

等离子体粒子模拟中的一种碰撞模型*

马燕云 常文蔚 银 燕 岳宗五 曹莉华 刘大庆

(国防科技大学应用物理系,长沙 410073)

(1999 年 11 月 28 日收到,2000 年 1 月 20 日收到修改稿)

在等离子体粒子模拟程序中,采用一种三维 β 粒子云(这里 β 是粒子云的电量和质量相对于真实粒子相应量的比率)来补偿有限大小粒子削减的碰撞效应.用冲量近似(直线轨道近似)方法导出 β 粒子云的半径 a 和 β 值与散射截面之间的关系,并可确定为了使模拟系统的碰撞效应与真实系统的相当而应选取的 a 和 β 值,还可通过调整 a 和 β 值来人为地加强或减弱碰撞效应,粒子模拟结果与理论分析相一致.

关键词:等离子体粒子模拟,碰撞阻尼,弛豫时间

PACC:5265,5235,5260

1 引 言

激光等离子体相互作用,超热电子的产生和输运等问题,在惯性约束聚变(ICF)研究中占有重要地位.注意到在激光产生的等离子体中,无论是日冕区还是低温高密区,碰撞效应都是不能忽略的,尤其在一些非线性现象中,在奇异点附近,碰撞效应起着至关重要的作用.为适应 ICF 研究的需要,将现有的等离子体无碰撞粒子模拟程序改造为含碰撞的粒子模拟程序以及研究新的含碰撞粒子模拟方法,是十分必要的.

关于等离子体含碰撞的粒子模拟方法的研究工作可按以下三条途径进行:一条是碰撞效应修正法^[1-7],即在无碰撞等离子体粒子模拟程序里,用其他方法(如 Monte-Carlo 法)加入碰撞效应;另一条是无网格粒子模拟方法^[8],其中粒子间的远距集体相互作用是采用多极展开法计算的,近距碰撞效应是直接计算的;第三条途径是通过选择适当的粒子模型使程序中含有近距离碰撞效应^[9-12].

在第三条途径这方面,特别应指出的是 Dawson^[13]曾用一维可相互穿透的粒子模型,模拟了电子束通过等离子体经受的阻力和在速度空间的扩散以及速度向 Maxwell 分布的过渡等动力学问题,实质上已证明粒子云程序是可以在某种程度上自动含有碰撞效应的.本文是沿着这条途径的一种新的尝

试.

本文采用的是一种电荷和质量 β 倍于真实粒子(电子或离子),半径为 a 的球(立方体)的模拟粒子,以下简称 β 粒子云.分析表明,只要适当选择 a 和 β 值的大小就可以使 β 粒子云之间的碰撞效应与真实粒子之间的碰撞效应相对应.我们的粒子模拟实例也证实了这一点.有理由相信,通过今后进一步的努力,会使采用 β 粒子云的等离子体的含碰撞粒子模拟方法得到改进,并将在 ICF 的多维($1 \frac{2}{2}$, $2 \frac{1}{2}$ 3 维)碰撞等离子体的粒子模拟研究中发挥重要作用.

2 β 粒子云之间碰撞效应的分析

回顾等离子体粒子模拟方法发展的历史,粒子模型的选取占有特殊重要的地位.正是采用了有限大小粒子^[13,14],保留了粒子间的远距离集体相互作用,抑制了近距碰撞引起的起伏,消除了点粒子的碰撞发散效应,才使得粒子模拟方法在模拟等离子体集体效应方面获得了巨大的成功.如果在有限大小粒子(简称粒子云)模型的基础上,采取若干增大碰撞效应的措施,如适当增加每个粒子云的带电量和质量,就有可能既保留了粒子云的优点,又可降低对碰撞效应的抑制.正是基于这种想法,我们采用 β 粒子云作为模拟粒子.

* 国家高技术惯性约束聚变(ICF)主题和国家自然科学基金(批准号:19885008)部分资助的课题.

从 β 粒子云系统提取的信息包括粒子的信息和 E, B 场的信息. 关于粒子信息: 尽管 β 粒子云与同种的真实粒子(电子或离子)相比其质量大了 β 倍, 但其电荷也增大了 β 倍, 荷质比并无变化, 因此只要 β 粒子云的数目取得足够多, β 粒子云的速度 v 及与此相联系的 β 粒子云的平均宏观运动速度 $\langle v \rangle$ (与电流密度有关) 和热运动速度 $\sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$ (与温度有关), 应在相当程度上反映同种真实粒子的情况. 当然, 在计算 β 粒子云的动能、动量及平均热运动能量或温度时, 应将质量所扩大的倍数去掉, 以便反映真实粒子的情况. 关于 E, B 场的信息: E, B 场包括外场(如激光场)和自洽场. 其中自洽场是由 β 粒子云的电荷密度和电流密度形成的, 显然包含了外场和碰撞效应的影响. 尽管 β 粒子云的电荷数(与同种的真实粒子的电荷数相比)扩大了 β 倍, 但其数密度小了 β 倍, 因此, 只要模拟粒子数目足够多, 它们之间的差别应不会淹没物理真实, 而由 β 粒子云构成的模拟粒子系统的电荷密度、电流密度以及由之得到的场的信息也应在相当程度上反映真实系统的情况.

下面给出对碰撞截面的分析. 因为, 至少在流体力学水平上, 碰撞截面可较完全的描述碰撞过程.

设入射 β 粒子云的速度为 v_1 , 电荷为 $\tilde{q}_1 = \beta q_1$, 质量为 $\tilde{m}_1 = \beta m_1$ (“ \sim ”表示模拟粒子或模拟系统的物理量, 若该量与真实系统的量相同, 则省去“ \sim ”), 靶 β 粒子云的速度为 v_2 , 电荷为 $\tilde{q}_2 = \beta q_2$, 质量为 $\tilde{m}_2 = \beta m_2$, 数密度为 $\tilde{n}_2 = n_2/\beta$. 在可忽略真实粒子与 β 粒子云的速度差别的条件下, 入射 β 粒子云与靶 β 粒子云的碰撞频率 $\tilde{\nu}_{12} = v_{12} \tilde{\sigma}_{12} \tilde{n}_2$, 其中 $v_{12} = |v_1 - v_2|$ 为这两个 β 粒子云之间的相对速度的大小, $\tilde{\sigma}_{12}$ 是散射截面. 为了推导出 β 粒子云之间的散射截面公式, 设入射 β 粒子云以速度 v_{12} , 碰撞参量(瞄准距离) p , 向靶 β 粒子云(散射中心)飞来(如图 1), 入射 β 粒子云的质量为 $\tilde{m}_{12} = \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 / (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)$

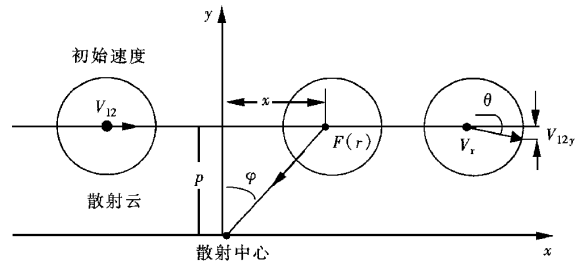


图 1 散射略图(这里散射轨道假定沿着如图所示直线)

$= \beta m_{12}$ (折合质量). 选取散射中心为坐标原点, 入射方向为 x 轴的正向. 入射 β 粒子云的位置矢量 $r = r e_r$ 和速度矢量 v_{12} 决定一入射平面, 在入射平面内构成 $x-y$ 右手直角坐标系, 记矢量 r 与 y 轴正向的夹角为 φ .

注意到 β 粒子云是可以相互穿透的, 当两 β 粒子云有重叠部分时, 相互作用力就开始变小, 完全重合时相互作用力为零. 不妨假设当两 β 粒子云球心间距小于 $2a$ 时, 它们之间的静电力随距离呈线性变化, 即

$$\tilde{F}(r) = \begin{cases} \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2}{r^2} e_r = \frac{\beta^2 q_1 q_2}{r^2} e_r & \text{当 } r > 2a; \\ \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2}{(2a)^3} r e_r = \frac{\beta^2 q_1 q_2}{(2a)^3} r e_r & \text{当 } r \leq 2a. \end{cases} \quad (1)$$

由于散射后 v_{12} 不变, 仅方向有所改变, 散射角 $\tilde{\theta}$ 的大小由散射 β 粒子云速度的 y 分量 \tilde{v}_y 决定, 即

$$\sin \tilde{\theta} = \tilde{v}_y / \tilde{v}_{12}. \quad (2)$$

假设散射 β 粒子云取入射方向的直线轨道^[11], 有

$$\tilde{v}_y = \frac{1}{\tilde{m}_{12}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_y dt = \frac{1}{\beta m_{12} v_{12}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_y dx. \quad (3)$$

将 $\tilde{F}_y = \frac{\beta^2 q_1 q_2}{r^2} \cos \varphi$ ($r > 2a$), 或 $\tilde{F}_y = \frac{\beta^2 q_1 q_2}{(2a)^3} r \cos \varphi$ ($r < 2a$) 代入上式, 再利用 $r \cos \varphi = p$, $x^2 = r^2 - p^2$, $r \geq p$, 可得到

$$\tilde{v}_y = \begin{cases} \left(\frac{\beta q_1 q_2}{m_{12} v_{12}} \right) \frac{2}{p} [1 - \sqrt{1 - (p/2a)^2} + (p/2a)^2 \sqrt{1 - (p/2a)^2}] & \text{当 } p < 2a; \\ \left(\frac{\beta q_1 q_2}{m_{12} v_{12}} \right) \frac{2}{p} & \text{当 } p > 2a. \end{cases} \quad (4)$$

当 β 粒子云的散射角被确定后, 它在 x 方向的动量转移概率则为 $(1 - \cos \tilde{\theta})$, 对不同的散射情况, 即不同的碰撞参量、不同的入射平面求积分, 就可得到总的散射截面(动量转移截面)

$$\tilde{\sigma}_{12} = 2\pi \int_0^{\lambda} (1 - \cos \theta) p dp, \quad (5)$$

其中 Debye 长度为

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT_{ei}}{4\pi n_e e^2}} = \tilde{\lambda}_D, \quad (6)$$

而

$$\tilde{T}_{ei} = \begin{cases} \frac{\tilde{T}_e \tilde{T}_i}{\tilde{T}_e + \tilde{T}_i} & \text{当 } \tilde{T}_i \leq \tilde{T}_e; \\ \tilde{T}_e & \text{当 } \tilde{T}_i \approx 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\cos \tilde{\theta} = \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{\theta}} = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{2\beta q_1 q_2}{m_{12} v_{12}^2} \right)^2 \frac{1}{p^2} \left[1 - \sqrt{1 - (p/2a)^2} + (p/2a)^2 \sqrt{1 - (p/2a)^2} \right] \right]^{1/2} & \text{当 } p < 2a; \\ \left[1 - \left(\frac{2\beta q_1 q_2}{m_{12} v_{12}^2} \right)^2 \frac{1}{p^2} \right]^{1/2} & \text{当 } p > 2a. \end{cases} \quad (8)$$

把 (6) 和 (8) 式代入 (5) 式, 得到

$$\tilde{\sigma}_{12} = \frac{4\pi \lambda_D^2}{\Lambda^2} \tilde{A}(\beta, a, \lambda_D), \quad (9)$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{cases} \beta^2 \left(\ln \frac{\lambda_D}{2a} + \frac{3}{8} \right) & \text{当 } 2a < \lambda_D; \\ \frac{9}{16} \beta^2 \left(\frac{\lambda_D}{2a} \right)^4 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_D}{2a} \right)^2 \right] & \text{当 } 2a > \lambda_D, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\Lambda = m_{12} v_{12}^2 \lambda_D / q_1 q_2$. 当 $\frac{3}{2} \frac{\beta \lambda_D}{\Lambda 2a} < 1$ 时 (9) 式成立. (在 (9) 式中, 若令 $\beta = 1$, 则得到 FSP (有限大小粒子) 的散射截面, 可由此估计 FSP 对碰撞的衰减.) 另外, 真实粒子间散射截面^[11]为

$$\sigma_{12} = \frac{4\pi \lambda_D^2}{\Lambda^2} \ln \Lambda. \quad (11)$$

知道 $\tilde{\sigma}_{12}$ 后, 就可以得到 β 粒子云系统的碰撞弛豫时间

$$\tilde{\tau}_{12} = \frac{1}{v_{12} \tilde{\sigma}_{12} \tilde{n}_2} = \frac{m_{12}^2 v_{12}^3}{4\pi \tilde{B}(\beta, a, \lambda_D) m_2 q_1^2 q_2^2}, \quad (12)$$

其中 $\tilde{B}(\beta, a, \lambda_D) = \tilde{A}(\beta, a, \lambda_D) / \beta$. 上式中的 v_{12}^3 应对粒子速度 Maxwell 分布求平均, 注意到 $\tilde{m}/k\tilde{T} = m/kT$, 即有

$$\langle v_{12}^3 \rangle = \left(\frac{m_1}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} \left(\frac{m_2}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \int v_{12}^3 \exp\left(-\frac{m_1 v_1^2}{2kT_1} - \frac{m_2 v_2^2}{2kT_2}\right) dv_1 dv_2. \quad (13)$$

将粒子速度通过质心速度和相对速度来表示,

$$\begin{cases} v_1 = v_c + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{12}, \\ v_2 = v_c - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{12}, \end{cases} \quad (14)$$

注意到 $dv_1 dv_2 = dv_c dv_{12} \left(\left| \frac{\partial (v_1, v_2)}{\partial (v_c, v_{12})} \right| = 1 \right)$ 并令 T_1 和 T_2 均取它们的平均值,

$$\tilde{T}_0 = \frac{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}{\frac{\tilde{m}_1 \tilde{T}_2 + \tilde{m}_2 \tilde{T}_1}{\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2}}, \quad (15)$$

可得到

$$\begin{aligned} \langle v_{12}^3 \rangle &= \left(\frac{m_{12}}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \int v_{12}^3 \exp\left(-\frac{m_{12} v_{12}^2}{2kT_0}\right) dv_{12} \\ &= 4\pi \left(\frac{m_{12}}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \int_0^\infty v_{12}^5 \exp\left(-\frac{m_{12} v_{12}^2}{2kT_0}\right) dv_{12} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{kT_0}{m_{12}} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

于是

$$\tilde{\tau}_{12} = \frac{2\sqrt{2} \sqrt{m_{12}} (kT_0)^{3/2}}{\pi^{3/2} n_2 q_1^2 q_2^2 \tilde{B}(\beta, a, \lambda_D)}, \quad (17)$$

而真实粒子间碰撞弛豫时间为

$$\tau_{12} = \frac{2\sqrt{2} \sqrt{m_{12}} (kT_0)^{3/2}}{\pi^{3/2} n_2 q_1^2 q_2^2 \ln \Lambda}, \quad (18)$$

式中对于 e-e 或 e-i 碰撞, 通常取 $\Lambda = 9N_D$, N_D 为 Debye 球内的电子数, $N_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3$.

对比 (17) 与 (18) 式可见, 只要 β 粒子云参数 a 和 β 的大小按如下关系取值, 即

$$\beta = \begin{cases} \ln \Lambda \left(\ln \frac{\lambda_D}{2a} + \frac{3}{8} \right) & \text{当 } 2a < \lambda_D; \\ \ln \Lambda \left\{ \frac{9}{16} \left(\frac{\lambda_D}{2a} \right)^4 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_D}{2a} \right)^2 \right] \right\} & \text{当 } 2a > \lambda_D, \end{cases} \quad (19)$$

就可以使 $\tilde{\tau}_{12} = \tau_{12}$. 下一节将用粒子模拟的实例证实这一点.

3 碰撞现象的粒子模拟实例

本节将用实例证明:采用 β 粒子云模型的粒子模拟程序可以模拟出碰撞阻尼现象. 模拟的对象是一均匀的等离子体系统,其体积为 $0.44\lambda \times 0.22\lambda \times \lambda_i$ ($\lambda = 1.06 \times 10^{-4}$ cm). 其中离子的电荷数 $Z = 1$, 电子、离子的数密度 $n_e = n_i = 10^{22}/\text{cm}^3$, 电子温度 $T_e = 150$ eV, 离子温度 $T_i = 1/3 T_e$. 因此, 电子 Debye 长度 $\lambda_D = 9.11 \times 10^{-8}$ cm, 库仑对数 $\ln\Lambda = 4.55$. 在粒子模拟中, 取 β 粒子云的参量 $a = \lambda_D$, 而参量 β 根据公式(19)为 $\beta = 141$. 根据以上参量可确定模拟粒子数为 $N = 70000$. 我们希望通过粒子模拟表明, 由于碰撞阻尼使得粒子速度从非 Maxwell 分布向 Maxwell 分布过渡. 因此设置系统中电子和离子的初始速度的 x 分量偏离 Maxwell 分布, 如图 2 所示. 而其他两个分量服从 Maxwell 分布(图略).

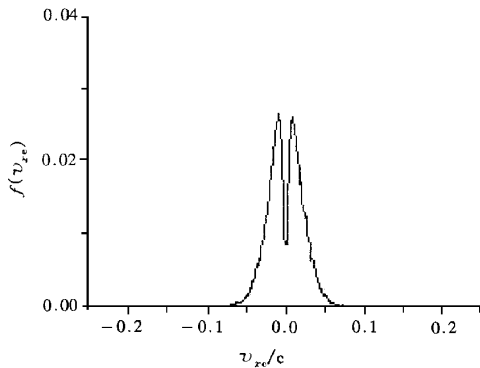


图 2 ($\omega t = 0$) 电子的速度分布函数 v_x/c 表示以光速 c 为单位的电子在 x 方向上速度分量

考虑到 Landau 不稳定性也可能使粒子的速度的非 Maxwell 分布向 Maxwell 分布过渡, 因此必须在模拟中估计并排除 Landau 不稳定性的影响. Landau 不稳定性增长(或阻尼)率为

$$\chi(k) = \pm 0.22 \sqrt{\pi} \omega_{pe} \frac{1}{k^3 \lambda_D^3} \exp\left(\frac{-1}{2k^2 \lambda_D^2}\right), \quad (20)$$

其中 k 为扰动的波数. 在给定扰动(给定电子和离子初始速度 x 分量的 Maxwell 分布的情况下), 由于 β 粒子云构成的模拟系统其相关物理量与真实系统的相同, 即

$$\tilde{\omega}_{pe} = \frac{4\pi \tilde{n}_e e^2}{\tilde{m}_e} = 4\pi \frac{n_e}{\beta} (\beta e)^2 \frac{1}{\beta m_e} = \omega_{pe}^2, \quad \tilde{v}_{th} =$$

$v_{th} \tilde{\lambda}_D = \frac{\tilde{v}_{th}}{\omega_{pe}} = \lambda_D$, 因此 $\tilde{\gamma}(k) = \gamma(k)$, 即 Landau

不稳定性增长(阻尼)率也相同. 这样就可以在粒子模拟中通过降低碰撞效应, 例如降低 β 值的大小的办法得到 Landau 不稳定性的影响. 模拟发现, 如图 2 所示的非 Maxwell 分布的情况, 对于一定的粒子云大小 a , 当 β 较小时, 分布函数很难过渡到 Maxwell 分布, 这实际说明此实例的 Landau 不稳定性很小, 不足以引起分布函数转化为 Maxwell 分布.

还应指出, particle in cell(缩写为 PIC)方法固有的自发加热效应(spontaneous heating)^[8]也能影响分布函数的变化. 但是, 一方面, 自发加热是一种长期效应, 只有模拟时间较长时, 才会比较明显; 另一方面, 当采取措施尽量抑制自发加热时, 分布函数仍能在预期的时间内趋向于 Maxwell 分布. 因此, 我们有理由相信, 在我们模拟中使分布函数向 Maxwell 分布的过渡主要是碰撞效应所引起的.

我们就本实例所进行的粒子模拟确实给出粒子速度因碰撞阻尼由初始的非 Maxwell 分布逐渐趋向 Maxwell 分布的过程. 现在分析一下所得结果. 该过程的弛豫时间^[16]的理论值为 $\tau_{e-e} = \frac{3\sqrt{m_e}(\epsilon k T_e)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi} n_e \ln\Lambda e^4}$

$\approx 3.44 \times 10^5 \frac{T_e^{3/2}}{n_e \ln\Lambda} = 1.38 \times 10^{-14}$ s. 在模拟中, 我们通过 H 函数的值随时间的变化来判断是否到达平衡, 这里 $H = \int f_e \ln f_e dv_x$, 根据 H 定理, 在粒子相互碰撞的影响之下, H 总是随时间单调地减小, 直至平衡态时达到一个极小值. 我们对该实例的模拟所得的 H 值随时间的变化如图 3 所示, 当 $\omega t = 100$ ($\omega = 1.77 \times 10^{15}/\text{s}$) 时, H 基本上达到极小值. 这时, 电子的分布函数如图 4 所示, 这时电子的分布函数已达到 Maxwell 分布. 分布函数和 H 函数的变化都说明, 这时系统已接近或达到平衡态. 粒子模拟系统(即 β 粒子云系统)的弛豫时间为 $\tilde{\tau}_{e-e} \approx 5.6 \times 10^{-14}$ s, 与实际系统的弛豫时间在量级上相一致.

由于离子向 Maxwell 分布的弛豫时间 $\tau_{i-i} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \tau_{e-e}$, 为了较快的显出离子的碰撞效应, 不妨取离子的 β 粒子云的质量 $\tilde{m}_i = 100 \tilde{m}_e$, 模拟结果正如所预期的, 为 $\tilde{\tau}_{i-i} \approx 2\tau_{e-e}$.

上述结果表明, 我们按公式(19)选择合适的 a 与 β , 确实可以使模拟系统的碰撞截面与真实系统的相当好地符合, 这同时也提示我们, 在研究集体作

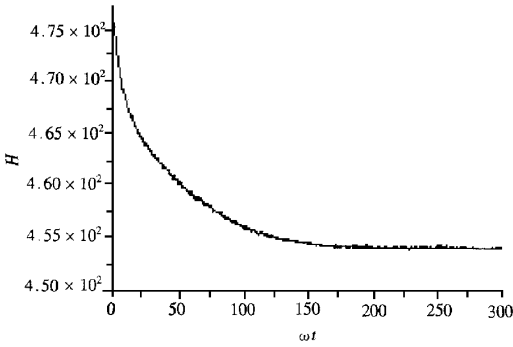
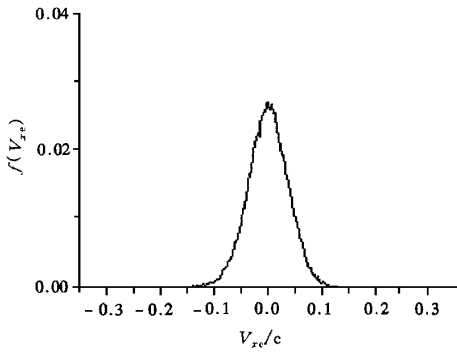


图3 H函数随时间变化图

图4 ($\omega t = 100$) 电子分布函数图 图注同图2

用为主的物理过程时,我们可以选择合适的 α 与 β 使碰撞减小,这样既不会淹没所要模拟的主要物理过程,又可减少计算量.同样,在模拟碰撞起重要作用的物理过程时,若碰撞效应与集体效应(波动现象)没有明显地非线性耦合,可以人为扩大模拟系统的碰撞效应(通过增加相应的 β ,减小相应的 α),使碰撞效应尽快呈现出来.这样做与人们以前在粒子模拟中人为减小离子-电子质量比来使离子的效应早些呈现出来的道理是一样的.

4 讨 论

等离子体粒子模拟方法已被广泛应用于等离子

体物理的许多领域,并被称为“第三手段”而与理论方法,实验方法相提并论.下面仅就粒子模拟方法的理论基础及适用条件作一简要讨论.

在经典等离子体物理中,我们将粒子视为点粒子,每个带有一定的电荷和质量.假设一个系统含有两种粒子:电子和离子,每种有 N_0 个.某种粒子的数密度可表示为

$$N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t))$$

$$s = e \text{ 或 } i, \quad (21)$$

其中 $\mathbf{R}_i(t), \mathbf{V}_i(t)$ 分别为某粒子在 \mathbf{r} 空间和 \mathbf{v} 空间的轨道.它们由粒子的运动方程决定,

$$\frac{d\mathbf{R}_i(t)}{dt} = \mathbf{V}_i(t), \quad (22)$$

$$m_s \frac{d\mathbf{V}_i(t)}{dt} = q_s \mathbf{E}^m(\mathbf{R}_i(t), t) + \frac{q_s}{c} \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}^m(\mathbf{R}_i(t), t), \quad (23)$$

其中 $\mathbf{E}^m, \mathbf{B}^m$ 分别表示点粒子的自洽微观场和外加场所形成的总电场和总磁场.微观场满足 Maxwell 方程

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho^m(\mathbf{r}, t), \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}^m(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (27)$$

其中微观电荷和电流密度为

$$\rho^m(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (28)$$

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{r}, t) = \sum_s q_s \int N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}. \quad (29)$$

求解以上的闭合方程组,就是粒子模拟方法的基本思想.

对 N_s 作时间导数,

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) - \sum_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \cdot \nabla_v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)), \quad (30)$$

代入 $\frac{d\mathbf{R}_i(t)}{dt}$ 和 $\frac{d\mathbf{V}_i(t)}{dt}$ 的表达式,可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} = & - \sum_i \mathbf{V}_i \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)) \\ & - \sum_i \left(\frac{q_s}{m_s} \mathbf{E}^m(\mathbf{R}_i(t), t) + \frac{q_s}{m_s c} \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}^m(\mathbf{R}_i(t), t) \right) \cdot \nabla_v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)). \end{aligned} \quad (31)$$

再应用 δ 函数的性质: $a\delta(a-b) = b\delta(a-b)$, 可将其化为 Klimontovich 方程

$$\frac{\partial N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla N_s + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E}^m(\mathbf{R}_i(t), t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}^m(\mathbf{R}_i(t), t) \right) \cdot \nabla_v N_s = 0. \quad (32)$$

定义

$$\begin{aligned} N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta N_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \end{aligned}$$

其中 $f_s \equiv \langle N_s \rangle$, $\mathbf{E} \equiv \langle \mathbf{E}^m \rangle$, $\mathbf{B} \equiv \langle \mathbf{B}^m \rangle$, 为相应的系综平均, 且 $\langle \delta N_s \rangle = \langle \delta \mathbf{E} \rangle = \langle \delta \mathbf{B} \rangle = 0$. 将其代入方程, 则得等离子体动力学方程

$$\frac{\partial f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_v f_s = - \frac{q_s}{m_s} \left\langle \left(\delta \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \delta \mathbf{B} \right) \cdot \nabla_v \delta N_s \right\rangle. \quad (33)$$

方程 (33) 等号右端为反映离散粒子特性的碰撞项. 碰撞项的不同, 可构成非平衡态统计学推广的系综方法 (BBGKY) 体系. 若只考虑 Coulomb 碰撞, 且忽略二体碰撞的大角散射, 多体碰撞可近似为一系列二体小角散射的叠加, 则等离子体动力学方程可化为 Fokker-Planck 方程.

本文中采用的粒子模型是有限大小的 β 粒子云模型, 这意味着忽略了二体碰撞的大角散射, 保留了相当一部分小角散射的多体碰撞. 至于保留了

Debye 长度以外的集体效应, 已为大量的粒子模拟工作所证实. 本文对偏离 Maxwell 速度分布不大的情况所作的粒子模拟, 其结果证明该模型是正确的. 这相应于 Fokker-Planck 方程所对应的情况. 即目前的粒子模型方法仅适用于粒子间弱耦合的情况. 关于粒子间的强耦合, 碰撞的相对论修正和量子修正, 如何改进目前的粒子模拟方法, 使其适用于强耦合情况等方面的研究工作, 正在进行中.

- [1] R. Shany, J. M. Dawson, J. M. Greene, *Phys. Fluids*, **10** (1967) A281.
 [2] W. P. Gula, C. K. Chu, *Phys. Fluids*, **16** (1973) 1135.
 [3] T. Takizuka, H. Abe, H. Momota, C. Namba, *Plasma Phys.*, **17** (1975) 887.
 [4] A. Oliphant, C. W. Nielson, *Phys. Fluids*, **13** (1970) 2103.
 [5] T. Takizuka, H. Abe, *J. Comput. Phys.*, **25** (1977) 205.
 [6] A. H. Boozer *et al.*, *Phys. Fluids*, **24** (1981) 851.
 [7] J. T. Zhang *et al.*, *Commun. Theor. Phys.*, **5** (1986) 243.
 [8] John Ambrosiano *et al.*, *Comput. Phys. Commun.*, **48** (1988) 117.

- [9] J. M. Dawson, *Phys. Fluids*, **5** (1962) A45.
 [10] J. M. Dawson, *Phys. Fluids*, **7** (1964) A19.
 [11] H. Okuda, C. K. Birdsall, *Phys. Fluids*, **13** (1970) 2123.
 [12] A. B. Langdon, C. K. Birdsall, *Phys. Fluids*, **13** (1970) 2115.
 [13] J. M. Dawson, *Rev. Mod. Phys.*, **55** (1983) A03.
 [14] C. K. Birdsall, D. Fuss, *J. Comput. Phys.*, **3** (1969) A94.
 [15] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Plenum Press, New York, 1974) p. 218.
 [16] D. L. Book, *NRL Plasma Formulary* (Naval Research Laboratory, 1983) p. 36.

A COLLISION MODEL IN PLASMA PARTICLE SIMULATIONS^{*}

MA YAN-YUN CHANG WEN-WEI YIN YAN YUE ZONG-WU CAO LI-HUA LIU DA-QING

(*Department of Applied Physics ,National University of Defense Technology ,Changsha 410073 ,China*)

(Received 28 November 1999 ; revised manuscript received 20 January 2000)

ABSTRACT

In order to offset the collisional effects reduced by using finite-size particles, β particle clouds are used in particle simulation codes (β is the ratio of charge or mass of modeling particles to real ones). The method of impulse approximation (straight line orbit approximation) is used to analyze the scattering cross section of β particle clouds plasmas. By this way, we can obtain the relation of the value of a and β and scattering cross section (a is the radius of β particle cloud). By using this relation we can determine the value of a and β so that the collisional effects of the modeling system is correspondent with the real one. We can also adjust the values of a and β so that we can enhance or reduce the collisional effects fictitiously. The results of simulation are in good agreement with our theoretical ones.

Keywords : particle simulation of plasmas , collisional demping , relaxation time

PACC : 5265 , 5235 , 5260

^{*} Project supported by the National High Technology Inertial Confinement Fusion Foundation of China and in part by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19885008).