

# 基于弹性控制器的混沌同步<sup>\*</sup>

关新平<sup>1)†</sup> 何宴辉<sup>2)</sup> 邬 晶<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 中国矿业大学信息与电气工程学院, 徐州 221008)

<sup>2)</sup> 燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

(2002 年 11 月 4 日收到, 2003 年 2 月 25 日收到修改稿)

利用线性输出反馈, 实现了混沌系统的弹性同步, 削弱了控制器本身不确定性的影响. 结合 linear matrix inequality 工具箱, 方便地得到了控制器的增益形式. 仿真结果表明了研究的意义及控制器的有效性.

关键词: 混沌系统, 同步, 弹性控制

PACC: 0545

## 1. 引 言

近年来混沌现象成为物理学的研究热点, 它被誉为继相对论、量子论之后又一重大发现. 混沌信号由于其对初值的极端敏感性及强类随机性而在众多科技领域中显示出潜在的应用价值. 继 Pecora-Carroll 在实验中实现混沌电路同步<sup>[1]</sup>之后, 混沌同步及其在保密通信中的应用研究引起了物理学界的广泛关注. 目前该领域的研究者已陆续提出了多种同步方法<sup>[2-10]</sup>, 如模糊<sup>[5]</sup>、神经网络同步法<sup>[6]</sup>、输出反馈方法<sup>[7]</sup>等等. 但是以上方法都存在一个共同的问题, 即在施加控制时只考虑混沌系统本身不确定性的影响, 而假设控制器是能够精确实现的. 实际上控制器与被控对象同在一个闭环中, 它同样会受到不确定性的影响, 如实际控制中模拟控制器受零点漂移等影响精确度较低, 而数字控制器的精确度则可能会受到字长的限制等等. 采用上述同步方法所设计的控制器虽然对于系统本身的不确定性可能会有较好的抑制作用, 但是对于控制器自身不确定性产生的影响却非常脆弱<sup>[11]</sup>. 由于混沌系统的“蝴蝶效应”, 这种脆弱性所导致的误差常常会恶化同步效果, 为此有必要设计弹性同步控制器, 使控制器对它本身的不确定性影响有一定的容忍度. 目前一些学者对于线性系统中弹性控制问题进行了研究<sup>[12,13]</sup>, 但对于混沌同步中此类控制器的设计问题还没有相关结果.

本文利用输出反馈方法构造一类混沌系统的同步控制器, 并使之具有一定的弹性, 通过求解 linear matrix inequality (LMI) 得到反馈控制器的增益形式. 其中输出反馈方法简单实用, 易于实现且无需计算响应系统的条件 Lyapunov 指数. 对适合保密通信的蔡氏电路进行了弹性同步控制的数值计算研究, 结果表明了该方法的有效性.

## 2. 系统描述

考虑如下具有输出反馈形式的连续混沌系统作为驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(y), \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $y \in R$  为系统的输出,  $x \in R^n$  为系统的状态向量,  $A, C$  为已知的适当维数矩阵,  $f \in R^n$  为混沌系统的非线性部分, 它是系统输出的函数. 系统(1)有从初始状态  $x(0) = x_0$  起始的惟一解, 且这个解被定义在区间  $[0, \infty)$  上.

假设 矩阵对  $(C, A)$  是可观的.

事实上, 系统模型(1)代表相对较广泛的一类混沌系统, 易知 Duffing 方程和一些蔡氏电路、细胞神经网络超混沌系统、M-G 时滞混沌系统等等都满足方程(1)的形式. 其他一些混沌系统如著名的 Lorenz 系统等虽不能直接写为上述形式, 但可以通过微分同胚技术化为上述形式.

\* 国家自然科学基金(批准号 60272031)及河北省自然科学基金(批准号 601225)资助的课题.

† E-mail: xpguan@ysu.edu.cn

本文利用线性输出反馈实现驱动系统和响应系统的同步化. 取  $y$  作为驱动标量信号, 考虑到控制器所受到的不确定性影响, 响应系统方程具有如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(y) + (K + \Delta K)(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = C\hat{x}, \end{cases} \quad (2)$$

其中反馈增益是以  $(K + \Delta K)$  形式出现. 这是一个很普遍的问题, 较之增益为  $K$  更具有实际意义, 至少有两个原因可以说明这个问题. 1) 如大量计算过程中模/数转换存在固有不精确性, 字长有限性使控制器的精确实现受到一定的限制, 因此在设计中需考虑存在非零的公差范围. 2) 在实际控制中, 由于一个标量指数不可能满足一个控制系统的所有性能要求, 所以在控制器的最后实现中需要另外的调整参数, 这说明任何控制器都应含有足够的空间来调整其参数.

另外, 在同步系统设计中, 系统模型本身所具有的不确定性及驱动信号在传输过程中所受的干扰也是一个重要问题. 在此为突出问题和分析的方便, 只考虑控制器本身存在不确定性的情况.

欲实现驱动系统(1)和响应系统(2)的同步, 定义系统误差  $e = x - \hat{x}$ , 使当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e \rightarrow 0$ , 则称两系统达到了同步. 这样, 同步问题便转化为误差系统的零点镇定问题.

### 3. 同步控制器设计

**3.1.  $K$  能精确实现时的混沌同步化, 即  $\|\Delta K\| = 0$**   
( $\|\cdot\|$  为欧氏范数)

由方程(1)和(2), 误差动力学系统可写为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - KC)e. \quad (3)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V = e^T P e,$$

其中  $P$  为一待定的正定对称阵, 将  $V$  对时间求导

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T P \dot{e} + e^T P \dot{e} \\ &= e^T (A^T P + PA - C^T K^T P - PKC)e. \end{aligned} \quad (4)$$

只要令

$$A^T P + PA - C^T K^T P - PKC < 0, \quad (5)$$

则  $\dot{V} < 0$ , 此时误差系统(3)将稳定在状态空间的零平衡点, 混沌同步能够实现. 为便于利用 LMI, 将(5)式作如下变形:

令  $X = PK$ , 代入(5)式, 有

$$A^T P + PA - C^T X^T - XC < 0.$$

解上述 LMI, 可得

$$K = P^{-1} X.$$

**3.2.  $K$  不能精确实现时的混沌同步化, 即  $\|\Delta K\| \neq 0$**

响应系统方程如(2)式所示, 即

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(y) + (K + \Delta K)(y - \hat{y}).$$

假设  $\Delta K$  欧氏范数有界且其上界已知, 即

$$\|\Delta K\| \leq \beta, \quad (6)$$

其中  $\beta$  为已知正常数. 由方程(1)和(2), 误差动力学系统为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - (K + \Delta K)C)e. \quad (7)$$

选取同 3.1 的 Lyapunov 函数, 并将其对时间求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T P \dot{e} + e^T P \dot{e} \\ &= e^T (A^T P + PA - C^T K^T P - PKC \\ &\quad - C^T \Delta K P - P \Delta K C)e. \end{aligned} \quad (8)$$

由不等式  $-x^T y - y^T x \leq x^T x + y^T y$  及(7)式知

$$-C^T \Delta K P - P \Delta K C \leq P \beta^2 P + C^T C,$$

所以(8)式变为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T (A^T P + PA - C^T K^T P - PKC \\ &\quad + \beta^2 P P + C^T C)e. \end{aligned}$$

只要令

$$(A^T P + PA - C^T K^T P - PKC + \beta^2 P P + C^T C) < 0, \quad (9)$$

则  $\dot{V} < 0$ , 便可以实现同步.

仿照 3.1 中的变形, 令  $X = PK$  (9)式变为

$$(A^T P + PA - C^T X^T - XC + \beta^2 P P + C^T C) < 0. \quad (10)$$

由 Schur 补引理<sup>[14]</sup>, Riccati 不等式(10)可变形为如下 LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - XC - C^T X + C^T C & \beta P \\ \beta P & -I \end{bmatrix} < 0.$$

利用 Matlab 中的 LMI 工具箱可方便地求解, 解之得

$$K = P^{-1} X. \quad (11)$$

上述得到的弹性控制器对它本身所受到的不确定性有一定的容忍性, 它的 LMI 比非弹性控制器的 LMI 要更复杂一些.

### 4. 数值算例

选取蔡氏混沌电路作为仿真对象, 它的物理意义可参阅文献[15]. 经过适当的变量和参数变换后,

系统的方程可写为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1 - f(y)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -15x_2 - 0.0385x_3, \\ y = x_1 = [1 \ 0 \ 0]x, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $f(y) = by + 0.5(a - b)(|y + 1| - |y - 1|)$  为分段线性化函数,  $a$  和  $b$  为两个负的实常数, 它们满足  $a < -1, -1 < b < 0$ , 在仿真中取  $a = -1.28, b = -0.69$ . 系统初值选为  $[x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0)]^T = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ . 此时系统是混沌的, 相空间轨迹如图 1 所示. 将方程 (12) 化为 (1) 式的形式, 很容易验证  $(C \ A)$  是一个能观对. 用输出反馈方法构造驱动系统 (12) 的响应系统:

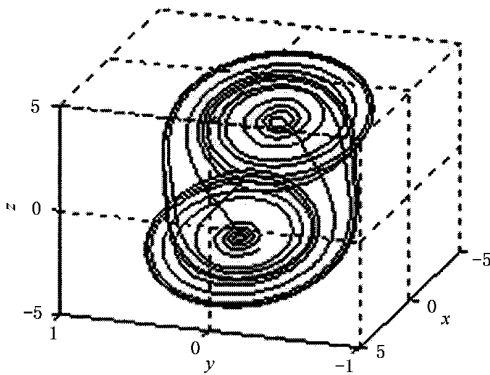


图 1 蔡氏电路相空间图

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -15 & -0.0385 \end{bmatrix} \hat{x} \\ + \begin{bmatrix} b\hat{y} + 0.5(a - b)(|\hat{y} + 1| - |\hat{y} - 1|) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ + (K + \Delta K)(y - \hat{y}), \\ \hat{y} = [1 \ 0 \ 0]\hat{x}. \end{cases}$$

取响应系统的初始状态为

$$[\hat{x}_1(0) \ \hat{x}_2(0) \ \hat{x}_3(0)]^T = [1 \ 1 \ 1]^T,$$

假定控制器所受到的不确定性影响为  $\Delta K = [-0.5 \ -0.4 \ 0.4]^T$  则  $\|\Delta K\| \leq \beta, \beta = 0.75$ .

当计算控制器增益时, 先不考虑  $\Delta K$  的影响, 求解 (5) 式中的 LMI, 可以得到反馈增益  $K = [-8.5709 \ 7.6331 \ 2.8676]^T$ . 利用上面的反馈增益, 得到的混沌系统各个状态的同步误差效果图 2 至图 7 中虚线所示. 可以看到同步误差曲线不能很

快地趋于零, 如图 2、图 4 和图 6 中虚线所示, 而且即使在同步趋于稳定之后, 误差曲线上仍不断地有突起出现, 如图 3、图 5 和图 7 中虚线所示. 说明同步的效果不是很好, 控制器存在着脆弱性. 它对于不确定性影响的容忍度较低.

在施加控制时应当考虑到控制器本身所受的不确定性影响, 设计具有弹性的控制器. 为此通过求解 (10) 式中的 LMI 得到弹性控制器增益的值,  $K = [-5.5551 \ 8.3574 \ 1.0164]^T$ , 同步的效果图分别如图 2 至图 7 中实线所示. 通过比较可以发现, 具有弹性的控制器所达到的同步效果更好, 对于控制器自身的不确定性有较好的容忍性. 相对于一般控制器(不考虑弹性), 它的暂态过程短得多, 而且在暂态调整中超调量要小得多, 如图 2、图 4 和图 6 所示. 当同步过程趋于平稳后, 观察局部放大图(图 3、图 5 和图 7)可见弹性控制器所产生的突起几乎没有, 误差曲线一直稳定于零点.

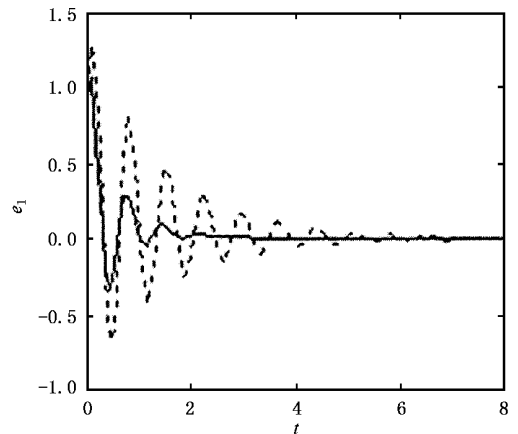


图 2  $x_1$  状态同步误差图 ..... 为一般控制器, ——为弹性控制器

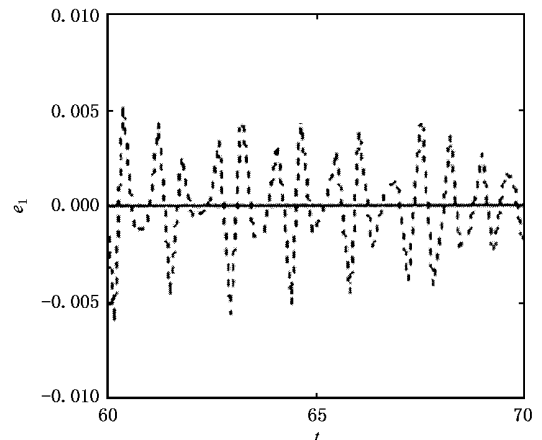


图 3 局部放大图 曲线说明同图 2

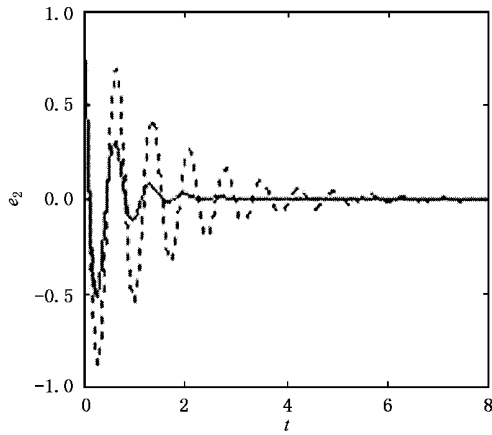
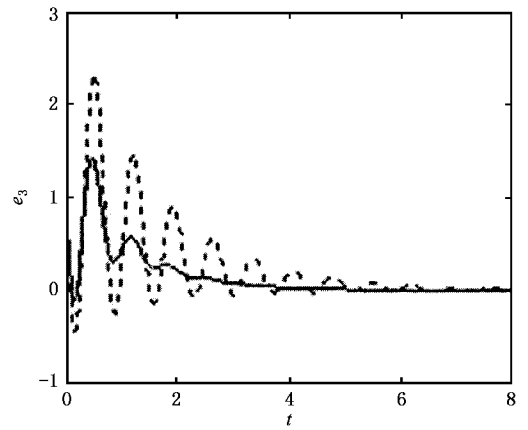
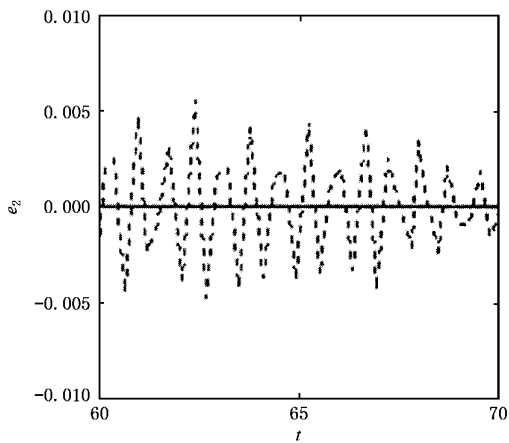
图 4  $x_2$  状态同步误差图 曲线说明同图 2图 6  $x_3$  状态同步误差图 曲线说明同图 2

图 5 局部放大图 曲线说明同图 2

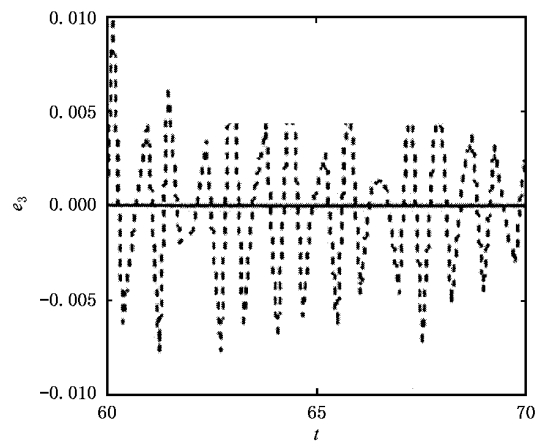


图 7 局部放大图 曲线说明同图 2

## 5. 结 论

本文将线性系统中弹性控制思想运用到混沌同

步中,设计的控制器对于控制器本身的不确定性有一定的容忍度.当不确定性的上界已知时,给出了反馈增益的设计方案.对于不确定性上界未知的情况,将是一个后续的研究问题.

- [ 1 ] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
 [ 2 ] Wang T B , Qin T F and Chen G Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1851 (in Chinese) [ 王铁邦、覃团发、陈光旨 2001 物理学报 **50** 1851 ]  
 [ 3 ] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9  
 [ 4 ] He M F *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 830 (in Chinese) [ 贺明峰等 2000 物理学报 **49** 830 ]  
 [ 5 ] Guan X P and Hua C C 2002 *Chin. Phys.* **11** 1031  
 [ 6 ] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670 (in Chinese) [ 关新平等 2001 物理学报 **50** 1670 ]  
 [ 7 ] Liu F *et al* 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 723

- [ 8 ] Tao C H , Lu J A and Li J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [ 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497 ]  
 [ 9 ] Guan X P *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [ 关新平等 2003 物理学报 **52** 276 ]  
 [ 10 ] Chen S H , Zhao L M and Liu J 2002 *Chin. Phys.* **11** 543  
 [ 11 ] Keel L H and Bhattacharyya S P 1997 *IEEE Trans. Automatic Control* **42** 1098  
 [ 12 ] Yang G H *et al* 2000 *Linear Algebra and Its Application* **312** 161  
 [ 13 ] Famularo D *et al* 2000 *Int. J. Control* **73** 1500  
 [ 14 ] Mahmoud M S 2000 *Automatica* **36** 627  
 [ 15 ] Chua L O and Lin G N 1990 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **37** 88

# Synchronization in chaotic systems based on resilient controller<sup>\*</sup>

Guan Xin-Ping<sup>1,2)</sup> He Yan-Hui<sup>2)</sup> Wu Jing<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*(Institute of Communication and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)*

<sup>2)</sup>*(Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)*

(Received 4 November 2002; revised manuscript received 25 February 2003)

## Abstract

Using the linear output feedback method, we investigate the resilient synchronization for a class of chaotic systems. The influence of uncertainties in controller itself is weakened. By the LMI (linear matrix inequality) toolbox, the resilient controller is derived conveniently. Finally, the computer simulation results illustrate the validity of the method and the importance of the research.

**Keywords** : chaotic system, synchronization, resilient control

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60272031), and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. 601225).