

一个一维周期驱动哈密顿系统的实例及混沌控制^{*}

李 伟¹⁾ 陈式刚²⁾

¹⁾ 中国工程物理研究院北京研究生部, 北京 2101 信箱, 北京 100088)

²⁾ 北京应用物理和计算数学研究所, 北京 100088)

(2001 年 1 月 13 日收到, 2001 年 3 月 9 日收到修改稿)

提出一种新的周期驱动非线性不可积哈密顿系统模型, 并对其特性进行了讨论. 通过简单的非反馈控制装置对这一系统进行混沌控制, 将其混沌轨道分别控制在周期、准周期及指定混沌轨道上. 与以往的控制方法不同的是, 控制项仅是一结构简单、可调节的限位装置. 为保守系统混沌控制的实际应用提供可供选择的途径.

关键词: 哈密顿系统, 混沌控制

PACC: 0545

1 引 言

自从 Ott, Grebogi, 和 Yorke (OGY)^[1] 的开拓性工作, 提出的闭环控制技术控制系统的混沌, 有关非线性系统的混沌控制的研究引起人们的普遍关注^[2-8]. 近来的一些工作涉及对保守系统混沌的研究及保守系统的混沌控制^[9,10], 特别是周期驱动保守系统的混沌控制^[11]. 在这些工作中, 一般都选择一些经典的周期驱动保守系统, 例如 Morse 振子, Duffing 振子等作为受控保守系统模型, 但是目前可供选择的这类模型却并不太多, 或选择其他的保守系统, 如 Sprott^[12,13] 通过扫描参数空间得到的三维保守系统, 然而这类模型没有明确的物理背景, 控制其混沌仅停留在理论探讨上. 因此寻找适当的周期驱动非线性保守系统模型并进行混沌控制是一项有实际意义的工作.

如果说耗散系统中的混沌研究有重要的实际意义的话, 那么保守系统混沌运动的研究还具有基本的理论意义. 对保守系统的混沌控制一般采取反馈(闭环)控制或非反馈(开环)控制, 前者一般使系统成为耗散的, 而后者可以是耗散的(如本文将要讨论的情形), 也可以仍然是保守的, 比如周期脉冲控制^[14]. 具有周期性时间依赖关系的哈密顿系统特别适合于研究系统从规则到混沌区的转变, 因为系统的动力学行为由哈密顿方程决定, 它的相空间流型

是保体积的. 特别是, 如果哈密顿系统时间依赖项能被孤立出来(例如 Morse 振子或标准映象), 它的周期和振幅都容易得到控制, 由此可以方便的控制非线性共振区的结构. 而非时间依赖性的哈密顿系统(例如 Henon-Heiles 模型)却没有这种简单的特性. 一个依赖于时间, 具有 N 自由度的哈密顿系统, 通过正则变换等价于 $N+1$ 自由度的系统, 如果原系统哈密顿量是时间的周期函数, 在新的哈密顿系统中, 时间扮演着类似于角变量的角色.

对于单自由度的时间周期哈密顿系统, $H(p, q, t) = H(p, q, t + \tau)$, 这里 τ 是系统周期, 情况更加简单一些, 其 Poincare 截面就是系统的一个闪频图象, 具有形式

$$H(p, q, t) = H_0(p, q) + \epsilon H_1(p, q, t) \quad (1)$$

的非线性哈密顿系统一般适合 Kolmogorov-Arnol'd-Morse (KAM) 理论的条件, 这里 $H_0(p, q)$ 表示一个可积系统, 而 $\epsilon H_1(p, q, t)$ 是可由 ϵ 控制的微扰项, 当 ϵ 很小时, 这一项是微小的, 因此, 这种系统非常适合于用来研究从规则的可积系统到不可积混沌系统的转变以及对不可积混沌系统的混沌控制.

2 模型的建立及数值计算

本文提出一种新的一维周期驱动非线性哈密顿振子简单模型, 考虑一个被约束于垂直平面内一维

^{*} 国家攀登计划非线性科学基金、国家自然科学基金(批准号: 19920003)及中国工程物理研究院基金(批准号: 02222440)资助的课题.

单位圆环上非阻尼受迫振动振子 ,如图 1 所示¹⁾。由于重力项是非线性的 ,它是一个非线性哈密顿振子。在周期外力场的作用下 ,由于非线性共振 ,将产生混沌轨道。取质量 $m = 1$,势函数为 $V_0 = -g\cos q + \frac{1}{2}k(q - q_1)^2$,这里 g 表示重力场 , k 表示弹性系数 , q_1 表示弹簧的自然长度 , q, p 分别表示振子的位置(用弧度表示)和动量 ,哈密顿函数可以写为

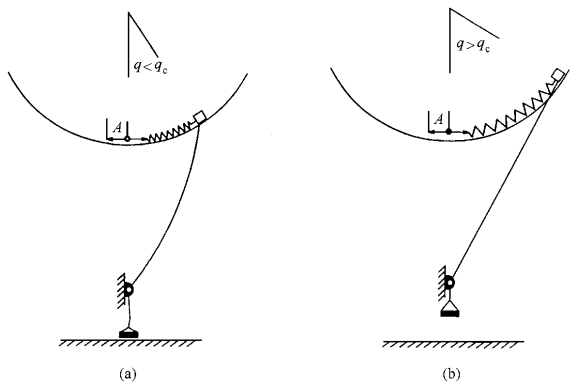


图 1 非线性振子及控制装置 (a)为自由状态 (b)为控制状态

$$H = \frac{p^2}{2} - g\cos q + \frac{1}{2}k(q - q_1 - A\cos(\omega_0 t))^2, \quad (2)$$
 A, ω_0 分别表示周期强迫外力的振幅和频率。重新标度后 , $k \rightarrow \frac{k}{g}, t \rightarrow \sqrt{g}t, p \rightarrow p/\sqrt{g}, \omega_0 \rightarrow \omega_0/\sqrt{g}$,运动方程可以写为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\sin q - k(q - q_1 - A\sin\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3)$$

设 $k = 0.2048, q_1 = \pi/3$,当振幅 $A = 0$ 时 ,系统是可积的 ,但是当 $A > 0$ 时 ,它是不可积的 ,强迫振动外力引起相空间的非线性共振 ,在相空间共振重叠区 ,相空间流型包含混沌轨道。共振区的大小尺寸及分布由未受扰动的哈密顿系统 $H_0 = \frac{p^2}{2} + V_0 = E_0$ 的结构来决定。未受扰动的哈密顿系统 H_0 的相空间闪频轨道图象如图 2(a)所示(每隔时间 $\Delta t = 5.14$ 取样一次 ,除图 4(a)外 ,本文中其他图形都如此)。可以看出它具有类似 Duffing 振子双井势的结构(与 Duffing 振子不同的是它不具有左右对称的结构)相空间具有两个椭圆不动点 ,分别对应势能

小值 E_1, E_3 ,双曲不动点对应中间极大值 E_2 (不稳定平衡点)。如果能量 $E < E_2$,左右两个包含椭圆不动点的区域由分界线分隔开。

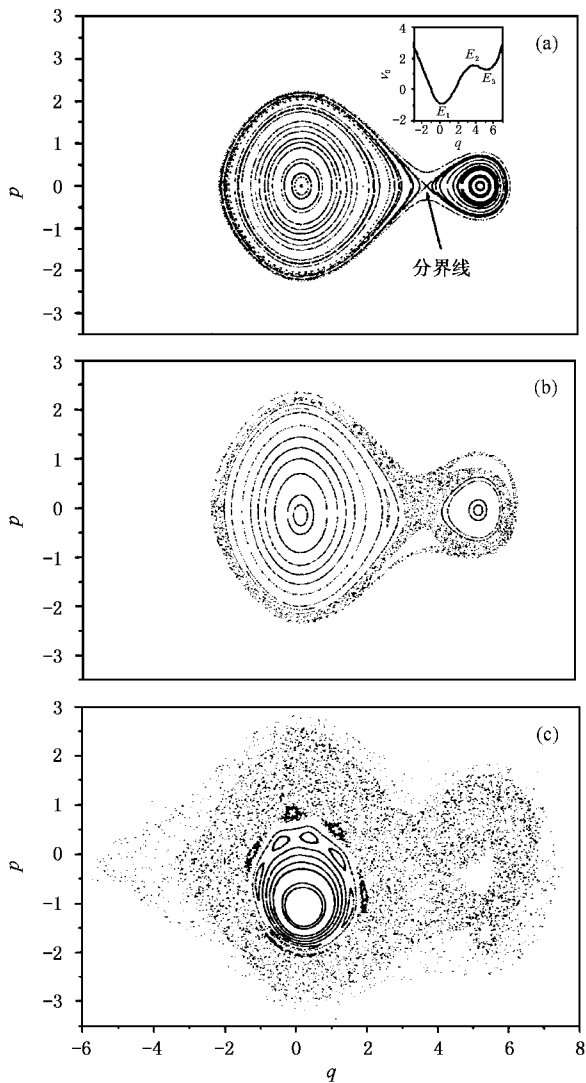


图 2 (a)为未受扰动的哈密顿系统 H_0 的相空间轨道闪频图象 ,参数为 $k = 0.2048, q_1 = \pi/3$,每隔时间 $\Delta t = 5.14$ 取样一次 ,右上方小图表明 q 与势能 V_0 的关系 ,分界线对应能量 E_2 (b)为当 $A = 0.10$ 时 ,在分界线邻域存在混沌轨道 ,其余大部分相空间保持为 KAM 曲面 ,类似于未扰动情况 ,系统参数同(a) ,外力强迫振动频率 $\omega_0 = 1.16$ (c)为 $A = 1.25$ 时的情形 ,以椭圆不动点为中心形成规则轨道区 ,在其边缘可以看到由 5 个岛和 6 个岛构成的链 ,在他们之间由 KAM 曲面所隔开。在这之外 ,轨道是完全混沌的 ,系统其他参数同(a)。

原则上讲 ,一维哈密顿系统总是可以通过正则变换变换到作用-角变量 (J, θ) 坐标的。作用量 J 为守恒量能量 E_0 的函数 ,轨道的频率为 $\omega = \partial E_0 / \partial J$,

¹⁾不包括由细线、轻质滑轮及附加质量 Δm 组成的混沌控制部分 ,见后文。

位置 q 或动量 p 的时间系列包含所有 ω 及其谐波的贡献, 对于一个给定的轨道, J 是恒定的, $\theta = \omega t + \theta_0$, θ_0 为初始角度. 如将 $q(t)$ 展开为 Fourier 级数, $q(t) - q(0) = B_0(J) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(J) \cos(n\omega t)$, 当加入外力场时, 它与谐波 $n\omega$ 产生共振. 因为 ω 是能量 E_0 的函数, 当能量变化时共振频率随之改变, 因此产生非线性共振.

与 Duffing 振子的情况类似, 在分界线的邻域内, 由于自然频率 ω 趋于零, 其谐波 $n\omega$ 密度较大, 在这一区域内可以聚集大量的共振带, 因此只要 $A > 0$, 这一邻域内总是存在混沌轨道, 如图 2(b) 所示. 直观看来, 在分界线的邻域内, 由于存在不稳定平衡点 E_2 , 轨道是不稳定的, 因此特别容易受到外力的扰动. 当 $A = 0.10$ 时, 除分界线的邻域外, 大部分相空间保持为 KAM 曲面, 类似于未扰动的情况.

因为共振条件是 $\omega = \omega_0/n$, 当 A 逐渐增加, 从分界线的邻域开始, 由于相邻主共振带相互重叠, KAM 曲面相继破裂, 以左边椭圆不动点为中心, 由外向内, 相空间中越来越多的区域成为混沌的, 但是, 对应最小能量 E_1 附近的区域内, 满足共振条件的主共振带间隔较大, 不容易发生相互重叠, 因此相空间结构基本保持不变, 靠近中心的转数为无理数 (KAM 环) 的不变圆在受扰时仍保持其拓扑结构, 只是相对于原相空间其形状及位置偏离了未受扰的圆. 值得注意的是, 这是一维驱动保守系统 (具有势能平方项) 混沌轨道的一个共同的特点, 例如描述交叉储存环中质子运动的 Henon 映象^[15,16], 当表示非线性项强度的参量增加时, 混沌轨道的区域也是以稳定椭圆不动点为中心, 逐渐由外向内扩展的. 在中心规则区与混沌海交界的区域, 相邻主共振带相距较近 (但可能还未发生相互重叠), 容易观察到由非线性共振引起的复杂的相空间结构. 根据 Poincaré-Birkhoff 定理, 在有理转数及其邻域处, 受扰后形成以椭圆不动点为中心的周期岛的链, 在椭圆点相间地存在同数目的双曲点, 在双曲点的邻域存在同宿点、异宿点, 及被 KAM 曲面所限制的混沌区, 在无理转数 (KAM 环) 及其邻域处, 保持拓扑结构不变. 图 2(c) 可以清楚地看到 5 个岛和 6 个岛构成的链, 在它们之间由 KAM 曲面 (或是相应的 Cantor 环面) 所隔开.

3 混沌控制

下面我们讨论对这一系统的混沌进行控制. 在保守系统的混沌控制中, 选择合适的控制项是一个关键的问题. 控制项的加入使整个系统复杂化, 为了控制住系统的混沌轨道, 往往控制项的复杂性就超过了被控系统本身^[17], 虽然有些控制项采取比较简单形式, 例如延时控制, 但是导致系统总的维数增加^[7]. 自然, 在实际应用中, 总是希望控制项可以尽可能的简单, 例如对原系统增加简单的非反馈控制装置^[18], 在实际控制过程中被证明是有效的. 我们的计算中, 控制混沌的装置是一个简单的限位装置, 见图 1, 它比被控系统更加简单一些. 通过一根连线连接一附加质量 Δm 到这一振子上, 当 $t = t_c$ 时, $|q| = q_c$, 连线被拉紧, 直到条件 $|q| > q_c$ 不被满足. 即当满足 $|q| > q_c$ 时, 将振子质量改变为 $1 + \Delta m$, 但是在 $t = t_c$ 时, 振子动量的改变量为 $\Delta p = -\frac{\Delta m}{1 + \Delta m} p$. 控制强度通过 Δm 及 q_c 调节, 当 Δm 比较小而 q_c 有较大值时, 控制强度较小. 因为只有当 $|q(t)| > q_c$ 时, 控制项才起作用, 而且只能控制 $|q_{\max}| > q_c$ 的轨道. 在受控情况下, 运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p + \Delta p \delta(t - t_c), \\ \dot{p} &= -\sin q - \frac{k}{1 + \Delta m \Theta(q)} (q - q_1 - A \sin \omega_0 t) \quad (4) \end{aligned}$$

其中 $\Delta p = -\frac{p \Delta m}{1 + \Delta m}$, $\Theta(q) = \begin{cases} 1 & |q| \geq q_c \\ 0 & |q| < q_c \end{cases}$. 控制

项可以起到耗散能量的作用, 它使整个系统成为耗散的. 控制的目的是利用它的耗散性质在哈密顿系统中选出低周期 (或低动能) 的椭圆形周期轨道. 耗散系统在动力学方面与保守系统具有不同的特征, 由于耗散作用, 相空间体积在演化过程中会逐渐缩小, 因此处于不同初始条件的系统在经历一段时间的暂态过程后, 会收敛进入同一个或不同的吸引子中. 我们用数值模拟的方法对参数为 $k = 0.2048$, $q_c = \pi/3$, $\omega_0 = 1.16$, $A = 1.25$ 的系统进行了系统的数值计算, 当控制参数 $2.16 < q_c < 2.53$, $0.06 < \Delta m < 0.1$ 时, 至少存在如图 3 所示的 4 个稳定的周期、准周期、以及混沌吸引子轨道, 当 $q_c < 2.16$ 时, 存在更加靠近中心不动点的准周期轨道, 但由于控制强度较大 (对系统的影响也较大), 在此不加讨论. 受控系统表现出耗散系统的一般特征. 通过调整开始控制点的位置 q_c 及附加质量 Δm 的大小, 对于一般的初始状态, 系统会经过几十到几百个驱动周期时间的暂态过程后, 分别收敛于这些轨道上.

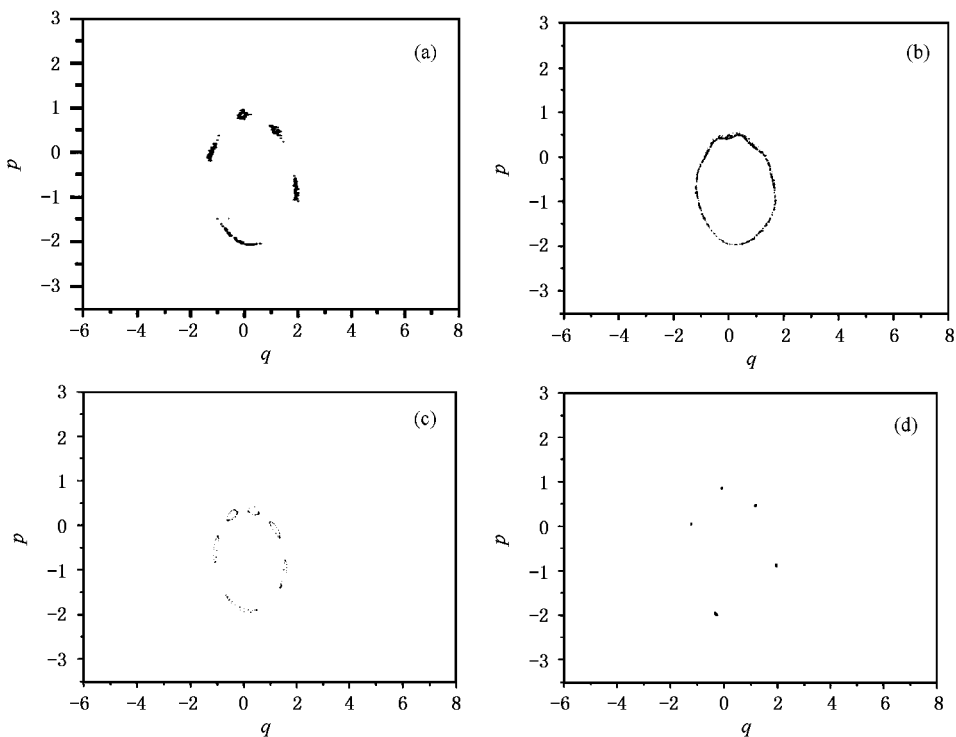


图3 对图3(c)所示混沌轨道的控制 (a)为轨道初始条件 $q_0 = 2.5, p_0 = -4.0$, 控制参数为 $q_c = 2.355, \Delta m = 0.1$, 相当于在 135° 的位置加入控制, 结果将混沌轨道控制在5个规则岛构成的链上 (b)为轨道初始条件 $q_0 = 2.5, p_0 = -4.2$, 控制参数为 $q_c = 2.268, \Delta m = 0.06$, 即在 130° 位置加入控制, 可以将混沌轨道控制在如图所示的准周期轨道上 (c)为轨道初始条件 $q_0 = 2.5, p_0 = -4.0$, 控制参数为 $q_c = 2.18(125^\circ), \Delta m = 0.1$, 轨道被控制在由6个规则岛构成的链上 (d)为当初始条件取为 $q_0 = 1.0, p_0 = 3.0$, 控制参数为 $q_c = 2.17(124.5^\circ), \Delta m = 0.06$ 时, 则将其控制在5周期轨道上, 计算中取步长为0.02, 并舍弃前5000步的暂态过程

很明显, 控制系统的吸引子不是原来系统的周期轨道. 问题是控制系统的稳定轨道与原系统轨道有什么联系. 对受控过程进行数值模拟, 首先通过控制让系统进入稳定轨道, 然后撤去控制. 我们发现在撤去控制后, 系统仍然在原轨道附近运动, 例如图3(d)及图4(a)分别表示受控后的5周期轨道(实际是转数为4/5的轨道)闪频及轨迹图象. 将撤去控制后2000个周期内的轨道闪频图象图4(b)与图3(d)比较, 可以看出, 控制实际上是将系统引导到它本身的周期(准周期)轨道附近. 在图4(a)中标明了受控区域, 控制仅作用在图中 q_c 位置竖线右边的范围内, 可见耗散是很小的, 当周期驱动泵入的能量刚好与控制消耗的能量相当, 达到动态平衡时, 系统进入稳定的状态. 这说明控制的作用只是将系统引导到 Lyapunov 指数等于零的原哈密顿系统的椭圆形轨道附近, 而小的耗散很容易就将椭圆形轨道附近的 Lyapunov 指数改变为负数, 形成稳定轨道.

4 结 论

本文引入的控制项($q_c, \Delta m$)是非反馈、耗散性

的, 在控制过程中, q_c 具有较大值, 而 Δm 不到振子质量的百分之十, 这表明控制作用相对较弱, 对原系统的影响不大. 在数值模拟实验中, 我们发现在相同控制参数的情况下, 如果具有不同的初值, 可以将其控制在不同的稳定轨道上. 同样, 我们用不同控制参数将不同初值的混沌轨道控制到图3中4条稳定轨道的一个上.

一般, 在 Δm 一定的情况下, q_c 取较小值, 则能将轨道控制在图3中比较靠内更加稳定的轨道上, 当 $q_c > 2.53(145^\circ)$, 如果 $\Delta m < 0.1$, 则对从混沌海中任意取初值的轨道将无法有效控制. 控制参数的选取关系到保守系统到耗散系统转化的动力学性质, 耗散系统吸引域结构及吸引子之间转化等几个重要而艰深课题, 本文没有涉及. 另外, 在讨论中, 没有考虑到系统本身受耗散力(例如摩擦力)的影响, 也没有考虑到系统受噪声的影响, 在实际控制过程中, 必须对这些因素进行考虑, 因为前者使系统的长时间行为必定成为耗散的, 而后者影响到控制的鲁棒性. 虽然如此, 并不影响本文结果定性的意义.

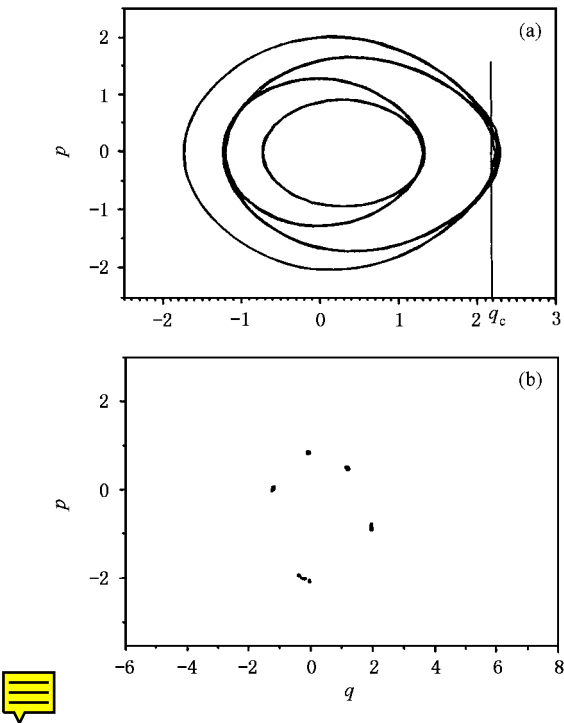


图 4 (a)表示图 3(d)的受控后 5 周期轨道(实际是转数为 4/5 的轨道)的轨迹图象,右边竖线表示每次控制起始的位置,控制仅作用在图中 q_c 右边的范围内 (b)为撤去控制后,经过 2000 个周期时间的轨道闪频图象

[1] E. Ott , C. Grebogi J. A. Yorke , *Phys. Rev. Lett.* , **64**(1990) , 1196.

[2] W. L. Ditto , S. N. Rauseo M. L. Spano , *Phys. Rev. Lett.* , **65** (1990) , 3211.

[3] E. R. Hunt , *Phys. Rev. Lett.* , **67**(1991) , 1953.

[4] R. Roy , T. W. Murphy , Jr. , T. D. Maier Z. Gills , *Phys. Rev. Lett.* , **68**(1992) , 1259.

[5] V. Petrov , V. Gaspar , J. Masere , K. Showalter , *Nature* (London) **361**(1993) , 240.

[6] A. Garfinkel , M. L. Spano , W. L. Ditto , J. Weiss , *Science* , **257**(1993) , 1230.

[7] K. Pyragas , *Phys. Lett.* , **A170**(1992) , 421.

[8] J. E. S. Socolar , D. W. Sukow , D. J. Gauthier , *Phys. Rev.* , **E50**(1994) , 3245.

[9] Y. C. Lai , M. Ding , C. Grebogi , *Phys. Rev.* , **E47**(1993) , 86.

[10] A. Oloumi , D. Teychenne , *Phys. Rev.* , **E60**(1999) , 6279.

[11] Z. Wu , Z. Zhu , C. Zhang , *Phys. Rev.* , **E57**(1999) , 366.

[12] J. C. Sprott , *Phys. Lett.* , **A228**(1997) , 271.

[13] J. C. Sprott , *Phys. Lett.* , **A266**(2000) , 19.

[14] W. Li , *Acta Phys. Sin.* , **48**(1999) , 581(in Chinese) [李 伟 , *物理学报* **48**(1999) , 581].

[15] S. G. Chen , *Map and Chaos* (National Defence Industry Press , Beijing , 1992)(in Chinese) [陈式刚 , *映象与混沌* (国防工业出版社 , 北京 , 1992)].

[16] M. A. Henon , *Math. Phys.* , **50**(1976) , 69.

[17] R. Lang , K. Kobayashi , *IEEE J. Quant. Electron.* , **16**(1980) , 347.

[18] N. J. Corron , S. D. Pethel , B. A. Hopper , *Phys. Rev. Lett.* , **84**(2000) , 3825.

AN EXAMPLE OF HAMILTONIAN SYSTEM AND CONTROLLING CHAOS WITH SIMPLE LIMITERS^{*}

LI WEI¹⁾ CHEN SHI-GANG²⁾

¹⁾*Graduate School , China Academy of Engineering Physics , P. O. Box 2101 , Beijing 100088 , China)*

²⁾*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China)*

(Received 13 January 2001 ; revised manuscript received 9 March 2001)

ABSTRACT

A new type of one-dimensional periodic ally driven Hamiltonian system(an-harmonic) has been proposed and its characteristics discussed. Chaotic dynamics in the driven oscillator is controlled using an adjustable , passive limiter(a weight for the oscillator). The chaotic trajectories of the conservative system can be controlled to some of the low periodic(or low energy) orbits . The results demonstrate that chaos control can be accomplished using controllers that are very simple relative to the system being controlled .

Keywords : Hamiltonian system , controlling chaos

PACC : 0545

^{*} Project supported by the China Natural " Scaling " Program for Nonlinear Science , by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19920003) , and by the Science Foundation of China Academy of Engineering Physics (Grant No. 20000440) .