

弱的参数周期扰动对一非线性系统安全域的影响 与分形侵蚀安全域的控制*

龚璞林 徐健学 孙政策

(西安交通大学非线性动力学研究所,西安 710049)
(2000 年 6 月 12 日收到,2000 年 12 月 17 日收到修改稿)

讨论了弱参数周期扰动对于非线性系统安全域的影响,在一定频率下的参数周期扰动将加速安全域的分形侵蚀,而在另一些频率的扰动下,将抑制安全域的分形侵蚀,并且存在着增进安全域的最优频率.提出了用弱参数周期扰动控制受到分形侵蚀的安全域的方法,并用 Melnikov 方法进行了分析.最后讨论了这种控制安全域的方法在实际环境中当具有外加噪声时的鲁棒性.

关键词:分形吸引域边界,参数的周期扰动,控制

PACC: 0545

1 引 言

非线性动力系统中一个重要的现象是多个吸引子包括不动点、极限环、准周期环面、奇怪吸引子可以共存,每一个吸引子都处于自己吸引域的包围之中.在系统参数的改变下,随着吸引子的分岔以及其在相平面上位置的移动,吸引域也相应地发生改变和变形.新的吸引域产生了,旧的吸引域受到破坏,存在着吸引域的演化.吸引域之间可能具有高度缠绕的分形边界,在这种情况下由于指定初始点时具有不可避免的误差,从而对于靠近分形吸引域边界的点的最终状态的预见性将会丧失^[1].Thompson 及其合作者在近几年的研究中分析了一类在物理与实际工程中有着广泛应用的非线性振子

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + x - x^2 = f \sin(\omega t), \quad (1)$$

该模型最初由 Helmholtz 提出来解释受拉膜的振动问题,并且在突变理论中也有着重要的应有^[2,3].在工程动力学中,该模型通常与结构的稳定性以及船只的翻转问题有关^[4-6].对于这个模型已有的研究表明,在有些条件下,所有有界解的吸引域也就是安全域开始受到分形吸引域边界的侵蚀^[7-9].最近,Nusse 和 Yorke 在对该模型的分析中发现,在有些参数条件下,这个非线性系统具有 Wada 吸引域(Wada basin)^[10,11],也就是指该系统的三个吸引子的吸引域

边界相互重合.

在实际的物理环境中,系统的参数总是或多或少地受到一定程度的扰动,从而当参数受到各种形式的扰动时,非常有必要研究该系统的安全域的变化情况.本文将考虑参数的弱的周期扰动对这个系统的安全域的影响.安全域受到分形边界的侵蚀后,意味着当系统在实际环境中运行时,如具有外加噪声或突加载荷时,就会使系统的安全域的侵蚀突然加剧,从而使系统的稳定性丧失.这就非常有必要对已受到分形侵蚀的安全域加以控制.在本文通过研究表明弱的参数周期扰动,可以用于控制分形侵蚀的安全域,增加系统在实际物理环境中运作时的完整安全性,并且考虑了这种控制分形侵蚀安全域的方法当具有外加噪声时的鲁棒性能.

2 方程及有关的性质

为了对安全域有一个准确的理解,在此对其做出以下的定义.对于一般的非线性动力系统 $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in R^n$, $\mu \in R^m$, 所生成的流 $\phi_t: U \rightarrow R^n$, $U \subset R^n$, 安全域 S_b 是指在相平面上的一闭的、紧的区域 D ($D \subset U \subset R^n$) 中, 满足下式的初始点的集合:

$$S_b = \{x \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) < M\},$$

其中 M 是一有界实数.与安全域中的点相对照的是逃逸点,随着时间的演化,逃逸点的振幅将趋向无穷

* 国家自然科学基金(批准号:19972051,39970242)资助的课题.

大,这将导致事故的发生.

考虑(1)式中参数的小的周期扰动对于安全域的影响,从而所研究的方程为

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + (1 + \eta \sin(qt))x - x^2 = f \sin(\omega t) \quad (2)$$

式中 $q, \eta > 0$ 分别是扰动的频率及振幅,本文中取 $\beta = 0.1, \omega = 0.85$.(2)式可以转化为如下的一阶系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\beta y - (1 + \eta \sin(qt))x + x^2 + f \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (3)$$

对于(3)式中未扰的 Hamilton 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x + x^2, \end{aligned} \quad (4)$$

其 Hamilton 能量函数为

$$H(x, y) = \frac{y}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

(4)式存在一结点(0,0)与一鞍点(1,0),连接鞍点的同宿轨道的方程为

$$\begin{aligned} \nu_+^0 &= \left(1 - \frac{3}{1 + \cosh(t)} \frac{3 \sinh(t)}{(1 + \cosh(t))^2} \right), \\ \nu_-^0 &= -\nu_+^0. \end{aligned} \quad (5)$$

3 不同扰动频率对安全域的影响

当激振力 $f > 0.0633$ 时,系统(1)的安全域开始受到分形边界的侵蚀^[7].本文取安全域受到侵蚀后的参数值 $f = 0.074$.为了研究具有不同频率的参数周期扰动对于分形侵蚀安全域的影响,在此定义相对安全域为 $A_r = A/A_0$,其中 A 为受到参数周期扰动以后的安全域的面积, A_0 未扰系统(1)的安全域的面积.

在选定的区域 $D = (-0.8, 1.2) \times (-1.0, 1.0)$ 中,我们取 200×200 个均匀分布的初始点,对于每个初始点积分式(3),如果随着时间的演化 x 趋向于无穷大,则该点被认为是逃逸点,否则是安全域内的点.为了研究具有不同频率 q 的参数的周期扰动对于安全域的影响,在这里不妨固定扰动的幅值为 $\eta = 0.04$.让频率 q 以小的步长进行变化,对于每个 q 值我们可得到扰动系统的相对安全域,结果如图1所示.当 $A_r > 1$ 时,参数的周期扰动将增加原系统(1)的安全域,使安全域有所增加,安全域受分形边界侵蚀的程度得到抑制,否则当 $A_r < 1$ 时,弱的参数的周期扰动将减小安全域,加速了分形边界对安全域的侵蚀,从而安全域有所减小.从图1可以看到不

同频率的参数的周期扰动对于安全域的影响是不同的,某些频率的参数周期扰动抑制了安全域的侵蚀,增加了系统的安全域的面积,而在有的频率下的参数的周期扰动加速了分形边界对安全域的侵蚀,导致安全域面积的下降. $\eta = 0.0$ 时,未加参数扰动的安全域如图 2(a)所示. $\eta = 0.04, q = 0.17$ 时,对应于 $A_r > 1$,则安全域受到分形边界的侵蚀程度得到了抑制,其安全域如图 2(b)所示.当 $\eta = 0.04, q = 1.69$ 时 $A_r < 1$,安全域受到分形边界的侵蚀得到了促进,安全域的面积有所减小,此时安全域如图 2(c)所示.从图1中可以得到对于增进安全域的情形,存在一最优频率 $q = 0.17$.在这里最优意味着对于增加安全域的面积来讲,频率为 $q = 0.17$ 的参数的周期扰动的作用最大.

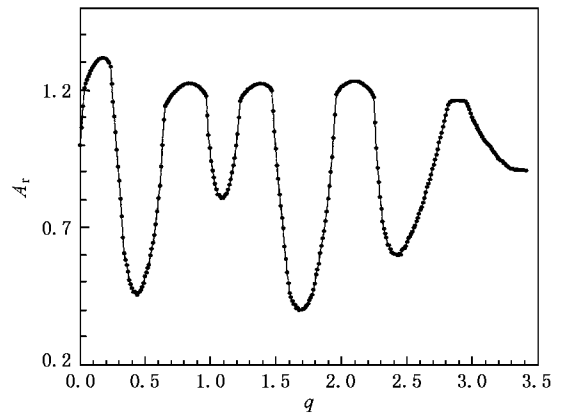


图1 相对安全域 A_r 随着扰动频率 q 的变化曲线

4 对分形侵蚀安全域的控制

在本文的第三部分中我们得到,当对系统(1)加以弱的参数的周期扰动时,不同频率的参数的周期扰动对于已受到分形侵蚀的安全域的作用是不同的,并且存在一增加安全域的最优频率.下面,用这个具有最优频率的参数周期扰动对于已受到分形侵蚀的安全域加以控制,以使安全域变为光滑的,同时获得最大面积的安全域.

McDonald 等人在指出^[1],当系统存在分形的吸引域边界时,则不能对位于吸引域边界附近点的最终运动状态进行预测.结果初始点具有 ϵ 的误差,则在给定的有限相平面上,不确定成分所占的比例满足式为

$$f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha, \quad (6)$$

并且不确定指数 α 与吸引域边界的分形维数 d 的

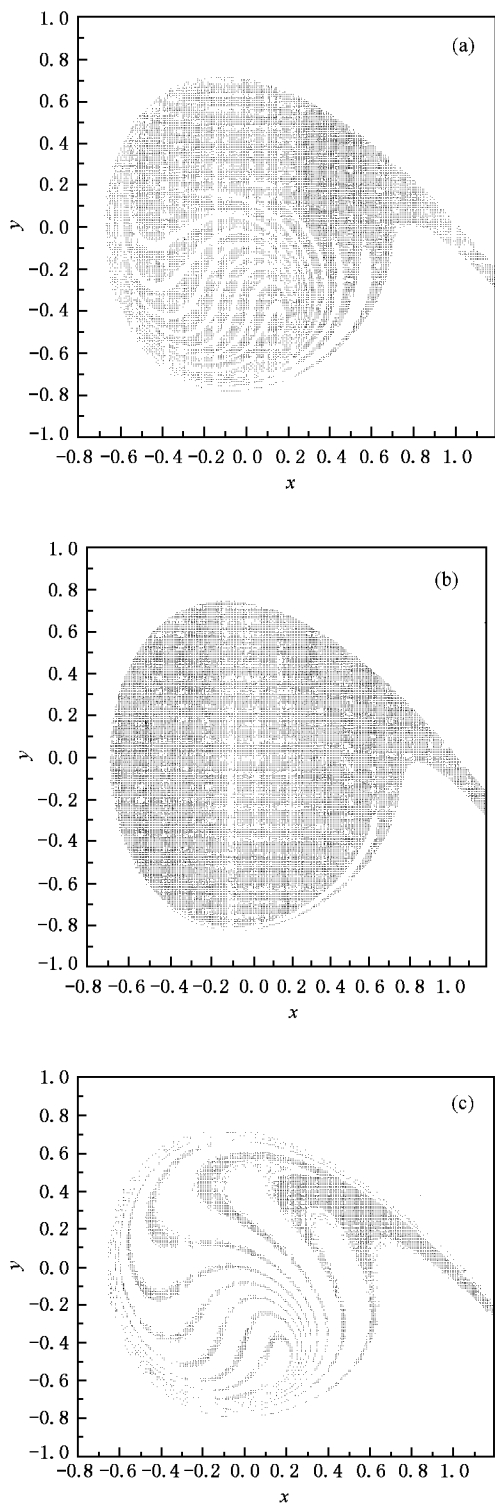


图2 安全域图 (a) $\eta=0$ (b) $\eta=0.04$, $q=0.17$ (c) $\eta=0.04$, $q=1.69$

关系为 $\alpha = D - d$, 其中 D 是相平面的维数. 通过计算不确定指数, 可获得吸引域边界的维数. 本文采用如下的方法计算不确定指数 α . 在相平面中区域 $D = (-0.8, 1.2) \times (-1.0, 1.0)$ 上随机的选取 M 个

初始点 (x, y) , 则在其周围存在四个点 $(x - \epsilon, y)$, $(x + \epsilon, y)$, $(x, y - \epsilon)$, $(x, y + \epsilon)$, 如果这四个顶点中至少有一个与 (x, y) 点最终状态不同, 则此点被认为是不确定的. 在这 M 个初始点中, 所有不确定点的总数除以 M , 即可获得不确定性成分所占比例 $f(\epsilon)$, 进而可求得吸引域边界的维数. 对于 (1) 式, 应用上述方法可得到吸引域边界维数随 f 的变化曲线如图 3 所示, 从图 3 中可以得到当 $f = 0.064$ 时, 安全域与吸引域的边界开始出现分数维数, 吸引域边界发生由光滑到分形的变形, 这与文献 [7] 的结果基本吻合, 可见通过计算吸引域边界的维数来判断吸引域边界的变形是可靠的.

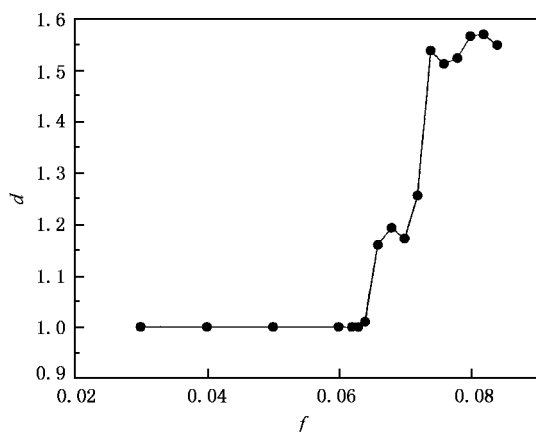
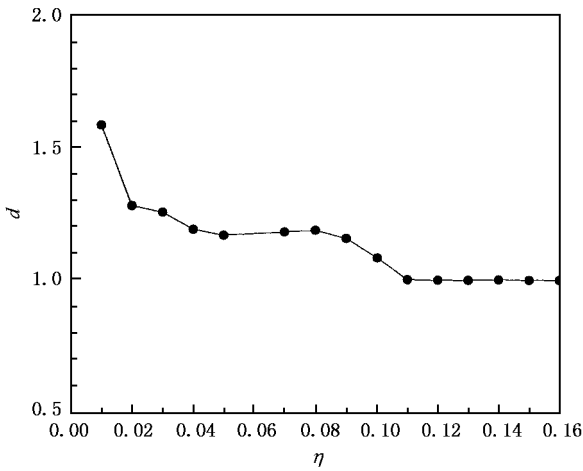


图3 吸引域边界的维数随着 f 的变化曲线

由于频率为 $q = 0.17$ 的参数的周期扰动对于增进安全域的面积来讲是最优的, 在此用该频率下参数的周期扰动对安全域受到分形侵蚀的情形进行控制. 同上取 $f = 0.0745$, 随着 η 的增加, 计算安全域边界维数的变化, 以判断受到分形边界侵蚀的安全域是否得以控制, 结果如图 4 所示. 可见当 η 增加到 0.11 时, 吸引域边界的维数由分数维变为整数 1, 此时安全域的边界是光滑的. 这表明 $q = 0.17$ 的参数的周期扰动能够用于控制受到分形侵蚀的安全域, 使系统的安全域不再受到分形边界的侵蚀, 并且增加了安全域的面积.

5 用 Melnikov 方法进行分析

上面已得到当 $q = 0.17$ 时, 一定幅度的参数周期扰动, 能够使受到分形侵蚀的安全域得以控制, 并且得到具有较大面积的安全域. 以下用 Melnikov 方法^[12, 13]对此情形加以分析, Melnikov 方法提供了一

图4 吸引域边界的维数随着 η 的变化曲线

种检验是否存在混沌运动的分析工具,同样也可用来判断是否存在分形的吸引域边界^[14]。(3)式可以化为

$$\begin{cases} \dot{x} \\ \dot{y} \end{cases} = \begin{cases} y \\ -x + x^2 \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -\beta y - \eta \sin(\eta t)x + f \sin(\omega t) \end{cases}. \quad (7)$$

(7)式具有 $\dot{x} = f(x) + g(x, t)$ 的形式,因为 β, η, f 均为小的数,所以(7)式可以看做是对 $\dot{x} = f(x)$ 可积的 Hamilton 系统(4)的小的扰动,从而可以用 Melnikov 方法进行分析. Melnikov 距离为

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v^0(t)) \Delta g(v^0(t), t + t_0) dt, \quad (8)$$

$v^0(t)$ 是未扰 Hamilton 系统的同宿轨道,其方程见(5)式,把此式代入(8)式,有

$$\begin{aligned} M(t_0) = & -\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3 \sinh(t)}{(1 + \cosh(t))^2} \right)^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3 \sinh(t)}{(1 + \cosh(t))^2} \\ & \cdot f \sin(\omega t + \omega t_0) dt - \eta \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{3}{1 + \cosh(t)} \right) \\ & \cdot \frac{3 \sinh(t)}{(1 + \cosh(t))^2} \sin(\eta t + \eta t_0) dt \\ = & -9\beta I_1 + I_2 - \eta I_3. \quad (9) \end{aligned}$$

I_1 经过积分容易得到为 $\frac{2}{15}$, 应用留数定理,合理的选择积分路径可得到 I_2 与 I_3 :

$$I_2 = \frac{6\pi\omega^2 f \cos(\omega t_0)}{\sinh(\pi\omega)}, \quad I_3 = \frac{3\pi q^2 (1 - q^2) \cos(\eta t_0)}{\sinh(\pi q)}.$$

从而可求得 Melnikov 函数 $M(t_0)$ 为

$$M(t_0) = -\frac{6\beta}{5} + \frac{6f\pi\omega^2 \cos(\omega t_0)}{\sinh(\pi\omega)}$$

$$- \frac{3\pi\eta q^2 (1 - q^2) \cos(\eta t_0)}{\sinh(\pi q)}. \quad (10)$$

要使得不存在鞍点稳定流形与不稳定流形的同宿相交, Melnikov 函数 $M(t_0)$ 应满足 $M(t_0) < 0$, 也就是

$$\frac{6f\pi\omega^2 \cos(\omega t_0)}{\sinh(\pi\omega)} - \frac{3\pi\eta q^2 (1 - q^2) \cos(\eta t_0)}{\sinh(\pi q)} < \frac{6\beta}{5}. \quad (11)$$

要使(11)式对于任意的 t_0 都满足,则要求(11)式的左端项的最大值小于其右端项 $\frac{6\beta}{5}$, 对于 $\omega = 0.85, q = 0.17, \omega = 5q = 0.8$, 可利用 $\cos(5x) = 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x)$, 利用 Maple 进行推导, 可得到当 $\eta > 0.109$ 时 $M(t_0)$ 恒小于零, 不存在稳定流形与不稳定流形的同宿相交. 通过以上的 Melnikov 分析, 可见应用参数的周期扰动控制分侵蚀的安全域, 实质上使已经高度缠绕的稳定流形与不稳定流形不再缠绕相交, 参数的周期扰动延缓了同宿相交现象的发生.

6 安全域分形侵蚀控制的鲁棒性

在实际的物理环境中, 系统总是要承受某些噪声干扰, 因此研究具有外加噪声时这种控制方法的鲁棒性就极其重要. 下面考虑外加白噪声对控制后安全域的影响, 以讨论这种控制方法:

$$\dot{x} + \beta \dot{x} + (1 + \eta \sin(\eta t))x - x^2 = f \sin(\omega t) + \xi(t), \quad (12)$$

其中 $\xi(t)$ 是具有强度为 D 的高斯白噪声 $q = 0.17, \beta = 0.1, \omega = 0.85, \xi(t), \xi(t + \tau) = 2D\delta(t - \tau)$. 我们用文献[15]的算法对随机微分方程(12)进行积分. 对于分形侵蚀安全域得以控制的情形, 即在(12)式中 $\eta = 0.11, f = 0.0745$, 此时所对应的吸引域的边界为光滑的. 我们在控制后所得到的安全域中取 N 个轨道, $N = 10000$, 计算在所有 N 个轨道中不逃逸轨道所占比例 r 随着噪声强度的变化, 结果如图5所示. 由图5可见在小的噪声强度时, r 值近似等于 1.0, 没有太大的变化, 可见随机噪声干扰对控制后的安全域并没有显著的影响, 从而我们这种控制安全域的方法具有良好的抗外干扰的鲁棒性.

7 结 论

通过以上的讨论与分析可以得到以下的结论:

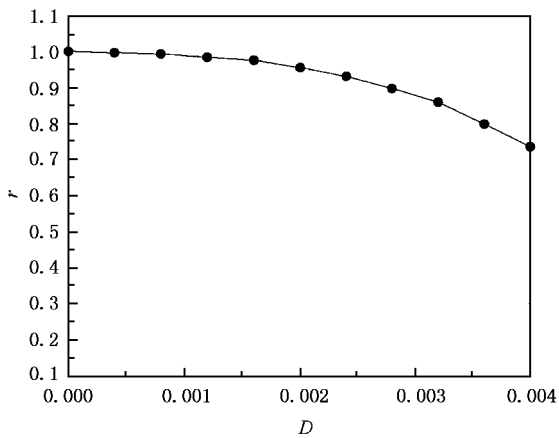


图5 安全轨道所占比例随着噪声强度的变化 $\eta = 0.11$, $f = 0.0745$

1. 通过研究具有不同频率的参数周期扰动对于一非线性系统的完全域的影响,可以得到在有些频率下的参数的周期扰动将加剧已受到分形侵蚀安全域的进一步侵蚀,而在有的频率下参数的周期扰

动将抑制安全域的分形侵蚀,对安全域起增加作用,并且存在增进安全域的最优频率。

2. 应用具有最优频率的参数的周期扰动对于已受到分形侵蚀的安全域加以控制,通过计算不同扰动幅度下安全域边界的维数,来判断安全域受到分形变界的侵蚀是否得以控制,我们得到一定程度的弱的参数周期扰动,可用来有效的控制分形侵蚀的安全域。在随后的 Melnikov 方法理论分析中,我们得到这种控制分形侵蚀安全域的方法实质上延缓了鞍点同宿相切的发生。

3. 通过考虑外加噪声对控制后的安全域的影响,我们可以得到这种控制方法具有很好的鲁棒性,提高了系统的工程完整与安全性。

我们在这里所研究的非线性振子,在一定的参数条件下能够产生 Wada 吸引域这一复杂的现象^[10,11],从而更增加了系统最终状态的不可预测性。如何消除 Wada 吸引域,提高对系统实际最终状态的可预见性,将是我们进一步工作的方向。

[1] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Physica*, **D17** (1985), 125.
 [2] J. Simitses, *Dynamic stability of suddenly loaded structures* (Springer, Berlin, 1990).
 [3] M. T. Thompson, G. W. Hunt, *Elastic instability phenomena* (Wiley, Chichester, 1984).
 [4] M. A. Rubio, M. Dela Torre, J. C. Antoranz, *Physica*, **D36**(1989), 92.
 [5] M. Falzarano, S. W. Shaw, A. W. Troesh, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **2**(1992), 101.
 [6] N. Virgin, *Dyn. Static. Systems*, **A**(1989), 55.
 [7] J. M. T. Thompson, M. S. Soliman, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A428** (1990), 1.

[8] M. S. Soliman, J. M. T. Thompson, *Physical Review*, **A45**(1992), 3425.
 [9] A. N. Lansbury, J. M. T. Thompson, *Physics Letters*, **A150**(1990), 355.
 [10] H. E. Nusse, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.*, **84**(2000), 626.
 [11] H. E. Nusse, J. A. Yorke, *Science*, **271**(1996), 1376.
 [12] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and bifurcation of Vector fields* (Springer-Verlag, 1983).
 [13] S. Wiggins, *Global Bifurcation and Chaos-analytical methods* (Springer-Verlag, New York, 1988).
 [14] Moon, G. X. Li, *Physical Review Letters*, **55**(1985), 1439.
 [15] R. Mannella, *Physical Review*, **A40**(1989), 3381.

THE INFLUENCE OF WEAK PARAMETRIC PERIODIC PERTURBATION ON SAFE BASIN AND THE CONTROL OF THE FRACTAL EROSION BASIN^{*}

GONG PU-LIN XU JIAN-XUE SUN ZHENG-CE

(*Institute of Nonlinear Dynamics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 12 June 2000 ; revised manuscript received 17 December 2000)

ABSTRACT

In this paper the influence of weak parameter periodic perturbation on the safe basin of a nonlinear oscillator is studied. The results show that the fractal erosion of the safe basin is enhanced when the system is perturbed by the periodic signal at some definite frequencies. On the other hand, the fractal erosion basin is suppressed by the periodic perturbation at other frequencies, for this case there exists an optimal perturbation frequency. Furthermore, based on the obtained results, a method used to control the fractal erosion basin is presented. Melnikov's method is used to interpret this control method, and the robustness of the control of the fractal erosion basin is also discussed.

Keywords : fractal basin boundary, parameter periodic perturbation, control

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 1990172).