

耦合双 π 环的自发磁化^{*}

王 科 凌 健 谢飞翔 马 平 杨 涛 王福仁 戴远东[†]

(北京大学物理学院 人工微结构和介观物理国家重点实验室 北京 100871)

(2002 年 10 月 18 日收到 2002 年 11 月 8 日收到修改稿)

分析和计算了耦合双 π 环的自由能,结果表明当两个 π 环自发磁化方向相反时系统的能量较低,还证明了反向自发磁化是来自量子效应.

关键词:耦合双 π 环,反向自发磁化,自由能

PACC: 7475, 7400, 7490

1. 引 言

高温超导体序参量具有 d 波对称性的重要结果之一是可以构成临界电流为负的超导 Josephson 结,即通过结的电流 $I_J = -I_c \sin \varphi$,此电流也可以表示为 $I_J = I_c \sin(\varphi - \pi)$,因而这样的结常称为 π 结,插入奇数个 π 结的超导环称为 π 环.

Sigrest 和 Rice^[1]最先指出对于含有一个 π 结的超导 π 环,如果外磁场为零,当电感参数 $\beta = \frac{2\pi L I_c}{\Phi_0} > 1$ 时,超导环会产生自发磁化,并由此建议了高温超导体 d 波对称性的位相敏感实验. Tsuei^[2]等利用三晶衬底设计并制备了三结 π 环,利用扫描 SQUID 探测到了它的自发磁化,成功地完成了高温超导体 d 波对称性的位相敏感实验.他们还进一步测量了自发磁化磁通随温度的变化,发现即使在很高温度下,自发磁化磁通基本上保持在 $\Phi_0/2$ 的值,只有在很接近超导转变温度 T_c 时,才迅速减小到零^[3]. 我们已对多结 π 环自发磁化现象做了深入的物理分析和理论计算^[4],我们的研究发现多结 π 环与单结 π 环不同,即使 $\beta < 1$ 而趋近于零,多结超导 π 环都将发生自发磁化,我们还计算了自发磁化的温度关系,所得结果与 Tsuei 实验^[3]有很好的吻合. 超导 π 结和超导 π 环与普通 Josephson 结和只含有普通结的超

导环的性质有明显差别. 其研究不仅有学术上的意义,而且有可能发展新型的超导电子器件.

在含有 Josephson 结的电子器件中,有的只是在一个超导环中插入了两个超导结(de SQUID)^[5,6]或一个超导结(单孔 rf SQUID),此时如果该环是一个 π 环,则等效于在环路中附加半个磁通量子^[7]. 而另一些电子器件中具有两个或多个含结超导环. 低 T_c 双孔 rf-SQUID 是典型的双环器件,在快速单磁通量子器件中经常有多个相互耦合的含结超导环. 单个超导 π 环会发生自发磁化,如果两个 π 环通过 Josephson 结而相互耦合,有如双孔 rf SQUID 的结构,人们要问,此时两个 π 环的自发磁化是平行还是反平行. 本文计算了在外磁场为零时耦合双 π 环的自由能,结果表明当两个 π 环自发磁化方向相反时系统的能量较低. 进一步研究指出,即使忽略两个超导环的静磁通相互作用(互感为零),仍然是反向磁化能量较低,即虽然磁相互作用有利于反向自发磁化,但反向自发磁化有较低能量本质上是体系的“量子效应”.

2. 耦合单结双 π 环的自发磁化

像文献 [4] 一样,我们先从单结 π 环出发,设想如图 1 的双孔 rf SQUID 结构,其中使双环耦合的 Josephson 结是 π 结. 即通过结上的电流 $I_J = -I_c \sin \varphi$

^{*} 国家高技术研究发展计划(批准号 2002AA3126)资助的课题.

[†] 通讯联系人.

$= I_c \sin(\varphi - \pi)$, φ 为结两侧超导波函数的量子相位差.

系统的自由能

$$F = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2 + E_J, \quad (1)$$

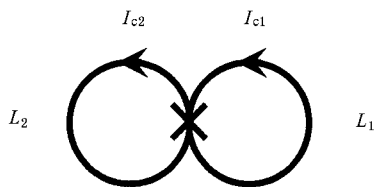


图 1 双孔 π SQUID 结构示意图

式中前两项为两个环的磁能. 第三项为二环之间的磁相互作用能, $M = K \sqrt{L_1 L_2}$ 是二环之间的互感, K 为耦合系数, 正号对应于平行自发磁化, 负号对应反平行自发磁化. 第四项 E_J 为结的 Josephson 耦合能, 对于 π 结

$$E_J = - \frac{\Phi_0 (-I_c)}{2\pi} \cos \varphi.$$

为了简单, 我们假设两个超导环的电感相同, 即 $L_1 = L_2 = L$, 由于对称性, 两环自发磁化的环流相等 $I_1 = I_2 = I$. 此时自由能为

$$F = LI^2 \pm MI^2 + \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \varphi = (1 \pm K) LI^2 + \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \beta \cos \varphi, \quad (2)$$

$\beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0}$ 为环的电感参数.

2.1. 同相自发磁化

因为平行磁距的磁相互作用能为正, 自由能公式(2)中应取正号. 此时通过 π 结上的电流 $I_j = I_1 - I_2 = 0$. 因而必须有

$$\varphi = m\pi. \quad (3)$$

当 m 取偶数时, 结上的 Josephson 耦合能 $E_J = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$ 为正; 当 m 取奇数时 $E_J = - \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$, 此时能量较低. 在任何一个环上, 超导波函数单值条件要求

$$\varphi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = 2n\pi, \quad (4)$$

Φ 为环中的磁通量, 对于如图 1 的同向自发磁化

$$\Phi = LI - MI = (1 - K)LI. \quad (5)$$

由(3)(4)(5)式可得, 自发磁化

$$LI = \frac{\Phi_0}{(1 - K)} \left(n - \frac{m}{2} \right), \quad (6)$$

能量较低的状态对应于 $n = 0$ 和 $m = \pm 1$.

此时

$$F = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1 + K}{(1 - K)^2} \pi^2 - \beta \right]. \quad (7)$$

2.2. 反向自发磁化

对于如图 2 所示的反向自发磁化双 π 环, 容易看出, 此时通过结上的电流为 $I_j = 2I$. 即 $2I = -I_c \sin \varphi$ 在任一个超导环上,

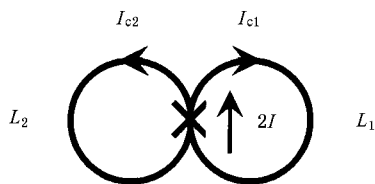


图 2 反对称耦合单结双 π 环

波函数单值化条件要求

$$\varphi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = 2n\pi. \quad (8)$$

通过该环内的磁通

$$\Phi = LI + MI = (1 + K)LI, \quad (9)$$

(9)式代入(8)式得

$$\varphi - (1 + K) \frac{\beta}{2} \sin \varphi = 2n\pi. \quad (10)$$

取 $n = 0$, 得

$$\beta = \frac{2\varphi}{(1 + K) \sin \varphi}. \quad (11)$$

由(11)式可知, $\beta \geq \frac{2}{1 + K}$, 即当 $\beta > \frac{2}{1 + K}$ 时系统才可能出现反向自发磁化.

自由能

$$F = LI^2 - MI^2 + \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \varphi = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1 - K}{(1 + K)^2} \varphi^2 + \beta \cos \varphi \right]. \quad (12)$$

由(7)(8)(11)(12)式, 可以计算出约化自由能 $f = \frac{F}{F_0}$ 的关系, 其中 $F_0 = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2$. 计算结果见图 3, 可以看出当 $\beta > \frac{2}{1 + K}$ 时, 反向自发磁化的自由能(曲线 b)比较低.

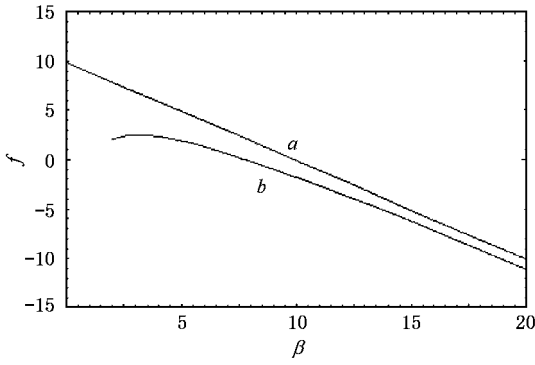


图 3 耦合单结双 π 环在 $k = 0.1$ 时同向反向自发磁化自由能比较

3. 两个相互耦合的双结超导 π 环

上节设想的单结超导 π 环在实验上无法实现, 但人们已制备出几种多结超导 π 环. 例如 Wollman^[8] 在 YBCO 单晶的 a, b 两个边界处分别制备了两个 YBCO-Pb Josephson 结, 并构成一个 DC SQUID (即角 SQUID), 它实际上是一个双结 π 环. Tsuei^[2,9] 在三晶衬底上制备了三结 π 环. 利用 Wollman 的方案我们很容易构成两个互相耦合的双结超导 π 环, 如图 4 所示. 该结构的示意图见图 5.

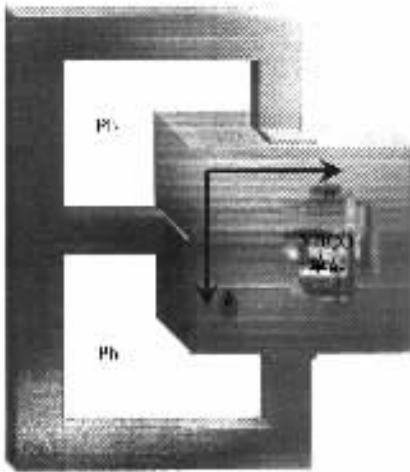


图 4 两个耦合的双结超导 π 环实验结构示意图

与上节相同, 假设两个环的电感相同, 都等于 L . 为了简单, 我们假设图 5 中两侧的 Josephson 结 (结 1 和结 3) 为普通结, 且临界电流相同为 I_c . 两个环共有的中间结 (结 2) 为 π 结, 其临界电流的绝对值为 $2I_c$, 即 $I_{c2} = -2I_c$. 由对称性可知, 两个环上的环流 I 应相等, 同时有 $\varphi_1 = \varphi_3$. 此时, 系统的自由

能为

$$F = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} LI^2 \pm MI^2 + \frac{2I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_2 - \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_1 - \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_3, \quad (13)$$

其中正号对应于同向自发磁化, 负号对应于反向自发磁化. 电感参数 $\beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0}$.

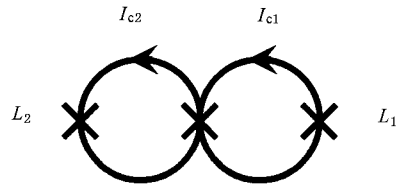


图 5 耦合双结双 π 环示意图

3.1. 同向自发磁化

如图 5 所示此时通过中间结 2 的电流为零, 因此 $\varphi_2 = 0$ 或 $\pm \pi$. 当 $\varphi_2 = \pm \pi$ 时, 结上的 Josephson 耦合能 $E_J = \frac{2I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_2$ 较低. 单个环上的超导波函数位相的单值条件要求

$$\varphi_1 - \pi + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = 2n\pi.$$

一个环内的磁通

$$\Phi = LI - MI = (1 - K)LI = (1 - K)LI_c \sin \varphi_1,$$

取 $n = 0$, 得环流

$$LI = \frac{1}{1 - K} \frac{\Phi_0}{2\pi} (\pi - \varphi_1). \quad (14)$$

φ_1 满足方程

$$\varphi_1 + (1 - K)\beta \sin \varphi_1 = \pi,$$

或

$$\beta = \frac{1}{1 - K} \frac{\pi - \varphi_1}{\sin \varphi_1}. \quad (15)$$

由 (15) 式可知 $\beta \geq \frac{1}{1 - K}$,

自由能

$$F = (1 + K)LI^2 + \frac{2I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_2 - \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_1 - \frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \cos \varphi_3 = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1 + K}{(1 - K)^2} (\pi - \varphi_1)^2 - 2\beta - 2\beta \cos \varphi_1 \right], \quad (16)$$

其中 φ_1 与 β 的关系由(15)式给出.

3.2. 反向自发磁化

如图6所示,中间结上的电流 $2I = I_{c2} \sin \varphi_2 = -2I_c \sin \varphi_2$ 流过结1(或结3)的电流为 $I_1 = I_c \sin \varphi_1$ 因而有

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_2 - \pi. \quad (17)$$

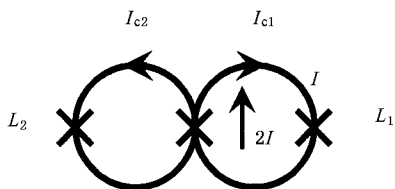


图6 耦合双结双 π 环反向自发磁化示意图

超导环上超导波函数位相单值条件要求

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = 2n\pi$$

或
$$2\varphi_1 + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = (2n - 1)\pi, \quad (18)$$

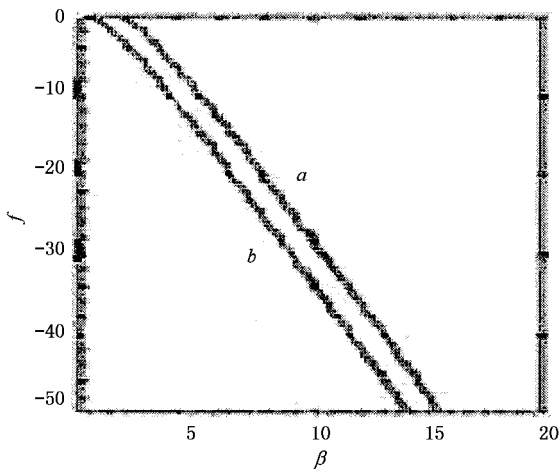


图7 耦合双结双 π 环在 $K=0.1$ 时自由能比较

环内磁通 $\Phi = LI + MI = (1 + K)LI$.

取 $n = 1$,

$$LI = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\pi - 2\varphi_1}{1 + K}, \quad (19)$$

$$\beta = \frac{\pi - 2\varphi_1}{(1 + K) \sin \varphi_1}. \quad (20)$$

自由能

$$F = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{1 - K}{(1 + K)} (\pi - 2\varphi_1)^2 - 4\beta \cos \varphi_1 \right], \quad (21)$$

式中 φ_1 与 β 的关系满足(20)式.

由(16)式和(21)式可以计算约化自由能 $f = \frac{F}{F_0}$

与 β 之间的关系.结果示于图7和图8中,计算中取 $K=0.1$ 和 $K=0.2$.结果表明反向自发磁化的自由能(曲线 b)更低.而且两环的互感越大时(K 越大)正反向自发磁化的能量差越大.这是因为当 K 增大时两环之间的磁相互作用能的差变大.

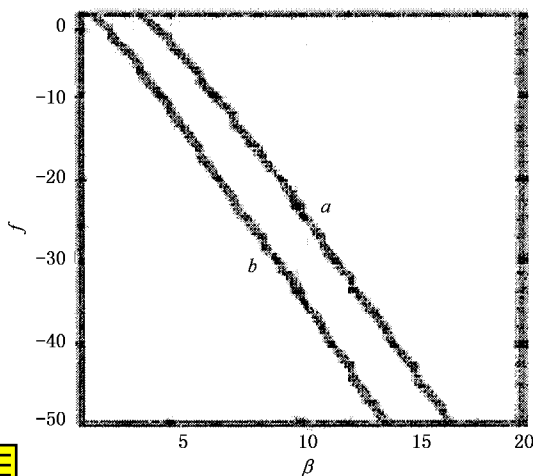


图8 耦合双结双 π 环在 $K=0.2$ 时自由能比较

4. 双环间互感为零 ($K=0$) 的情况

在系统自由能的表达式中,包括每个环自身的磁能,也包括两个环之间的磁相互作用能,后者与两环之间的互感有关.上面的结果,表明两环之间的磁相互作用能有利于使两环反向自发磁化.在系统的自由能中还包括超导结上的 Josephson 耦合能,同相自发磁化或反向自发磁化时,结上超导波函数量子相位差 φ 是不相同的,因而对自由能的贡献也不相同.如果两环之间的互感很小,可以忽略($K=0$),则两种状态的自由能之差仅来自不同相位差的贡献.我们计算了 $K=0$ 时两种状态自由能随 β 的变化.由图9和图10,可以看出此时仍然是反向自发磁化系统能量(曲线 b)较低.也就是说耦合双 π 环反向自发磁化能量较低的起因,本质上是两个超导环中超导量子波函数通过中间共有的超导结产生的位相相干引起的量子效应,并不是两环之间互感引起的静磁能,虽然静磁能也有利于反向自发磁化.

由(7)式和(12)式直接比较,就可以得到耦合单结双 π 环在 $K=0$ 时反向自发磁化自由能较低地结论.

对于同向自发磁化, 当 $K=0$ 时,

$$F = F_p = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [\pi^2 - \beta]. \quad (22)$$

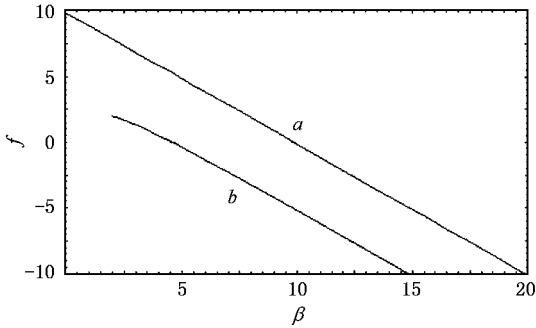


图9 $K=0$ 时耦合单结双 π 环同向反向自发磁化

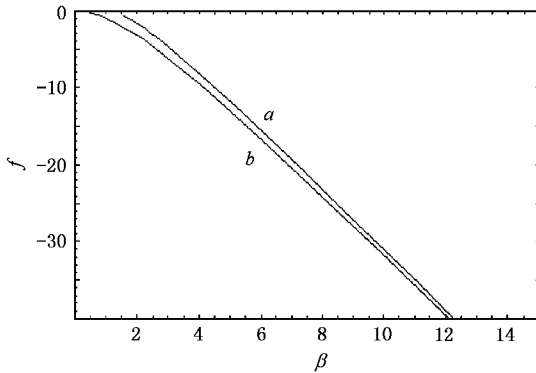


图10 $K=0$ 时耦合双结双 π 环同向反向自发磁化

对于反向自发磁化自由能的表达式(12), 当 $K=0$ 时,

$$F = F_a(\varphi) = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [\varphi^2 + \beta \cos \varphi]. \quad (23)$$

若 $\varphi = \pi$, 则 $F_a(\pi) = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [\pi^2 - \beta]$ 与同向

自发磁化相同.

(23) 式对 φ 求偏导得到

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{1}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [2\varphi - \beta \sin \varphi]. \quad (24)$$

反向自发磁化时, $\varphi = \varphi_0$ 由(11)式给出, 因而在 $\varphi =$

φ_0 时, $\frac{\partial F_a}{\partial \varphi} = 0$. 由(24)式可看出当 φ 由 φ_0 增加时,

$\frac{\partial F_a}{\partial \varphi} > 0$, 当 $\varphi = \pi$ 时, 有

$$\frac{\partial F_a}{\partial \varphi} = \frac{2\pi}{L} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2,$$

因而有 $F_a(\varphi_0) < F_a(\pi) = F_p$, 即反向自发磁化自由能更低.

进一步的计算表明两个 π 环通过中心共有结上超导波函数的位相相干作用, 对于给定的 β , 反向自发磁化具有较小的环流.

5. 结 论

对于相互耦合的两个超导 π 环, 即使忽略磁相互作用(互感系数 $K=0$), 其反向自发磁化的自由能仍低于同向自发磁化的自由能, 这是结上超导波函数位相相干的量子效应.

感谢陈赓华教授在论文修改过程中给予的有益建议.

- [1] Sigrist M and Rice T M 1992 *J. Phys. Soc. Japan* **61** 4283
 [2] Tsuei C C, Kirtly J R and Chi C C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 593
 [3] Kirtly J R, Tsuei C C and Moler K A 1999 *Science* **285** 1373
 [4] Deng P, Meng S C, Wang F R, Xe F X, Ma P and Dai Y D 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2217 [in Chinese] 邓 鹏、孟树超、王福仁、谢飞翔、马 平、戴远东 2001 物理学报 **50** 2217
 [5] Shi Y J, Yang T, Nie R J et al 2002 *Chin. J. Low Temp. Phys.* **24** 35 [in Chinese] 石玉娇、杨 涛、聂瑞娟等 2002 低温物理学报 **24** 35]

- [6] Han B, Chen G H, Xu F Z, Zhao S P and Yang Q S 2002 *Acta Phys. Sin.* **49** 2051 [in Chinese] 韩 冰、陈赓华、徐凤枝、赵士平、杨乾声 2002 物理学报 **49** 2051]
 [7] Du S W, Dai Y D and Wang S G 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2364 [in Chinese] 杜胜望、戴远东、王世光 1999 物理学报 **48** 2364]
 [8] Wollman D A, Van Harlingen D J et al 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2134
 [9] Tsuei C C, Kirtly J R 2000 *Review of Modern Physics* **72** (4)

Spontaneous magnetization of two superconducting coupled π rings^{*}

Wang Ke Ling Jian Xie Fei-Xiang Ma Ping

Yang Tao Wang Fu-Ren Dai Yuan-Dong

(*State Key Laboratory for Artificial Microstructure and Mesoscopic Physics* ,

School of Physics , Peking University , Beijing 100871 , China)

(Received 18 October 2002 ; revised manuscript received 11 November 2002)

Abstract

An analytical formula for the free energy of two coupled π rings is presented. Using the formula , the free energy is calculated for equidirectional spontaneous magnetization and inverse spontaneous magnetization of the two coupled π rings. We found that the whole system has a lower free energy in the latter case.

Keywords : coupled π rings , spontaneous magnetization , free energy

PACC : 7475 , 7400 , 7490

^{*} Project supported by the National High Technology Development Program of China (Grant No.2002 AA3126).