第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1360-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.6,June,2002
©2002 Chin.Phys.Soc.

s 波超导体/绝缘层/$d_{x^2-y^2}$ 波超导体结的直流 Josephson 电流*

李晓薇 董正超 崔元顺

(淮阴师范学院物理系,淮安 223001)

(2001 年 8 月 23 日收到;2001 年 11 月 8 日收到修改稿)

在 s 波超导体/绝缘层/$d_{x^2-y^2}$ 波超导体结(s/I/d)中,考虑到结界面粗糙散射,运用 Bogoliubov-de Gennes(BdG)方程和 Furusaki-Tsukada(FT)电流公式,计算超导结中的准粒子传输系数和直流 Josephson 电流.结果表明:s/I/d 超导结的直流 Josephson 电流随温度以及结两侧的相位差变化的关系曲线强烈地依赖于 d 波超导体的晶轴方位;结界面的粗糙散射对 Josephson 电流有抑制作用.

关键词:s/I/d 超导结,$d_{x^2-y^2}$ 波超导体,直流 Josephson 电流

PACC:7450,7475

1. 引 言

近年来,含有高 T_c 氧化物超导体的 Josephson 结的研究引起了人们的极大兴趣[1—5].目前,人们普遍认为高 T_c 氧化物超导体具有 $d_{x^2-y^2}$ 波对称结构.d 波超导体与 s 波超导体的明显不同在于:d 波超导体的能隙是各向异性的,沿某些结线方向能隙可为负值或零.这种能隙的差异必然会导致 d 波超导体的 Josephson 结与传统的 s 波 Josephson 结的特性有所差异.

Geshkenbein 和 Sigrsit 等人提出 d 波超导体的 Josephson 结中 d 波配对势的内部相位要和 Josephson 结两侧的外部相位一样在结的各种效应计算需要考虑[6].这样对于 s 波超导体/绝缘层/d 波超导体构成的 Josephson 结,当 d 波超导体的 a 轴与结面垂直和 b 轴与结面垂直时,结两侧的相位差存在一个 π 相移.这种 π 相移,已被 Wollman 等在实验中测量到[7].另一方面,Hu 在文献[8]中提出 d 波超导体的表面存在零能束缚态(ZES).在正常金属-d 波超导体隧道结中存在的零偏压电导峰可以用零能束缚态理论给予解释[9,10]. Tanaka 和 Kashiwaya 等人讨论了 d 波超导体 Josephson 结的直流(dc)Josephson 电流[1—5],但对结界面的粗糙散射问题没有讨论.本文将用量子统计和格林函数方法,研究 s 波超导体/绝缘层/$d_{x^2-y^2}$ 波超导体(s/I/d)Josephson 结在考虑界面粗糙散射情况下的 dc Josephson 电流.首先,我们运用 Bogoliubov-de Gennes(BdG)方程及考虑结界面粗糙散射情况下的边界条件,计算结中准粒子的输运系数,然后再由 Furusaki 和 Tsukada(FT)提出的电流公式,计算 s/I/d 结的直流 Josephson 电流与温度 T,结两侧的相位差之间的关系,并给出数值计算结果.

2. BdG 方程的求解

我们所研究的 s/I/d Josephson 结是由两个半无穷大的超导体中间夹有一绝缘层所构成.如图 1 所示,为了计算方便,设 s/I/d 结是沿 x 轴方向的,$x>0$ 处为 s 波超导体,$x<0$ 处为 $d_{x^2-y^2}$ 混合波超导体,$x=0$ 为绝缘层.

在 s/I/d 结中,准粒子的状态可由下列 BdG 方程描述[11]:

$$\begin{bmatrix} H & \Delta \\ \Delta^* & -H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \tag{1}$$

式中 f,g 分别是超导体中波函数的二分量,上分量 f 代表电子的传播,下分量 g 代表空穴的传播.$H=$

* 江苏省教委自然科学基金(批准号:00KJB140003)资助的课题.

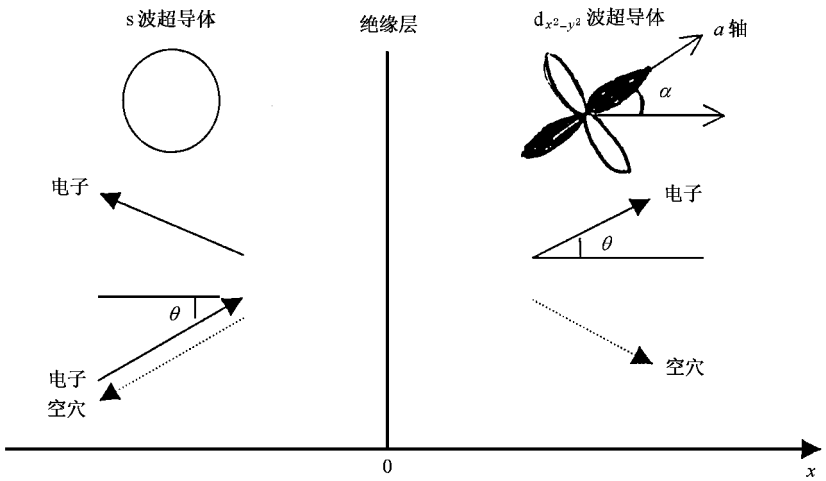

图 1　s/I/d 结示意图

$-\hbar^2\nabla_r^2/2m+U(r)+E_F$ 为单粒子的哈密顿量. E_F 结两边超导体的费米能，我们取结两边费米能相等. $U(r)$ 为结界面的散射势，当考虑结界面的粗糙散射时，由文献[12]的理论，得有效的粗糙界散射势为

$$U(r)=(H_0\hat{e}-\mathrm{i}P\tau_3)\delta(x), \tag{2}$$

$$\hat{e}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\tau_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

(2)式中 H_0 为通常势垒散射势，P 为由界面粗糙引起的散射势.

本文所研究的 s/I/d 结的超导体配对势可表示为

$$\Delta=\begin{cases}\Delta_S & x<0,\\ 0 & 0,\\ \Delta_d\cos(2\theta\pm2\alpha) & x>0,\end{cases} \tag{4}$$

式中 θ 为准粒子运动方向相对于 x 轴的夹角，α 是 d 波超导体的 a 轴与 x 轴的夹角，d 波超导体中，Cooper 对中的电子、空穴的有效配对势是不同的. 分别为 $\Delta_d(\theta_+)=\Delta_d\cos(2\theta-2\alpha)=\Delta_d|\cos(2\theta-2\alpha)|\times e^{i\phi_+}$，$\Delta_d(\theta_-)=\Delta_d\cos(2\theta+2\alpha)=\Delta_d|\cos(2\theta+2\alpha)|\times e^{i\phi_-}$，$\phi_\pm$ 是有效势的内部相位，且有

$$\phi_\pm=\begin{cases}0 & \cos(2\theta\pm2\alpha)>0,\\ \pi & \cos(2\theta\pm2\alpha)<0,\end{cases} \tag{5}$$

(4)式中 Δ_S，Δ_d 分别是 s 波和 d 波配对势的幅值，

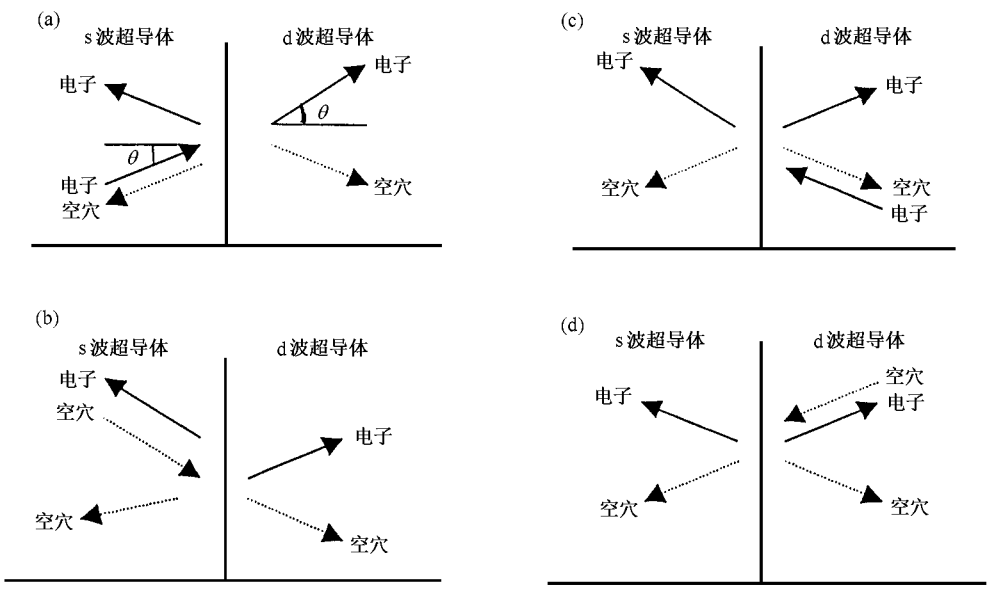

图 2　s/I/d 结中四种准粒子运动示意图

Δ_S，Δ_d 随温度 T 的变化服从 BCS 理论的变化关系为[13]

$$\Delta_S = \Delta_{S0}\tanh(1.76\sqrt{T_{SC}/T-1}), \tag{6}$$

$$\Delta_d = \Delta_{d0}\tanh(1.76\sqrt{T_{dC}/T-1}), \tag{7}$$

Δ_{S0}是绝对零度时的 s 波，Δ_{d0}是绝对零度时 d 波的最大波隙. T_{SC} T_{dC}分别是 s 波和 d 波的临界温度.

在不考虑准粒子的自旋方向的情况下，s/I/d 结中存在四种波函数，如图 2 所示.

第一种情况下波函数可表示为

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_L e^{i\phi_L} \\ v_L \end{pmatrix} e^{ik_L^+ x} + a_1 \begin{pmatrix} v_L e^{i\phi_L} \\ u_L \end{pmatrix} e^{ik_L^- x} + b_1 \begin{pmatrix} u_L e^{i\phi_L} \\ v_L \end{pmatrix} e^{-ik_L^+ x} \quad x < 0,$$

$$\psi_R = C_1 \begin{pmatrix} u_R^+ e^{i\phi_R^+} \\ v_R^+ \end{pmatrix} e^{ik_R^+ x} + d_1 \begin{pmatrix} v_R^- e^{i\phi_R^-} \\ u_R^- \end{pmatrix} e^{-ik_R^- x} \quad x > 0. \tag{8}$$

式中 a_1，b_1 分别为入射电子在结界面的 Andreev[14] 的反射波幅和电子的反射波幅，c_1，d_1 分别是电子、空穴的穿透波幅. 准粒子的传播因子为

$$k_L^{\pm} = [k_F^2\cos^2\theta \pm 2m\sqrt{(E^2 - |\Delta_S|^2)}/\hbar^2]^{1/2},$$

$$k_R^{\pm} = [k_F^2\cos^2\theta \pm 2m\sqrt{(E^2 - |\Delta_d(\theta\pm)|^2)}/\hbar^2]^{1/2}. \tag{9}$$

超导相干因子为

$$u_L^2 = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(E^2 - \Delta_S^2)/E^2}],$$

$$v_L^2 = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{(E^2 - \Delta_S^2)/E^2}]; \tag{10}$$

$$u_R^{\pm 2} = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{(E^2 - |\Delta_d(\theta\pm)|^2)/E^2}],$$

$$v_R^{\pm 2} = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{(E^2 - |\Delta_d(\theta\pm)|^2)/E^2}]. \tag{11}$$

相位因子为

$$\exp(i\phi_R^{\pm}) = \frac{\Delta_d(\theta\pm)}{|\Delta_d(\theta\pm)|}\exp(i\phi_R) = e^{i\phi_\pm}\cdot\exp(i\phi_R), \tag{12}$$

ϕ_L，ϕ_R 是结两边超导体的外部相位.

在 $x=0$ 处，波函数应满足以下边界条件

$$\psi_R|_{x=0^+} = \psi_L|_{x=0^-},$$

$$\frac{d\psi_R}{dx}\Big|_{x=0^+} - \frac{d\psi_L}{dx}\Big|_{x=0^-} = \frac{2m}{\hbar^2}(H_0\hat{e} - iP\tau_3)\psi_R|_{x=0^+}. \tag{13}$$

把(8)式代入(13)式，可求得

$$a_1(E,\phi,\theta) = [u_L v_L R_+ + Z_2 u_L v_L R_- - (u_L^2 u_R^- v_R^+ + v_L^2 u_R^+ v_R^- f_+ f_-)\cos\phi - i(u_R^+ v_R^- f_+ f_- v_L^2 - u_R^- v_R^+ u_L^2)\sin\phi]/T, \tag{14}$$

$$R_+ = u_R^+ u_R^- f_+ + v_R^+ v_R^- f_-,$$

$$R_- = u_R^+ u_R^- f_+ - v_R^+ v_R^- f_-,$$

$$T = u_L v_L(v_R^+ u_R^- e^{-i\phi} + u_R^+ v_R^- f_+ f_- e^{-i\phi}) - h_1(u_L^2 - v_L^2)R_- - Z_2 u_L^2 R_- - (h_2 + h_3 u_L^2)R_+,$$

$$h_1 = (2 + 2z + z_1^2 + z^2)/4(1 + z + z_2),$$

$$h_2 = (1 + z)/2(1 + z + z_2),$$

$$h_3 = z_2/(1 + z + z_2), \quad f_+ = \exp(i\phi_+),$$

$$f_- = \exp(i\phi_-).$$

在上面的推导中已作近似：

$$k_L^{\pm} \approx k_R^{\pm} \approx k_F\cos\theta.$$

此外

$$Z_1 = Z_{10}/\cos\theta = 2mH_0/\hbar^2 k_F\cos\theta,$$

$$Z_2 = Z_{20}/\cos\theta = 2mp/\hbar^2 k_F\cos\theta,$$

$$Z = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_2 + 4Z_2 v_R^+ v_R^- f_- /(u_R^+ u_R^- f_+ - v_R^+ v_R^- f_-),$$

Z_{10}，Z_{20}都是无量纲的实数，Z_{10}表征通常的结界面势垒散射强度，Z_{20}表征结界面的粗糙散射强度. $\phi = \phi_R - \phi_L$ 是结两边的相位差.

3. s/I/d 结直流电流的计算

由 FT 电流公式，得到 s/I/d 结的 dc Josephson 电流为[15]

$$I = \frac{\pi\cdot e\Delta_L}{h}k_B T\sum_{w_n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Omega_{nL}}[a_1(iw_n,\phi,\theta) - a_2(iw_n,\phi,\theta)]\cos\theta\cdot d\theta, \tag{15}$$

式中 $a_1(iw_n,\phi,\theta)$是把(14)式中的 E 替换为 iw_n 而得到的，$w_n = (2n+1)\pi k_B T$ 是松原函数. $a_2(iw_n,\phi,\theta)$是把 $a_1(iw_n,\phi,\theta)$中的 θ 替换成 $\pi-\theta$，ϕ_L 换成 $-\phi_L$，ϕ_R 换成 $-\phi_R$ 而得到的. $\Omega_{n,L} = \sqrt{w_n^2 + \Delta_S^2}$，$\Delta_L = \Delta_S$.

把(14)式代入(15)式，求得 α 取不同值时的 s/I/d 结的 dc Josephson 电流.

1. $\alpha = 0$ 时

$$I = \frac{e\pi\Delta_S k_B T}{h}\sum_{w_n}\left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f_1 + \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\right) f_2\right] \times \Delta_d \cos 2\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta \times \sin\phi, \tag{16}$$

式中

$$f_1 = 1/[(2h_2 + h_3)w_n^2 + \Delta_S\Delta_d\cos 2\theta\cos\phi + (2h_1 + Z_2)]\Omega_{ns}\Omega_{nd} + (Z_2\Omega_{ns} + h_3\Omega_{nd})w_n],$$

$$f_2 = 1/[-(2h_2 + h_3)w_n^2 + \Delta_S\Delta_d\cos 2\theta\cos\phi - (2h_1 + Z_2)]\Omega_{ns}\Omega_{nd} - (Z_2\Omega_{ns} + h_3\Omega_{nd})w_n],$$

$$\Omega_{nd} = \sqrt{w_n^2 + \Delta_d^2\cos^2 2\theta}.$$

由(16)式，可以作出 $\alpha = 0$ 选取不同参量时，dc Josephsonjn 电流 I 随温度 T、相位差 ϕ 的变化曲线. 首先作出取 $Z_{10} = 0$ 和 $Z_{10} = 1$，dc Josephson 电流在取各种不同 Z_{20} 下随温度 T 的变化关系，如图 3 可以看出临界电流 I_C（取 $\phi = \frac{\pi}{2}$）在温度较低时，随温度 T 的变化很小，当 T 增大接近 T_{SC} 时，激烈减小，当 T 增大到 T_{SC} 时，Δ_S 消失，I_C 也随之减为零. 当结界面的势垒和粗糙散射强度增大时，由于结界面的这两种散射对 Andreev 反射都有抑制作用，从而降低 dc Josephson 电流. 在图 4 中，取 $Z_{10} = 0$ 和 $Z_{10} = 2$，作出 dc Josephson 电流取不同 Z_{20} 时随结两侧相位差的变化关系. 可以看出 $\alpha = 0$ 时，I 的振荡周期是 2π，从图

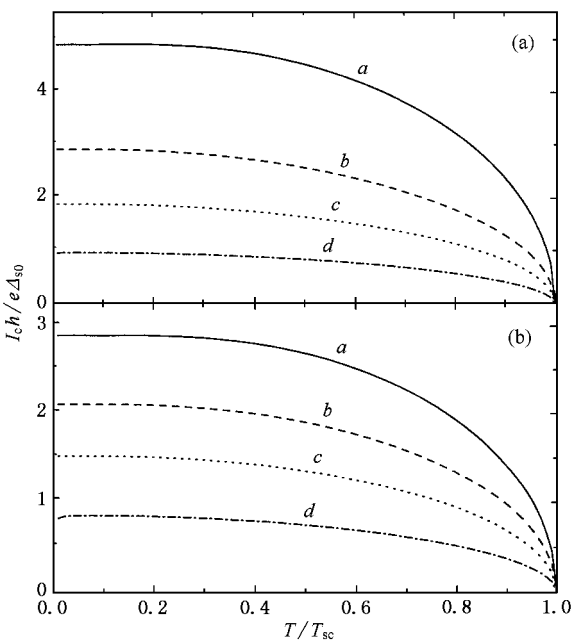

图 3　Josephson 临界电流随温度 T 的变化曲线（取 $\alpha = 0$，$\varphi = \pi/2$. (a) $Z_{10} = 0$. (b) $Z_{10} = 1$，曲线 a：$Z_{20} = 0$，曲线 b：$Z_{20} = 0.5$，曲线 c：$Z_{20} = 1$，曲线 d：$Z_{20} = 2$）

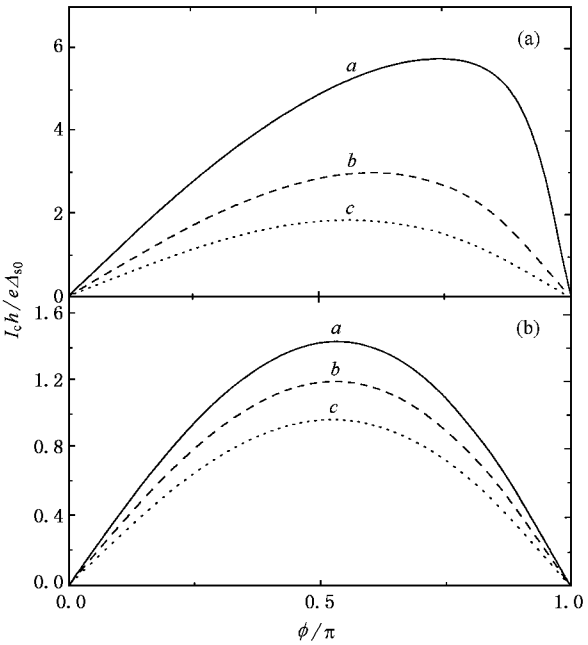

图 4　Josephson 电流随相位差 ϕ 的变化曲线（取 $\alpha = 0$，$T = 0.2T_{sc}$ (a) $Z_{10} = 0$. (b) $Z_{10} = 2$，曲线 a：$Z_{20} = 0$，曲线 b：$Z_{20} = 0.5$，曲线 c：$Z_{20} = 1$）

4 中可以看出当 $Z_{10} = 0$，$Z_{20} = 0$ 时，I 随 ϕ 的变化关系曲线不是完全的正弦曲线，有所畸变，而当界面粗糙散射强度增大时，畸变减小.

2. 当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时

$$I = \frac{e\pi}{2h}\Delta_S^2 k_B T\sum_{w_n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\Delta_d^2\sin^2 2\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta \times \sin 2\phi, \tag{17}$$

式中

$$f = 1/[|\Delta_S\Delta_d\sin 2\theta \cdot \sin\phi|^2 + |Z_2 w_n^2 + (2h_1 + Z_2)] \times \Omega_{ns}w_n + (2h_2 + h_3)\Omega_{nd}w_n + h_3\Omega_{ns}\Omega_{nd}|^2],$$

这里

$$\Omega_{nd} = \sqrt{w_n^2 + \Delta_d^2\sin^2 2\theta},$$

其余变量同上. 由(17)式，可以作出 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，取不同参量时，s/I/d 结中 dc Josephsonjn 电流 I 随温度 T、结两侧相位差的变化曲线，如图 5、图 6 所示. 从图 5 中可以看出临界线电流 I_C（$\phi = \frac{\pi}{4}$）的幅值比 $\alpha = 0$ 时有所降低，I_C 随 T 的变化曲线较陡. 由于当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时，$\Delta_d(\theta \pm) = \pm\Delta_d \cdot \sin 2\theta$，$f_+ \cdot f_- = -1$，在 d 波超导体表面有零能束缚态形成，从而导致 I_C 随温度变

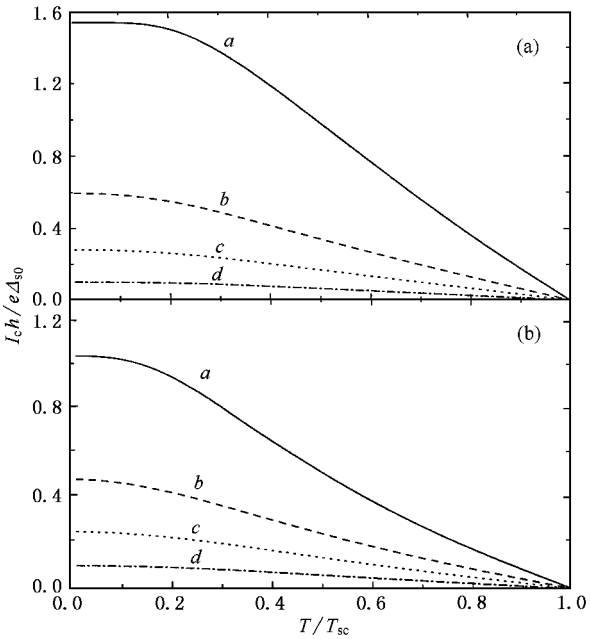

图5 Josephson 临界电流随温度 T 的变化曲线(取 $\alpha=\pi/4$, $\phi=\pi/4$. (a) $Z_{10}=0$. (b) $Z_{10}=1$, 曲线 a :$Z_{20}=0$, 曲线 b :$Z_{20}=0.5$, 曲线 c :$Z_{20}=1$, 曲线 d :$Z_{20}=2$)

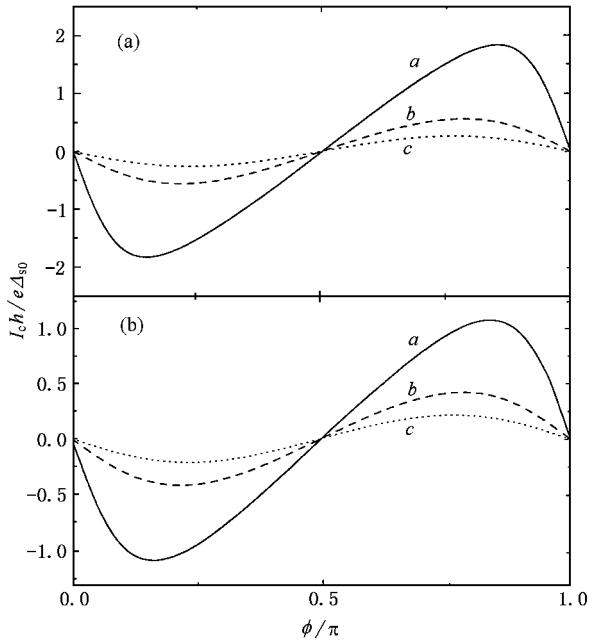

图6 Josephson 电流随相位差 ϕ 的变化曲线(取 $\alpha=\pi/4$, $T=0.2T_{sc}$ (a) $Z_{10}=0$. (b) $Z_{10}=2$, 曲线 a :$Z_{20}=0$, 曲线 b :$Z_{20}=0.5$, 曲线 c :$Z_{20}=1$.

化曲线较陡.从图6及(17)式中,可以看出 I 的振荡周期不再是 2π,而是 π,这一结论与文献[1,2]是一致的.从图5、图6同样可以看出界面的粗糙散射对 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时的 s/I/d 结中的 dc Josephson 电流有强烈的抑制作用.综上讨论可以看出:s/I/d 结的 dc Josephson 电流随温度 T、结两侧的相位差变化的关系曲线强烈地依赖于 d 波超导体的晶轴方位;结界面的粗糙散射对 Josephson 电流有抑制作用.

4. 结 论

本文讨论了 s 波超导体/绝缘层/$d_{x^2-y^2}$ 波超导体 Josephson 结的准粒子输运过程和 dc Josephson 电流,研究了 d 波超导体的轴方位和结界面的粗糙散射对 dc Josephson 电流的影响.本文的理论具有广泛的适用性,同样适用于 d/I/d, d + is/I/d 等 Josephson 结.当然,如能在我们所讨论的模型中,进一步考虑超导体表面的近邻效应,那么本文理论会更加完善,有关这方面工作,我们将在以后作进一步的讨论.

衷心感谢南京大学物理系邢定钰教授的悉心指导.

[1] Tanaka Y and Kashiwaya S 1996 *Phys. Rev.* B **53** R11957
[2] Tanaka Y 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3872
[3] Zhang Weiyi 1995 *Phys. Rev.* B **52** 3772
[4] Tanaka Y and Kashiwaya S 1997 *Phys. Rev.* B **56** 892
[5] Zhu J X, Wang Z D and Tang H X 1996 *Phys. Rev.* B **54** 7354
[6] Kashiwaya S and Tanaka Y 2000 *Rep. Prog. Phys.* **63** 1641
[7] Wollman D A *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2134
[8] Hu C H 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1626
[9] Dong Z C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 926(in Chinese) [董正超 1999 物理学报 **48** 926]
[10] Tanaka Y and Kashiwaya S 1996 *Phys. Rev.* B **53** 9371
[11] de Gennes P G 1996 *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York)
[12] Dong Z C, Xing D Y, Wang Z D and Sheng L 1996 *Z. Phys.* B **100** 329
[13] Nie Y M and Coffey L 1999 *Phys. Rev.* B **59** 11982

[14] Andreev A F 1964 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **46** 1823

[15] Furusaki A and Tsukada M 1991 *Solid State Commun.* **78** 299

The dc Josephson Current in s-ware superconductor/Insulator/ $d_{x^2-y^2}$-save superconductor junctions*

Li Xiao-Wei Dong Zheng-Chao Cui Yan-Shun

(*Department of physics, Huaiyin Normal College, Huaian* 223001, *China*)

(Received 23 August 2001; revised manuscript received 8 Novembre 2001)

Abstract

Using Bogoliubov-de Gennes equations and Furuski-Tsukada formula for the Josephson current, we calculate the dc Josephson current in s-wave superconductor/Insulator/$d_{x^2-y^2}$-wave superconductor junctions (s/I/d) with a rough interface. It is found that the Josephson effect depends on strongly the crystalline axis orientation of d-wave superconductor in s/I/d junction. The dc Josephson currents are suppreesed by the rough interface scattering.

Keywords: s/I/d junctions, $d_{x^2-y^2}$ wave superconductor, dc Josephson current

PACC: 7450, 7475

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Provincial Commission, China (Grant No. 00KJB140003).