

一维元胞自动机随机交通流模型的宏观方程分析*

吕晓阳

(华南师范大学行政学院, 广州 510631)

孔令江 刘慕仁

(广西师范大学物理与电子科学系, 桂林 541004)

(2000 年 7 月 24 日收到, 2000 年 12 月 22 日收到修改稿)

在一维局部作用元胞自动机交通流模型中引入刹车噪声与产生、消失概率, 得到一完全随机的元胞自动机交通流模型. 利用玻耳兹曼近似, 建立了该模型的宏观动力学方程, 并对宏观方程在特殊条件下的解进行了理论分析和计算机模拟.

关键词: 元胞自动机, 交通流, Burgers 方程, 激波

PACC: 0550, 0520

1 引 言

一维元胞自动机(简称 CA)只考虑同方向运动粒子的局部相互作用, 适合于模拟高速公路或城市环路上的交通流动. Nagel 和 Schreckenberg 于 1992 年提出了 NS 模型^[1], 该模型假设所有粒子都有相同的最大速度 $V_{\max} \geq 1$, 并按相同的规则同步完成加速、随机减速和向前运动, 当选取适当的 V_{\max} 时, 可观察到真实交通流中的启动-停止波. 文献 [2] 在 NS 模型的基础上, 考虑 $V_{\max} = 1$ 的简单情况, 通过对交通流中的所有车辆引入“刹车”概率 P_b 及局部条件下的“产生”概率 P_{in} 与“消失”概率 P_{out} , 定义了一完全随机的一维 CA 交通流模型, 结果表明, 概率 P_b , P_{in} , P_{out} 对交通流状态起着决定性的作用. 本文利用玻耳兹曼近似方法建立了文献 [2] 模型的唯一象理论, 通过该模型在封闭状态下的 Burgers 方程, 进一步分析讨论了一维交通流中“激波”的产生、传播和消失的机理.

2 随机交通流模型的宏观运动方程

对于最大车速为 1 的一维有限格点 CA 交通流模型, 当引入刹车概率 P_b , 产生与消失概率 P_{in} 和

P_{out} 后, 系统的状态演化方程可表述为

$$e_i^{t+1} = e_i^t \cdot e_{i+1}^t \cdot \overline{\delta}_i^t + e_{i-1}^t \cdot \overline{e}_i^t \cdot \overline{\eta}_{i-1}^t + \overline{e}_{i-1}^t \cdot \overline{e}_i^t \cdot \xi_i^t + e_i^t \cdot \overline{e}_{i+1}^t \cdot \eta_i^t, \quad (1)$$

式中 布尔量 e_i^t 为第 i 个格点 t 时刻的状态, $e_i^t = 1$ 为有粒子, $e_i^t = 0$ 为无粒子, $\overline{e}_i^t = 1 - e_i^t$ 为布尔变量的补运算, 随机布尔变量 η_i^t, ξ_i^t 与 δ_i^t 分别描述刹车、粒子的产生与消失.

为了讨论系统的宏观性质, 本文引入非平衡系综的概念, 并将布尔变量 e_i^t 在这个系综上求平均, 记为 $\rho(x, t) = \overline{e}_i^t$, 由此得到实变量 $\rho(x, t)$, 其取值范围为 0—1, 它代表从初始状态出发, 位置 x 在时间 t 被粒子占领的平均数.

将 (1) 式改写成如下形式:

$$e_i^{t+1} = e_i^t + \overline{\eta}_{i-1}^t \cdot e_{i-1}^t (1 - e_i^t) - \overline{\eta}_i^t \cdot e_i^t (1 - e_{i+1}^t) - \delta_i^t e_i^t e_{i+1}^t + \xi_i^t (1 - e_{i-1}^t - e_i^t + e_{i-1}^t e_i^t). \quad (2)$$

对 (2) 式求系综平均, 考虑到系统尺寸充分大, $L \rightarrow \infty$, 演化时间足够长, $t \rightarrow \infty$, 随机变量与状态变量无关, 故可用它们的平均值代替公式中的瞬时值:

$\overline{\eta}_{i-1}^t \approx \overline{\eta}_i^t = 1 - P_b = \alpha$, $\xi_i^t = P_{in}$, $\delta_i^t = P_{out}$. 于是由 (2) 式得到

$$\rho(x, t+1) = \rho(x, t) + \alpha(\rho(x-1, t) - \rho(x, t)) + e_i^t e_{i+1}^t - e_i^t e_{i-1}^t - P_{out} e_i^t e_{i+1}^t + P_{in}(1 - \rho(x-1, t)) - \rho(x, t) + e_i^t e_{i-1}^t. \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 19762001)及广西壮族自治区自然科学基金(批准号: 20007017)资助的课题.

(3) 式存在二次项,故不是封闭的,为此进一步假设系统满足动力学理论的玻耳兹曼近似,即当粒子密度较小时在各个格点上粒子的平均占领数是不相关的,于是有下列关系:

$$\begin{aligned} e_{i-1}^t e_i^t &= \rho(x-1, t) \rho(x, t), \\ e_i^t e_{i+1}^t &= \rho(x, t) \rho(x+1, t). \end{aligned} \quad (4)$$

代入(3)式,得到

$$\begin{aligned} \rho(x, t+1) &= \rho(x, t) + \alpha(\rho(x-1, t) \\ &\quad - \rho(x, t)) + \rho(x, t)(\rho(x+1, t) \\ &\quad - \rho(x-1, t)) - P_{out} \rho(x, t) \\ &\quad + \rho(x+1, t) + P_{in}(1 - \rho(x-1, t) \\ &\quad - \rho(x, t) + \rho(x, t)\rho(x-1, t)). \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式为玻耳兹曼近似下的迭代方程,它能给出一维随机 CA 交通流模型的平均场解,这种解尽管缺少关联效应,但仍能反应出模型的基本物理特性.将(5)式等号左边在 t 点作 Taylor 级数展开,取到一次项,等号右边在 x 点作 Taylor 级数展开,取到二次项,并取 $\Delta t = 1$, $\Delta x = 1$,以 ρ 简记 $\rho(x, t)$,得到微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= (1 - 2\rho)P_{in} + (P_{in} - P_{out})\rho^2 \\ &\quad + (P_{in} - \alpha + (2\alpha - P_{in} \\ &\quad - P_{out})\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2}(\alpha - P_{in} \\ &\quad + (P_{in} - P_{out})\rho) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式即为模型的宏观动力学方程.方程(6)等号右边第一项与第二项为“粒子源”——产生与消失的贡献,第三项为对流项,第四项为扩散项.

3 宏观方程的解

3.1 暂近态

在方程(6)中取参数 $P_{in} = P_{out} = P_{io}$,得到简化方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= (1 - 2\rho)P_{io} - (\alpha - P_{io})(1 - 2\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha - P_{io}) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

该方程描述粒子的产生与消失达到平衡时系统状态的变化规律,若进一步取 $P_{io} = \alpha$,则得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (1 - 2\rho)\alpha. \quad (8)$$

方程(8)的解为

$$\rho = \frac{1}{2} - \frac{1 - 2\rho_0(x)}{2} e^{-2\alpha t}. \quad (9)$$

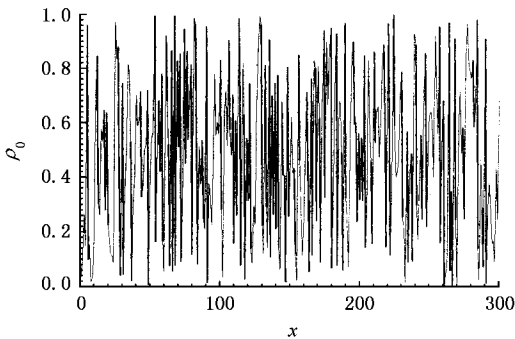
1) $\alpha = 0$,此时刹车概率为 1,同时粒子既不产生也不消失,系统维持初始状态 $\rho_0(x)$ 不变.

2) $\rho_0 = 0.5$,即初始分布处处均匀,由(9)式得 $\rho = 0.5$,系统维持初始状态 ρ_0 不变.

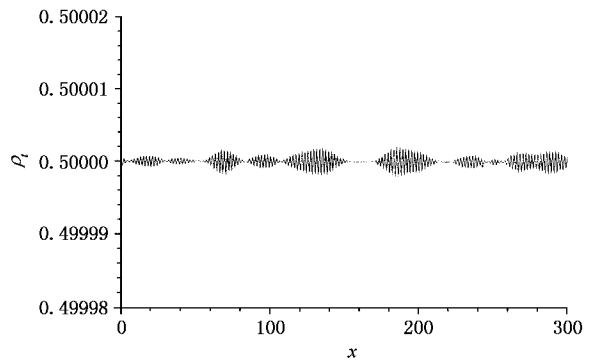
3) 一般情况下,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

(10) 式表明,不管初始状态如何,经过长时间演化后,系统将趋向均匀状态,这一性质与文献[1]的结果一致.图 1 为随机初始分布 ρ_0 按(5)式的时间演化图,系统取 $L = 300$, $P_{in} = P_{out} = 0.2$, $P_b = 0.1$,水平轴代表一维空间坐标.由图 1(b)可以看出经 50 步演化后系统的密度分布十分趋近 1/2.



(a) 初始密度分布



(b) $t = 50$ 时的密度分布

图 1 随机初始分布 ρ_0 按(5)式的时间演化图

3.2 交通激波

在方程(7)中令 $P_{i0} = 0$, 得到一个封闭的守恒系统, 方程(7)简化为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\alpha(1-2\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (11a)$$

令 $x = \alpha t' - x'$, $t = t'$, $D = \alpha/2$, 将(11a)式改写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + 2\alpha\rho\frac{\partial \rho}{\partial x'} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x'^2}. \quad (11b)$$

(11b)式与文献[3]一致, 其中文献[3]中 V_{\max} 等同于该式的 α , 表示该模型的最大速度为 $\alpha = 1 - P_b$.

令 $U = \alpha(1-2\rho)$, $D = \alpha/2$, 将(11a)式写成标准形式:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \quad (12)$$

(12)式为带有对流与扩散项的 Burgers 方程, $D = (1 - P_b)/2$ 为扩散系数, $U = \alpha((1-\rho) - \rho)$ 为“空穴”密度 $(1-\rho)$ 与粒子密度 ρ 之差, 其物理意义可理解为系统中某一点在时刻 t 的“松紧度”, $U > 0$ 为“松”, $U < 0$ 为“紧”, $U = 0$ 系统处在最佳状态.

1) 行波解

设 Burgers 方程(12)具有下列形式的行波解:

$$U(x, t) = U(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (c = \text{const.}), \quad (13)$$

并设

$$\xi \rightarrow \pm \infty, \quad U(\xi) \rightarrow U_{\pm\infty}, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} \rightarrow 0, \quad (14)$$

则可求得方程(12)的行波解为

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2}(U_{-\infty} + U_{+\infty}) - \frac{1}{2}(U_{-\infty} \\ &\quad - U_{+\infty})c \tanh \frac{x - ct}{d_0}, \\ U_{-\infty} &= c + \sqrt{c^2 + 2A}, \\ U_{+\infty} &= c - \sqrt{c^2 + 2A}, \\ d_0 &= \frac{4D}{U_{-\infty} - U_{+\infty}}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 A 为积分常数, d_0 称为激波宽度, 行波解表明在整个系统中, “松紧度”以波的形式传播, 对流使波动变陡和间断, 扩散使波动扩展, 从而使尖锐的不连续状态耗散为平滑的连续状态, 而且由(15)式可见, 扩散系数 D 越大, 平滑度越高. 从物理上理解, “松紧度”的不连续性代表阻塞的出现, 阻塞是以波的形式传播的, 这种波就是“交通激波”, 扩散的作用是抹平间断, 导致激波的消失, 使交通流变得平稳.

2) 特殊解

设初始条件为

$$\begin{aligned} \rho &= \begin{cases} 1 & -L \leq x < 0, \\ 0.5 & x = 0, \\ 0 & 0 < x \leq L, \end{cases} \\ \rightarrow U &= \begin{cases} -1 & -L \leq x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ +1 & 0 < x \leq L, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

则方程(12)在初始条件(16)式下的解可通过 Hopf-Cole 变换求得^[4]

$$U(x, t) = \frac{\sqrt{\frac{D}{t}} e^{-\frac{(x+t+L)^2}{4Dt}} (e^{\frac{x}{D}} - 1) + e^{-\frac{x}{D}} \int_{\eta_0}^{\eta_L} e^{-\eta^2} d\eta - \int_{\eta_0}^{\eta_L} e^{-\eta^2} d\eta}{e^{-\frac{x}{D}} \int_{\eta_0}^{\eta_L} e^{-\eta^2} d\eta + \int_{\eta_0}^{\eta_L} e^{-\eta^2} d\eta}, \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{t-x}{2\sqrt{Dt}}, \quad \eta_L = \frac{t+L-x}{2\sqrt{Dt}}, \\ \eta'_0 &= \frac{t-x}{2\sqrt{Dt}}, \quad \eta'_L = \frac{t+L-x}{2\sqrt{Dt}}. \end{aligned}$$

由 $U(x, t)$ 的解(17)式很容易求得 $\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = 0.5$, 其物理图景是开始阻塞的交通经过足够长的时间后, 演化为平稳的交通, 在这种情况下无激波的出现.

3.3 交通激波的进一步分析

1) 对流

首先考虑方程(11a)的对流部分:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha(1-2\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

若令

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{dJ}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \alpha(1-2\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x} = \alpha(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\alpha(\rho) = \alpha(1-2\rho),$$

$$J = \int_0^\rho \alpha(\rho) d\rho = \alpha(\rho - \rho^2) = (1 - P_b)\alpha(1 - \rho),$$

式中 J 为交通流量, 由此得到的交通基本图与文献[5]的平均场理论一致. 方程(18)就是交通流的连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

方程(19)加上初始条件 $\rho(x, 0) = f(x)$, 可通过特征方程和首次积分法求得解^[6]:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= f(x_p), \\ x(t) &= \varphi(f(x_p))t + x_p. \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式给出了方程的隐式解, $x(t)$ 称为方程的特征线, 在特征线上粒子密度处处相同.

下面讨论两种特殊情况:

$$(1) f(x) = 1 - \frac{x}{L}, 0 \leq x \leq L, \text{即在区间} [0, L]$$

内, 粒子密度随 x 增大而减小, 平均密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\int_0^L f(x) dx}{L} = \frac{1}{2},$$

由(20)式得到

$$\rho(x, t) = 1 - \frac{x + \alpha t}{L + 2\alpha t}. \quad (21)$$

这是一种正常的交通流动, 不会发生交通阻塞.

$$(2) f(x) = \frac{x}{L}, 0 \leq x \leq L, \text{即在区间} [0, L] \text{内, 粒}$$

子密度随 x 增大而增大, 平均密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\int_0^L f(x) dx}{L} = \frac{1}{2},$$

由(20)式得到

$$\rho(x, t) = \frac{x - \alpha t}{L - 2\alpha t}. \quad (22)$$

(22)式的解其特征线在 $L/2$ 处相交, 这将引起交通流的间断, 产生交通激波. 这时由连续性方程(19)的积分形式, 可导出间断的特征线方程的速度, 即激波速度 σ 满足:

$$\sigma = \frac{dx_s}{dt} = \frac{J_+ - J_-}{\rho_+ - \rho_-}. \quad (23)$$

由(22)式取 $\rho_- = \rho(L/2, t) = 1/2$, $J_- = \alpha(\rho_- - \rho_-^2) = \alpha/4$, $\rho_+ = 1$, $J_+ = 0$, 求得 $\sigma = -\alpha/2$, 表明阻塞波以 $\alpha/2$ 的速度向后传播, 特别地若无刹车噪声, $P_b = 0$ 则 $\alpha = 1$, 阻塞波向后传播的速度为 $1/2$. 图2为初始密度按 $f(x) = x/L$ 分布的粒子系统随时间演化状态图, 竖直向下代表时间的发展方向, 阻塞波向后传播过程清晰可见.

2) 扩散

交通流中阻塞的产生和消失是同时存在的, 在阻塞区域, 阻塞的车辆数等于阻塞的宽度, 区域的尾端, 车子的到达使阻塞的数目增加, 区域的首端, 车子的离开使阻塞的数目减少; 若设 t 时刻阻塞车辆数为 n 的概率为 $P(n, t)$, 则存在关系式^[7]:

$$\begin{aligned} P(n, t+1) &= P(n, t) + \alpha(P(n-1, t) - P(n, t)) \\ &\quad - \alpha(P(n, t) - P(n+1, t)). \end{aligned} \quad (24)$$

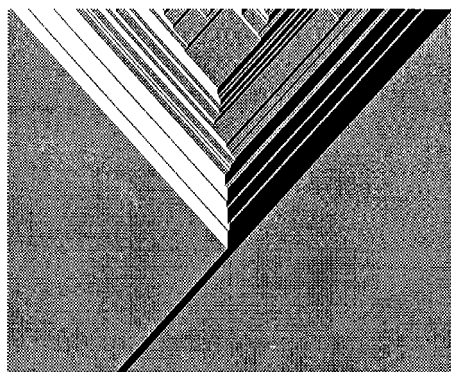


图2 粒子系统时间演化状态图

对于大的 n 和 t , 将(24)式展开到最低次项, 得

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 P}{\partial n^2}. \quad (25)$$

(25)式为一维扩散方程或一维的无规随机行走方程, 这表明阻塞生命期存在 $P(t) \propto t^{-3/2}$ 的规律. 方程(11a)中的扩散项具有同样的意义, 行波解(15)式的连续性证明了这一点, 而满足初始条件(16)式的特解(17)式更具体地说明了初始阻塞是如何消散的.

因此, Burgers 方程的对流项其实质是描述了交通阻塞的形成, 而扩散项则反应了阻塞的消失过程, 对不同的初始分布, 这两项的作用力度有很大的差别, 从而导致一些交通阻塞而另一些交通畅行的最终结果.

4 讨 论

本文从微观交通流模型出发, 通过系综平均的统计物理方法, 建立起了描述交通流密度随时间、空间变化的宏观方程, 并在封闭系统条件下, 导出了熟知的 Burgers 方程, 表明文献[2]中提出的完全随机交通流模型比较符合实际交通流中的基本规律. 在由微观演化方程(2)导出宏观方程(6)的过程中, 采用方程(4)代替粒子间的等时关联函数, 这种近似的可行性是通过限制粒子密度来保证的. 关于该模型的等时关联函数在演化过程中的作用机理, 采用文献[8]的退耦近似进行了讨论, 这将在另文中给出.

对于 NS 模型, $V_{\max} = 1$ 具有特殊的意义, 因为对于任意的刹车概率 P_b , 微观模型可以精确求解. 本文得到的宏观方程描述的是具有“正源”及“负源” $V_{\max} = 1$ 的 NS 模型, 当不考虑“源”时其基本图与平均场结果一致. 对于 $V_{\max} > 1$ 的 NS 模型的宏观方程

我们将作进一步的研究.

- [1] K. Nagel ,M. Schreckenberg ,*J. Phys. France* **2**(1992) 2221 .
- [2] X. Y. Lü *et al.* ,*Acta Physica Sinica* **47**(1998) ,1761(in Chinese)
[吕晓阳等 ,物理学报 **47**(1998) ,1761].
- [3] D. Chowdhury ,L. Santen ,A. Schadschneider ,*Physics Reports* ,**329**
(2000) ,199 .
- [4] M. D. Su ,S. Y. Huang ,*Computational Fluid Mechanics* (Tsinghua
University Press ,Beijing ,1997 [in Chinese] 苏铭德、黄素逸 ,计
算流体力学基础 [清华大学出版社 ,北京 ,1997]).
- [5] M. Schreckenberg ,A. Schadschneider ,K. Nagel ,N. Ito ,*Phys. Rev.* ,
E51(1995) 2939 .
- [6] L. S. Jiang *et al.* ,*A Lecture of Partial Differential Equations* (High-
er Education Press ,Beijing ,1997 [in Chinese] 姜礼尚等编著 ,偏
微分方程选讲 [高等教育出版社 ,北京 ,1997]).
- [7] K. Nagel ,M. Paczuski ,*Phys. Rev.* ,**E51**(1995) 2909 .
- [8] B. H. Wang *et al.* ,*Acta Physica Sinica* **47**(1998) 906(in Chinese)
[汪秉宏等 ,物理学报 **47**(1998) 906].

ANALYSIS ON MACROSCOPIC EQUATION TO ONE-DIMENSIONAL RANDOM TRAFFIC FLOW MODELS*

LÜ XIAO-YANG

(*Public Administration Institute ,South China Normal University ,Guangzhou 510631 ,China*)

KONG LING-JIANG LIU MU-REN

(*Department of Physics and Electronic Science ,Guangxi Normal University ,Gulin 541004 ,China*)

(Received 24 July 2000 ;revised manuscript received 22 December 2000)

ABSTRACT

By introducing a break noise ,create and disappear probability ,we obtain a wholly stochastic cellular automaton traffic model. Through studying its microscopic evolution rule ,we build its macroscopic dynamical equation under the Boltzmann approximation. We analyzed the solution of the equation under special conditions and did some computer simulation experiments.

Keywords : cellular automation , traffic flow , Burgers equation , shock wave

PACC : 0550 , 0520

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 19762001) , and the Natural Science Foundation of Guangxi Zhuang Autonomous Region ,China(Grant No. 20007017).