的内部不具有紧凑结构,这意味着在短标度范围内,驱替流体仅仅是部分驱扫.

图 4 为在三种最可几半径下,分维  $D$  作为粘滞比  $M$  的函数关系.图 4 表明,指进的分维随驱扫效率的减少和最可几半径的增加而增加.这意味着驱扫效率很强地依赖于孔

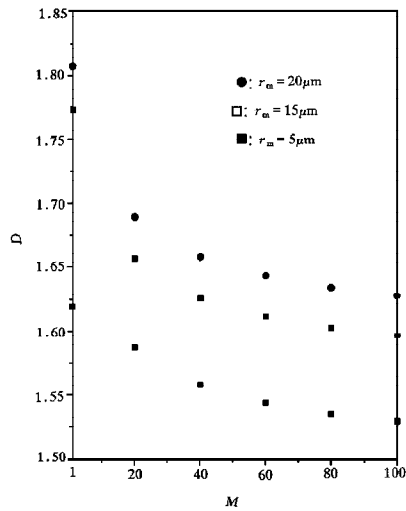


图 4 粘滞指进的分维  $D$  作为粘滞比  $M$  的函数

隙介质的几何结构和二流体的粘滞比,而且分维可以作为石油工业中评价驱扫效率的重要参数.当前的模拟方法能够用来解决具有自仿相似结构或者可以化为自仿相似结构的复杂多孔介质中的粘滞指进问题.

- [1] P. Z. Wong, *Physics Today*, **41**(1986), 24.
- [2] Tian Ju-ping *et al.*, *Exploration of Nature*, **15**(1996), 45(in Chinese)
- [3] M. Sahimi, *Rev. Mod. Phys.*, **65**(1993), 1393.
- [4] Zhang Jian-hua *et al.*, *Acta Oil. Sinica*, **18**(1997), 86(in Chinese).
- [5] J. P. Tian, B. M. Yu and K. L. Yao, *Commun. Theor. Phys.*, **26**(1996), 283.
- [6] J. P. Tian, B. M. Yu and K. L. Yao, *Chin. Phys. Lett.*, **15**(1995), 739.
- [7] K. Falconer, *Fractal Geometry-Mathematical Foundation and Applications*. (New York: Wiley, 1990), p. 176.
- [8] J. P. Tian and K. L. Yao, *Chin. Phys. Lett.*, **15**(1998), 507.
- [9] K. K. Mohanty, H. T. Daviis and L. E. Scriven, *SPE Reservoir Engineering*, **2**(1987), 2113.
- [10] R. Siddiqui and M. Sahimi, *Chem. Eng. Sci.*, **45**(1990), 163.

## VISCOUS FINGERING IN SELF-AFFINE SIERPINSKI CARPET\*

TIAN JU-PING<sup>1)2)</sup> YAO KAI-LUN<sup>1)3)</sup>

<sup>1)</sup>( Basic Science Department of Jiangnan Petroleum Institute, Jingzhou 434102, China)

<sup>2)</sup>( Physics Department of Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

<sup>3)</sup>( China Center of Advanced Science and Technology( World Laboratory), P. O. Box 8730, Beijing 100080;  
China and International Center for Material Physics, Chinese Academy of Science, Shenyang 110015)

(Received 28 May 1998; revised manuscript received 7 September 1998)

### ABSTRACT

In this paper, the self-affine Sierpinski carpet is constructed. The viscous fingering (VF) in self-affine Sierpinski carpet, based on the assumption that bond radii are truncated Rayleigh distribution, is simulated by means of successive over-relaxation techniques. The fractal dimension of VF is calculated. The results show that the VF pattern of self-affine Sierpinski carpet in the limit viscosity ratio  $M \rightarrow \infty$  is found to be similar to the DLA pattern. When  $M=1$ , the interior of the cluster of the displacing fluid is compact and the displacement process is stable for long length scales.

PACC: 0540

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19744002) and by the National high performance computing Foundation of China (Grant No. 984050).