第 49 卷 第 10 期 2000 年 10 月
1000-3290/2000/49(10)/1919-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 49, No. 10, October, 2000
©2000 Chin. Phys. Soc.

一类混沌系统观测器*

杨晓松

(重庆邮电学院非线性系统研究所,重庆 400065)

(2000 年 2 月 2 日收到;2000 年 3 月 5 日收到修改稿)

对 Rössler 系统、Chua 系统等一类混沌系统讨论了混沌观测器的设计问题,对该类系统利用一个非线性标量信号实施反馈就可以使得观测器的状态变量与被观测系统的状态变量达到同步.

关键词:混沌系统,状态观测器,同步

PACC:0545

1 引 言

混沌系统由于其运动状态对初始值的敏感依赖性,以及在状态空间某区域上的一定程度的遍历性,而显示出其在诸多科学技术领域中的广泛潜在应用,从而成为近期非线性科学中广为研究的领域之一,特别是混沌控制与同步更是当前热门研究课题之一[1—6].

众所周知,欲有效地对一个混沌系统进行控制,一个主要方法就是状态反馈控制,而实施状态反馈控制的先决条件就是人们必须对该系统的状态变量进行物理测量.然而,一个系统的状态变量并非都易于用物理方法测量出来,甚至有些状态变量根本就无法测量到,所以这是状态反馈控制必须解决的问题.状态观测器便是解决这个问题的有效方法之一.本文讨论的混沌观测器即是针对混沌系统而言的状态观测器.

2 基本概念

所谓状态观测器就是一个在物理上可以实现的动力系统,它在被观测系统的输入输出信号(这是可以物理测量到的)的驱动下,产生一组输出,使得该输出能够很好地逼近于被观测系统的状态变量输出.下面就对混沌系统具体地加以讨论,至于线性系统的状态观测器的讨论可以参考自动控制教科书如文献[7].

考虑一个混沌时间连续系统

$$\dot{x} = f(x),\quad s = s(x). \tag{1}$$

这里 $x \in R^n$, $s = s(x)$ 是(1)式的输出信号(一般来说是状态变量的非线性函数).

混沌系统(1)的一个观测器显然是一个与其满足同样动力学机制的可物理实现的系统,因此满足同样的动力学方程

$$\dot{y} = f(y). \tag{2}$$

设 $e(t) = x(t) - y(t)$,那么有如下定义.

定义 如果系统(1)与系统(2)的解满足

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0,$$

那么称系统(2)是(1)的一个观测器.

由于系统(1)是混沌的,因此其运动状态敏感地依赖于初始条件(相应地,系统(2)亦如此),从而即使系统(1)与系统(2)的初始状态有很小的误差,它们的动态行为也会随时间的推移而变得十分不同,因此若要使系统(2)成为系统(1)的混沌观测器,必须将系统(1)的输出信号作为一种控制变量引入系统(2),即考虑下述系统

$$\dot{y} = f(y) + u(y, s(x)), \tag{3}$$

这里 $u(y, s(x))$ 是将系统 $\dot{y} = f(y)$ 的状态变量 y 同系统(1)的输入信号 $s = s(x)$ 进行比较后实施的控制输入.具体地,$u(y, s(x))$ 可以表示为 $u(s(y) - s(x))$.即,控制 $u(y, s(x))$ 的设计依赖于误差信号 $e = s(y) - s(x)$ 的变化.

* 重庆市科委应用基础研究基金资助的课题.

3 理论结果

由于 Rössler 系统[8]、Chua[9] 系统等都具有一个标量非线性项，为展开下面的讨论假定混沌系统(1)的右端 $f(x)$ 具有形式 $f(x) = Ax + Bh(x)$，其中 A 是常数矩阵，$B \in R^n$ 是一个常数向量，$h(x)$ 是一个标量连续函数.

定理 设给定的输出具有形式

$$s = s(x) = h(x) + c^{\mathrm{T}} x,$$

其中 $c \in R^n$，容易看出，这是一个标量输出信号. 如果 c 的选取使得矩阵 $A - Bc^{\mathrm{T}}$ 的特征值都具有负实部，则系统

$$\dot{y} = f(y) + B(s(x) - s(y)) \tag{4}$$

是(1)式的一个混沌观测器.

证明 将系统(1)的状态变量减去系统(2)的状态变量，得下列误差线性系统

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = A(x - y) - Bc^{\mathrm{T}}(x - y) = Ae - Bc^{\mathrm{T}} e.$$

由于矩阵 $A - Bc^{\mathrm{T}}$ 的特征值都具有负实部，故该线性系统的零解渐进稳定，从而

$$\lim_{t\to\infty} x(t) - y(t) = \lim_{t\to\infty} e(t) = 0,$$

因此系统(4)是系统(1)的一个混沌观测器.

利用上述理论结果，对 Rössler 系统、Chua 系统等具有一个标量非线性项的混沌系统可以设计只需具有一个标量信号输入控制律的混沌观测器，另一方面，从通常的混沌系统同步的角度来说，上述结论也表明对 Rössler 系统、Chua 系统等一类系统只要一个非线性标量信号输入就可以使得单向耦合全同混沌系统达到同步.

4 例 子

作为以上理论分析的应用，我们来讨论著名的 Chua[9] 电路方程

$$\dot{x} = Ax + g(x), \tag{5}$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}} \in R^3$，

$$Ax = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$g(x) = f(x_1)(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

该系统是几个可以物理实现的混沌系统之一，关于其动力学性质的讨论见文献[9]及其相关文献.

现在考虑其混沌观测器(4)，此时(4)式具有如下形式，

$$\dot{y} = Ay + g(y) + (s(x) - s(y))(1,0,0)^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

这里标量信号 s 取为

$$s(x) = f(x_1) + \sum_{i=1}^{3} k_i x_i,$$

于是误差系统为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = A(x - y) - c^{\mathrm{T}}(x - y)(1,0,0)^{\mathrm{T}} = De,$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} -\alpha + k_1 & \alpha + k_2 & k_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

容易看出其特征多项式为

$$|\lambda - B| = \lambda^3 + (1 + \alpha - k_1)\lambda^2 + (-\beta - k_1 - k_2)\lambda + (-\alpha + k_2 + k_3)\beta, \tag{8}$$

由 Hurwitz 定理[10]知当

$$1 + \alpha - d_1 > 0, \quad -\beta - k_1 - k_2 > 0,$$
$$-\alpha + k_2 + k_3 > 0,$$
$$(1 + \alpha - k_1)(-\beta - k_1 - k_2) > (-\alpha + k_2 + k_3)\beta$$

时矩阵(7)的特征根都具有负实部. 因此只要诸 k 满足上面的不等式，系统(6)就可以成为上述 Chua 系统的一个混沌观测器，而这样的 k 是不难找到的. 实际上只需取 $-k_1$，$-k_2$ 充分大，k_3 取得适当即可.

现在考虑超混沌 Rössler 系统[8]

$$\dot{x} = Ax + x_1 x_3 (0,0,1,0)^{\mathrm{T}} + (0,0,3,0)^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

这里 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.05 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

如文献[8]所讨论的，对于适当给定的初始条件，该系统呈现超混沌动态行为. 利用如下标量信号

$$s(x) = x_1 x_3 + \sum_{i=1}^{4} k_i x_i$$

设计一个控制律为

$$u = B(s(x) - s(y)) = (s(x) - s(y))(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},$$

则得到系统(9)的一个待设计的观测器

$$\dot{y} = Ay + y_1 y_3 (0,0,1,0)^{\mathrm{T}} + (0,0,3,0)^{\mathrm{T}} + (s(x) - s(y))(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

由(9)与(11)式得到的误差系统为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{y} = Ae - \left(\sum_{i=1}^{4} k_i e_i\right)(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}. \quad (12)$$

根据线性系统的控制理论知道，由于误差系统(12)的可控矩阵是满秩的，因而存在一个增益向量 $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ 使得系统(11)成为上述超混沌 Rössler 系统(9)的一个观测器，读者不难找出这样的增益向量，比如 $k = (-3.37, 1.00, 4.31, -5.81)$.

5 结　论

本文讨论了混沌观测器的概念，并对文献中广泛讨论的一类混沌系统给出了一种观测器的设计. 由于现实中的大多数系统状态变量并非都易于用物理方法测量出来，因此设计一个状态观测器使其具有待研究的观测系统的动态性质是一个具有重要意义的课题.

[1] Xiao-shu Luo *et al*., *Acta Physica Sinica*, **48** (1999), 589 (in Chinese) [罗晓曙等，物理学报，**48**(1999)，589].

[2] Jin-feng Gao *et al*., *Acta Physica Sinica*, **48** (1999), 1618 (in Chinese) [高金峰等，物理学报，**48**(1999)，1618].

[3] E. Ott *et al*., *Phys. Rev. Lett*., **64** (1990), 1196.

[4] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett*., **44** (1991), 2374.

[5] Xiao-song Yang, *Phys. Lett*., **A260** (1999), 340.

[6] T. Shinbrot, *Advances in Phys*., **44** (1995), 73.

[7] Chang-de You, The Foundation of Modern Control Theory (Electronic Industry Press, Beijing, 1996) (in Chinese) [尤昌德，现代控制理论基础工业(电子工业出版社，北京，1996)].

[8] O. E. Rössler, *Phys. Lett*, **A71** (1979), 155.

[9] R. Brown, *IEEE Trans. Circuits Syst*., **I40** (1993), 878.

[10] Lin Huang, Stability Theory (Beijing Univ. Press, 1992) (in Chinese) [黄琳，稳定性理论(北京大学出版社，1992)].

OBSERVERS FOR A CLASS OF CHAOTIC SYSTEMS

YANG XIAO-SONG

(*Institute for Nonlinear Systems*, *Chongqing University of Posts and Telecomm*, *Chongqing* 400065, *China*)

(Received 2 February 2000; revised manuscript received 5 March 2000)

ABSTRACT

In this paper the design of observers of a class of chaotic systems is discussed. By means of scalar nonlinear signal one can construct a control law to implement the synchronization between the investigated chaotic system and its observer.

Keywords: chaotic systems, state observer, synchronization

PACC: 0545