第 52 卷 第 9 期 2003 年 9 月
1000-3290/2003/52(09)/2206-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.9,Septemper,2003

完全可积的非线性方程建立哈密顿理论的一般方法和对 SG 方程应用*

蔡 浩[1)] 陈世荣[2)] 黄念宁[1)]

[1)](武汉大学物理系,武汉 430072)

[2)](华中师范大学数学系,武汉 430074)

(2002 年 11 月 20 日收到;2002 年 12 月 30 日收到修改稿)

完全可积的非线性方程的单式矩阵的泊松括号已知可以表为对 x 的积分,指出被积函数一定可以表为约斯特解对的直积的线性组合的微分,并可由直积矩阵相应元的对比确定组合系数.从而解决了建立非线性方程哈密顿理论的一般方法.由于实验室系中的 SG 方程,相应的表述异常复杂,所以以它为例来说明方法的实质.同时由于现有的相关工作违反了泊松括号同时性的要求,给出了必要的改正.

关键词:非线性方程,哈密顿理论,孤子

PACC:5235,0230,0340

1. 引 言

非线性方程的完全可积性意味着这是一个多周期系统,也就是一个由共轭的作用变量和角变量组成的哈密顿系统.正因如此,当反散射方法[1]被用于求解非线性方程时,非线性方程哈密顿理论[2—6]的建立也被给予了巨大的关注.但直到现在,仍有一些方程的哈密顿理论没有建立,同时有很多问题有待研究[7—10].问题的关键在于,虽然单式矩阵元之间的泊松括号的积分表示是容易求出的,但是把被积函数表成约斯特解的乘积的全微分却十分困难,本文给出了求出此约斯特解的乘积的一般方法,并以 SG 方程为例说明.

从物理上说,光锥系并不是通常意义下的洛仑兹系.而实验室系中的 SG 方程,其单式矩阵元之间的泊松括号的形式异常复杂.萨哈诺夫等在书中将单式矩阵元之间的泊松括号之积分式中的被积函数,写成了确定的函数的全微分[11],但弄不清是如何得到的.法捷也夫等对此问题用了一种被称为经典的 R 矩阵法的方法,也得出了同样的结果.但这种方法的原意是为量子反散射方法提供经典对应,因此涉及过多与经典的哈密顿理论无关的知识,也仍然不清楚如何得出此结果.所以并未给出建立哈密顿理论的一般方法[3].

我们认为,求出单式矩阵的泊松括号的积分表示式后,其被积函数一定可以表为约斯特函数对的直积线性组合的微商,同时通过比较直积矩阵的相应元得出组合系数.因而可将单式矩阵元之间的泊松括号表示成了约斯特解对的直积的线性组合在正负无穷时渐近值之差,这样便求得了明确结果,从而得出了建立哈密顿理论一般方法,具体以实验室系的 SG 方程为例来说明.此外因为法捷也夫在该问题讨论中,在求约斯特解的渐近行为时,对经典的哈密顿理论中正则共轭的量是同时的量这点未注意,造成了失误,本文对此作了必要的改正.

2. 泊松括号

实验室系中的 SG 方程是

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} - \sin\theta = 0. \tag{1}$$

其拉格朗日函数 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\{\theta_x\theta_x - \theta_t\theta_t + 2(1-\cos\theta)\}, \tag{2}$$

相应的广义动量密度为 $\pi(x) = \theta_t(x)$,哈密顿密度

* 国家自然科学基金(批准号:10071057)资助的课题.

$\mathscr{H}$ 为

$$\mathscr{H} = \pi(x)\theta_t(x) - \mathscr{L}(x) = \frac{1}{2}\{\theta_x\theta_x + \theta_t\theta_t + 2(1-\cos\theta)\}. \tag{3}$$

泊松括号写作

$$\{\theta(x), \pi(y)\} = \delta(x-y), \tag{4}$$

而任两个量 S 和 R 的泊松括号是

$$\{S, R\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\left(\frac{\delta S}{\delta\theta(x)}\frac{\delta R}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta S}{\delta\pi(x)}\frac{\delta R}{\delta\theta(x)}\right). \tag{5}$$

由此哈密顿方程 $\partial_t\theta = \{\theta, H\}$ 正给出方程(1).

3. 第一个拉克斯方程

第一个拉克斯方程是

$$\partial F(x,\zeta) = L(x,\zeta)F(x,\zeta), \tag{6}$$

这里

$$L(\zeta) = -\mathrm{i}\frac{1}{4}\zeta\sigma_3 - \frac{1}{2}U + \mathrm{i}\frac{1}{4\zeta}V, \tag{7}$$

其中 $U = \mathrm{i}\frac{1}{2}(\theta_x - \theta_t)\sigma_2$，而 $V = \cos\theta\sigma_3 + \sin\theta\sigma_1$. 由于此拉克斯对(7)式中含 θ_x 对哈密顿公式的推导将造成复杂，所以我们先用一个特殊的规范变换 $A = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{4}\theta\sigma_2}$ 来消去它，相应新的函数取作 $F'(x,\zeta) = AF(x,\zeta)$，则拉克斯方程化为

$$\partial_x F'(x,\zeta) = L'(x,\zeta)F'(x,\zeta). \tag{8}$$

新的拉克斯方程对 L' 不含 θ_x，仍写作

$$L = -\mathrm{i}\frac{1}{4}\theta_t\sigma_2 - \mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa\cos\frac{1}{2}\theta\sigma_3 + \mathrm{i}\frac{1}{2}\lambda\sin\frac{1}{2}\theta\sigma_1, \tag{9}$$

这里 $\lambda = \frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1})$，而 $\kappa = \frac{1}{2}(\zeta - \zeta^{-1})$. 以下我们只讨论此新的拉克斯方程.

4. 单式矩阵

考虑方程的边值是 $x \to \pm\infty$ 时 $\theta \to 0$，$\cos\frac{1}{2}\theta \to 1$，$\sin\frac{1}{2}\theta \to 0$，也就是在左右两端 θ 的渐近态不变号，都是沿着轴向. 另一种情况，渐近态变号，一沿着轴向，另一反轴向，我们将在以后讨论. 这里 $L \to L_0 = -\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa\sigma_3$，相应方程(8)的解变为 $E(x,\zeta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa\sigma_3}$. 用此函数定义方程(8)的解

$$\Psi(x,\zeta) = (\bar{\psi}(x,\zeta), \psi(x,\zeta)) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa x\sigma_3} \quad \text{当 } x \to \infty, \tag{10}$$

$$\Phi(x,\zeta) = (\phi(x,\zeta), \bar{\phi}(x,\zeta)) \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa x\sigma_3} \quad \text{当 } x \to -\infty. \tag{11}$$

以上由边值条件定义的二分量解 $\phi(x,\zeta)$，$\bar{\phi}(x,\zeta)$，$\bar{\psi}(x,\zeta)$ 和 $\psi(x,\zeta)$，称为方程(8)的约斯特解.

由于 $\bar{\psi}(x,\zeta)$ 和 $\psi(x,\zeta)$ 的渐近行为不同，所以它们是方程(8)在 ζ 取实数值时的两个独立二分量解. 同理可以得到，$\phi(x,\zeta)$ 和 $\bar{\phi}(x,\zeta)$ 也是两个独立二分量解. 由于方程(8)是二分量的一阶微分方程，只有两个独立解，所以，以上两组独立解，彼此可以表为线性组合. 引入单式矩阵 $T(\zeta)$，

$$T(\zeta) = \Psi^{-1}(x,\zeta)\Phi(x,\zeta),$$

$$T(\zeta) = \begin{pmatrix} a(\zeta) & -\bar{b}(\zeta) \\ b(\zeta) & \bar{a}(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

对实数的 ζ，由(9)式有

$$\sigma_1\overline{L(x,\zeta)}\sigma_1 = L(x,\zeta),$$
$$\sigma_1\overline{E(x,\zeta)}\sigma_1 = E(x,\zeta), \tag{13}$$

于是有

$$\sigma_1\overline{T(\zeta)}\sigma_1 = T(\zeta),$$
$$\bar{a}(\zeta) = \overline{a(\zeta)}, \bar{b}(\zeta) = \overline{b(\zeta)}. \tag{14}$$

简单的手续可以证明，$\psi(x,\zeta)$ 和 $\phi(x,\zeta)$ 可以解析地延拓到复 ζ 的上半平面. $\bar{\psi}(x,\zeta)$ 和 $\bar{\phi}(x,\zeta)$ 可以解析地延拓到复 ζ 的下半平面. 由(12)式又得到 $a(\zeta)$ 和 $\bar{a}(\zeta)$ 可以分别解析地延拓到复 ζ 的上和下半平面. 当 ζ 是复数时，以上某些公式要作修改，比如 $\bar{a}(\bar{\zeta}) = \overline{a(\zeta)}$，而 $b(\zeta)$ 和 $\bar{b}(\zeta)$ 一般不能解析地延拓到 ζ 的实轴之外. 此外因为 $L(-\zeta) = \sigma_2 L(\zeta)\sigma_2$，还有

$$T(-\zeta) = \sigma_2 T(\zeta)\sigma_2,$$
$$a(-\zeta) = \bar{a}(\zeta), b(-\zeta) = -\bar{b}(\zeta). \tag{15}$$

5. 单式矩阵的泊松括号

利用标准的手续，得到

$$\frac{\delta T(\zeta)}{\delta\theta(z)} = \Psi^{-1}(z,\zeta)\left((\mathrm{i}\frac{1}{4}\kappa\sin\frac{1}{2}\theta\sigma_3 + \mathrm{i}\frac{1}{4}\lambda\cos\frac{1}{2}\theta\sigma_1\right)\Phi(z,\zeta), \tag{16}$$

$$\frac{\delta T(\zeta)}{\delta\theta_t(z)} = -\Psi^{-1}(z,\zeta)\mathrm{i}\frac{1}{4}\sigma_2\Phi(z,\zeta). \tag{17}$$

利用关系 $\delta T^{-1}(\zeta) = -T^{-1}(\zeta)\delta T(\zeta)T^{-1}(\zeta)$，得

$$\frac{\delta T^{-1}(\zeta)}{\delta\theta(z)}=-\Phi^{-1}(z,\zeta)\Big(\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\kappa\sin\frac{1}{2}\theta\sigma_3+\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\lambda\cos\frac{1}{2}\theta\sigma_1\Big)\Psi(z,\zeta),\tag{18}$$

$$\frac{\delta T^{-1}(\zeta)}{\delta\theta_t(z)}=\Phi^{-1}(z,\zeta)\,\mathrm{i}\,\frac{1}{4}\sigma_2\Psi(z,\zeta).\tag{19}$$

取法捷也夫直积

$$\{T(\zeta)\underset{,}{\otimes}T^{-1}(\zeta')\}=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\Psi^{-1}(\zeta)\Phi^{-1}(\zeta')R\Phi(\zeta)\Psi(\zeta'),\tag{20}$$

这里

$$R=-\frac{1}{16}\sin\frac{\theta}{2}\{\kappa\sigma_3\otimes\sigma_2-\kappa'\sigma_2\otimes\sigma_3\}-\frac{1}{16}\cos\frac{\theta}{2}\{\lambda\sigma_1\otimes\sigma_2-\lambda'\sigma_2\otimes\sigma_1\}.\tag{21}$$

法捷也夫直积的定义是

$$(\sigma_3\otimes\sigma_2)_{ik,jl}=(\sigma_3)_{ij}(\sigma_2)_{kl}.\tag{22}$$

将 R 用大矩阵写出

$$+\,\mathrm{i}\,\frac{1}{16}\lambda\cos\frac{1}{2}\theta\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}-\mathrm{i}\,\frac{1}{16}\lambda'\cos\frac{1}{2}\theta\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\tag{23}$$

$$+\,\mathrm{i}\,\frac{1}{16}\kappa\sin\frac{1}{2}\theta\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}-\mathrm{i}\,\frac{1}{16}\kappa'\sin\frac{1}{2}\theta\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\tag{24}$$

这里行列指标为 $\{11,12,21,22\}$.

6. 约斯特函数对直积的线性组合

(20)式右端的积分有简单的表示式,当且只当被积函数是 x 的全微商.注意(20)式含有 4 个约斯特解,我们用下式的微商来试探

$$\partial_x\sum_{\alpha=0}^{3}f_\alpha(\{\Psi^{-1}(\zeta)\sigma_\alpha\Psi(\zeta')\}_{il}\{\Phi^{-1}(\zeta')\sigma_\alpha\Phi(\zeta)\}_{kj}),\tag{25}$$

这里 $\sigma_0=I$.这是一个合理的尝试,因为除第一个拉克斯方程外,反散射方法没有涉及 x 微商的运算.这 4 项的微商分别是

$$\begin{aligned}f_0&=-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\kappa'-\kappa)\cos\frac{1}{2}\theta(\sigma_3\otimes'I-I\otimes'\sigma_3)+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\sin\frac{1}{2}\theta(\sigma_1\otimes'I-I\otimes'\sigma_1),\\f_1&=\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\kappa'+\kappa)\cos\frac{1}{2}\theta(\mathrm{i}\sigma_2\otimes'\sigma_1+\sigma_1\otimes'\mathrm{i}\sigma_2)+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda)\sin\frac{1}{2}\theta(I\otimes'\sigma_1-\sigma_1\otimes'I)\\&\quad+\frac{1}{2}\theta_t(\sigma_3\otimes\sigma_1+\sigma_1\otimes'\sigma_3),\\f_2&=-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\kappa'+\kappa)\cos\frac{1}{2}\theta(\sigma_1\otimes'\mathrm{i}\sigma_2+\mathrm{i}\sigma_2\otimes'\sigma_1)-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)\sin\frac{1}{2}\theta(\sigma_3\otimes'\mathrm{i}\sigma_2+\mathrm{i}\sigma_2\otimes'\sigma_3),\\f_3&=-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\kappa'-\kappa)\cos\frac{1}{2}\theta(I\otimes'\sigma_3-\sigma_3\otimes'I)+\mathrm{i}\,\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda)\sin\frac{1}{2}\theta(\mathrm{i}\sigma_2\otimes'\sigma_3+\sigma_3\otimes'\mathrm{i}\sigma_2)\\&\quad-\frac{1}{2}\theta_t(\sigma_1\otimes'\sigma_3+\sigma_3\otimes'\sigma_1),\end{aligned}\tag{26}$$

这里直积 $\otimes'$ 的定义是

$$(\sigma_3\otimes'\sigma_2)_{ik,jl}=(\sigma_3)_{il}(\sigma_2)_{kj}.\tag{27}$$

因为 θ_t 不出现在(21)式中,所以有 $f_1=f_3$.将上列各式乘以 f_α 后相加,并注意到直积定义的不同,与(21)式比较 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 和 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 的系数,便容易得到

$$f_2=-f_0=\frac{1}{16}\frac{2\zeta\zeta'}{\zeta^2-\zeta'^2},\quad f_1=f_3=\frac{1}{16}\frac{\zeta^2+\zeta'^2}{\zeta^2-\zeta'^2},\tag{28}$$

因此单式矩阵的泊松括号为

$$\{T(\zeta)\underset{,}{\otimes}T^{-1}(\zeta')\}=\lim_{L\to\infty}\sum_{\alpha=0}^{3}f_\alpha(\{\Psi^{-1}(x,\zeta)\sigma_\alpha\Psi(x,\zeta')\}_{il}\times\{\Phi^{-1}(x,\zeta')\sigma_\alpha\Phi(x,\zeta)\}_{kj})\Big|_{x=-L}^{x=L}.\tag{29}$$

这里讨论一下反向问题,设 $x\to-\infty$ 时 $\theta\to2\pi$,即 $\cos\frac{1}{2}\theta\to-1$.这时 $L\to L'_0=\sigma_1L_0\sigma_1$,相应的 $E'(x,\zeta)=\sigma_1E(x,\zeta)$.根据约斯特解的定义(10)和(11)式,容易看出在这种情况下求单式矩阵的泊松括号会得到与(29)式相同的结果.因此,不论是同向还是反向,哈密顿理论的计算结果是一样的.

7. 连续谱时的泊松括号

注意到当 $\zeta=\zeta'$ 时 $(1+\zeta^{-1}\zeta'^{-1})>0$，并且 $(\kappa+\kappa')=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')(1-\zeta^{-1}\zeta'^{-1})$，我们有

$$\lim_{L\to\infty}\frac{e^{-i\frac{1}{2}(\kappa-\kappa')L}}{\zeta-\zeta'}=-i\pi\delta(\zeta-\zeta'),\tag{30}$$

类似的，因为当 $\zeta=-\zeta'$ 时 $(1-\zeta^{-1}\zeta'^{-1})>0$ 并且 $(\kappa+\kappa')=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')(1-\zeta^{-1}\zeta'^{-1})$，得到

$$\lim_{L\to\infty}\frac{e^{-i\frac{1}{2}(\kappa+\kappa')L}}{\zeta+\zeta'}=-i\pi\delta(\zeta+\zeta'),\tag{31}$$

然后注意到(10)，(11)和(12)式，(29)式中单式矩阵的泊松括号 $\{T(\zeta)\overset{\otimes}{,}T^{-1}(\zeta')\}$ 就有

$$\begin{pmatrix}\{a(\zeta),\tilde a(\zeta')\} & \{a(\zeta),\tilde b(\zeta')\} & -\{\tilde b(\zeta),\tilde a(\zeta')\} & -\{\tilde b(\zeta),\tilde b(\zeta')\}\\ -\{a(\zeta),b(\zeta')\} & \{a(\zeta),a(\zeta')\} & \{\tilde b(\zeta),b(\zeta')\} & -\{\tilde b(\zeta),a(\zeta')\}\\ \{b(\zeta),\tilde a(\zeta')\} & \{b(\zeta),\tilde b(\zeta')\} & \{\tilde a(\zeta),\tilde a(\zeta')\} & \{\tilde a(\zeta),\tilde b(\zeta')\}\\ -\{b(\zeta),b(\zeta')\} & \{b(\zeta),a(\zeta')\} & -\{\tilde a(\zeta),b(\zeta')\} & \{\tilde a(\zeta),a(\zeta')\}\end{pmatrix}\tag{32}$$

等于

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'+i0}a(\zeta)\tilde b(\zeta') & \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'+i0}\tilde b(\zeta)\tilde a(\zeta') & 0\\ \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'+i0}a(\zeta)b(\zeta') & 0 & -i4\pi\delta(\zeta-\zeta')\zeta\,|a(\zeta)|^2 & -\frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'-i0}\tilde b(\zeta)a(\zeta')\\ \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'+i0}b(\zeta)\tilde a(\zeta') & i4\pi\delta(\zeta-\zeta')\zeta\,|a(\zeta)|^2 & 0 & -\frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'-i0}\tilde a(\zeta)\tilde b(\zeta')\\ 0 & -\frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'-i0}b(\zeta)a(\zeta') & -\frac{\zeta+\zeta'}{\zeta-\zeta'-i0}\tilde a(\zeta)b(\zeta') & 0\end{pmatrix}\tag{33}$$

减去

$$\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & \frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'+i0}a(\zeta)\tilde b(\zeta') & \frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'+i0}\tilde b(\zeta)\tilde a(\zeta') & -i4\pi\delta(\zeta+\zeta')\zeta\,|a(\zeta)|^2\\ \frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'+i0}a(\zeta)b(\zeta') & 0 & 0 & -\frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'-i0}\tilde b(\zeta)a(\zeta')\\ \frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'+i0}b(\zeta)\tilde a(\zeta') & 0 & 0 & -\frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'-i0}\tilde a(\zeta)\tilde b(\zeta')\\ i4\pi\delta(\zeta+\zeta')\zeta\,|a(\zeta)|^2 & -\frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'-i0}b(\zeta)a(\zeta') & -\frac{\zeta-\zeta'}{\zeta+\zeta'-i0}\tilde a(\zeta)b(\zeta') & 0\end{pmatrix},\tag{34}$$

这里我们使用了公式

$$\frac{1}{K-i0}=\mathscr{P}\frac{1}{K}+i\pi\delta(K).\tag{35}$$

把以上矩阵的矩阵元一个个写开来，就得到单式矩阵元一对对的泊松括号. 再由约化变换性质(15)，我们只需讨论 $\zeta,\zeta'>0$ 的情况，因为其余情况下的泊松括号可由此情况下相应的泊松括号直接由约化变换关系得出. 而此时 $\delta(\zeta+\zeta')=0$，于是我们得到

$$\begin{aligned}&\{|a(\zeta)|^2,b(\zeta')\}\\ &=a(\zeta)\{\tilde a(\zeta),b(\zeta')\}+\tilde a(\zeta)\{a(\zeta),b(\zeta')\}\\ &=i\pi\delta(\zeta-\zeta')\frac{1}{4}\zeta\,|a(\zeta)|^2b(\zeta).\end{aligned}\tag{36}$$

8. 连续谱的作用变量和角变量

现在我们讨论只有连续谱的情况. 一方面这种情况的确存在，另一方面情况简单使理论的实质得以明确显示. 在反散射理论中已知，$a(\zeta)$ 和 $\tilde a(\zeta)$ 不依赖 t，而 $b(\zeta)$ 和 $\tilde b(\zeta)$ 以指数函数的形式依赖于 t，即幅角是 t 的线性函数. 规范变换后 SG 方程的第二个拉克斯对是

$$M=-i\frac{1}{4}\theta_x\sigma_2+i\frac{1}{2}\lambda\cos\frac{1}{2}\theta\sigma_3-i\frac{1}{2}\kappa\sin\frac{1}{2}\theta\sigma_1,\tag{37}$$

于是得到

$$b(t,\zeta) = b(0,\zeta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}, \tag{38}$$

而作用变量与时间无关,因此 $P(\zeta)$ 必是 $a(\zeta)$ 和 $\tilde{a}(\zeta)$ 的函数.设

$$P(\zeta) = F(|a(\zeta)|^2), \tag{39}$$

F 是一个待定函数.角变量 $Q(\zeta)$ 是 $b(\zeta)$ 和 $\tilde{b}(\zeta)$ 的幅角.取

$$Q(\zeta) = \arg b(\zeta) = \frac{1}{\mathrm{i}2}\ln\frac{b(\zeta)}{\tilde{b}(\zeta)}. \tag{40}$$

作为正则共轭的变量,其泊松括号应是

$$\{P(\zeta),P(\zeta')\} = 0,\ \{Q(\zeta),Q(\zeta')\} = 0$$

和

$$\{Q(\zeta),P(\zeta')\} = \delta(\zeta-\zeta'). \tag{41}$$

前两式很容易证明.现在通过证明(41)式来确定函数 F 的形式.利用(5)和(36)式得到

$$\begin{aligned}&\{Q(\zeta),P(\zeta')\}\\ &= -\frac{F'(|a(\zeta)|^2)}{\mathrm{i}2}\left\{|a(\zeta)|^2,\ln\frac{b(\zeta')}{\tilde{b}(\zeta')}\right\}\\ &= -\frac{F'(|a(\zeta)|^2)}{\mathrm{i}2}\mathrm{i}\pi\delta(\zeta-\zeta')\frac{1}{2}\zeta|a(\zeta)|^2,\end{aligned} \tag{42}$$

式中 F' 表示 F 对宗量的微商.若要求右方等于 $\delta(\zeta-\zeta')$,则得

$$P(\zeta) = F(|a(\zeta)|^2) = \frac{4}{\pi\zeta}\ln\frac{1}{|a(\zeta)|^2}. \tag{43}$$

通常关于作用变量和角变量的讨论,往往与哈密顿量的形式联系在一起,我们这里却不这样.原因是,从本质上说,作用变量和角变量是一对正则共轭的变量,泊松括号是对同时的量.所以这里的讨论更清楚的反映出实质.

9. 守 恒 律

从拉克斯方程可以导出守恒量,哈密顿量是守恒量,我们先看对 SG 方程是如何导出的.由于 SG 方程的第一个拉克斯方程包含仿射参数的倒数,并非真正属于 ZS 型方程.所以约斯特解的渐进行为要专门讨论.规范变换并不影响单式矩阵,所以在计算 $a(\zeta)$ 的渐进行为时,可用原来的第一个拉克斯方程(6)和(7),因为计算比较简单.这样

$$v_{1x} = L_{11}v_1 + L_{12}v_2,\quad v_{2x} = L_{21}v_1 + L_{22}v_2, \tag{44}$$

若 $v(x,\zeta)$ 代表 $\psi(x,\zeta)$,则在 $x\to\infty$ 时 $v(x,\zeta)\to(0,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa x})$,从(44)式消去 v_1 再假定 $v_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa x+g}$,并将其代入消去 v_1 以后的方程,便得到

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa + g_x\right)^2 + g_{xx} - L_{22x}\\ &-\frac{(L_{21})_x}{L_{21}}\left(\mathrm{i}\frac{1}{2}\kappa + g_x - L_{22}\right) + L_{11}L_{22} - L_{21}L_{12} = 0,\end{aligned} \tag{45}$$

$|\zeta|\to\infty$ 时,取

$$g_x = \mu_0 + \mu_1\zeta^{-1} + \cdots \tag{46}$$

得守恒量

$$\mu_0 = 0,\ \mu_1 = -\mathrm{i}\frac{1}{16}\{2(1-\cos\theta) + (\theta_x - \theta_t)^2\}. \tag{47}$$

显然 μ_1 不是哈密顿密度.关于 $|\zeta|\to 0$ 时的渐进行为,是一个困难的问题,过去虽有正确的结果但推演不尽合理.(44)式在 $|\zeta|\to 0$ 时消去 v_1 会得到一个发散的方程,同时又由于所取的渐进解 v_1 缺少首项,消去 v_2 也不行.

于是法捷也夫等[3] 采用如下办法.他们认为拉克斯对(9)在

$$\pi(x)\to\pi(x),\ \theta(x)\to-\theta(x),\ \zeta\to-\zeta^{-1} \tag{48}$$

变换下保持不变.所以单式矩阵也在此变换下不变,初看这样的变换似乎是可行的,人们以为 $\pi(x)$ 和 $\theta(x)$ 是独立变量.但是它们是正则共轭的量,由泊松括号制约.从泊松括号看,当 $\theta(x)\to-\theta(x)$ 时,$\pi(x)\to-\pi(x)$.若要 $\pi(x)$ 不变号,则要将 $t\to-t$,而这是不允许的,因为泊松括号是同时的量间的关系.

一种可行的做法是,由于 SG 方程在 $\theta(x)\to-\theta(x)$ 下不变,所以当我们求解 $-\theta(x)$ 第一个拉克斯对(9)成为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi\sigma_2 - \mathrm{i}\frac{1}{4}(\zeta-\zeta^{-1})\cos\frac{1}{2}\theta\sigma_3\\ &-\mathrm{i}\frac{1}{4}(\zeta+\zeta^{-1})\sin\frac{1}{2}\theta\sigma_1.\end{aligned} \tag{49}$$

因为 SG 方程在变换 $x\to-x$ 下不变,这是因为第一个拉克斯方程的微商也变号,所以新的方程是 $\partial_{x'}v' = L'v'$,其中

$$\begin{aligned}L' &= -\mathrm{i}\frac{1}{4}\pi\sigma_2 - \mathrm{i}\frac{1}{4}(\eta-\eta^{-1})\cos\frac{1}{2}\theta\sigma_3\\ &+\mathrm{i}\frac{1}{4}(\eta+\eta^{-1})\sin\frac{1}{2}\theta\sigma_1,\end{aligned} \tag{50}$$

式中 $\eta = \zeta^{-1}$.用与上面完全类似的手续,可以得到新的守恒量

$$\upsilon_0 = 0,\ \upsilon_1 = -\mathrm{i}\frac{1}{16}\{2(1-\cos\theta)+(\theta_x+\theta_t)^2\}. \tag{51}$$

与(47)式比较,可看出新的守恒量可由原守恒量通过 θ_x 不变号而 θ_t 变号得到.

引入守恒量

$$I_1 = \mathrm{i}4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mu_1,\ I_{-1} = \mathrm{i}4\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\upsilon_1, \tag{52}$$

容易看出

$$H = I_1 + I_{-1},\ P = I_1 - I_{-1}. \tag{53}$$

因为 $\ln a(\zeta) = g(x\to-\infty)$,所以当 $|\zeta|\to\infty$ 时,$\ln a(\zeta)\to 0$,由通常的办法,在只含有连续谱时,得

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'\ln|a(\zeta')|^2,$$

$$\ln a(\zeta) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'\frac{\ln|a(\zeta')|^2}{\zeta-\zeta'}. \tag{54}$$

类似可得

$$I_{-1} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\eta'\ln|a(\eta')|^2,$$

$$\ln a(\eta) = \frac{1}{\mathrm{i}2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\eta'\frac{\ln|a(\eta')|^2}{\eta-\eta'}. \tag{55}$$

注意 $\eta = \zeta^{-1}$ 和积分限在此变换下的改变,还有 $|a(\eta')|^2 = |a(\eta)|^2$,上式为

$$I_{-1} = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'\frac{1}{\zeta'^2}\ln|a(\zeta')|^2, \tag{56}$$

所以

$$H = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'\left(\frac{1}{\zeta'^2}+1\right)\ln|a(\zeta')|^2,$$

$$P = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\zeta'\left(\frac{1}{\zeta'^2}-1\right)\ln|a(\zeta')|^2. \tag{57}$$

将这里得到的哈密顿量代入哈密顿方程得到

$$\partial_t b(\lambda) = \{b(\lambda), H\} = -\mathrm{i}\lambda, \tag{58}$$

这与反散射得到的结果(38)式一致.对于这一问题还有别的处理方法,有待进一步讨论.

10. 分离谱时的哈密顿理论

在紧致台集的假设下,包含 b_n 和 $\tilde{b}_n$ 的泊松括号可由 $b(\lambda)$ 和 $\tilde{b}(\lambda)$ 相应的泊松括号直接假定 $b_n = b(\zeta_n)$ 和 $\tilde{b}_n = \tilde{b}(\overline{\zeta}_n)$ 得到,因此我们有

$$\{a(\zeta), b_n\} = -\frac{1}{4}\frac{\zeta\zeta_n}{\zeta^2-\zeta_n^2}a(\zeta)b_n,$$

$$\{a(\zeta), \tilde{b}_n\} = \frac{1}{4}\frac{\zeta\overline{\zeta}_n}{\zeta^2-\overline{\zeta}_n^2}a(\zeta)\tilde{b}_n, \tag{59}$$

$$\{\tilde{a}(\zeta), \tilde{b}_n\} = -\frac{1}{4}\frac{\zeta\overline{\zeta}_n}{\zeta^2-\overline{\zeta}_n^2}\tilde{a}(\zeta)\tilde{b}_n,$$

$$\{\tilde{a}(\zeta), b_n\} = \frac{1}{4}\frac{\zeta\zeta_n}{\zeta^2-\zeta_n^2}\tilde{a}(\zeta)b_n. \tag{60}$$

在 ζ_n 是 $a(\zeta)$ 的简单零点的情况下,容易得到

$$\{\zeta_m, b_n\} = \delta_{mn}\frac{1}{8}\zeta_n b_n,\ \{\overline{\zeta}_m, b_n\} = 0, \tag{61}$$

$$\{\zeta_m, \tilde{b}_n\} = 0,\ \{\overline{\zeta}_m, \tilde{b}_n\} = \delta_{mn}\frac{1}{8}\overline{\zeta}_n\tilde{b}_n. \tag{62}$$

这里引入分离谱的作用变量和角变量

$$P_n = \ln\zeta_n,\ Q_n = 8\ln b_n, \tag{63}$$

考虑到方程的约化性质,零点 ζ_n 分为两类,一类是 ζ_n 在虚轴上,这时作用变量和角变量具体写做

$$p_n = \ln|\zeta_n|,\ q_n = 8\ln|b_n|. \tag{64}$$

另一类 ζ_n 不在虚轴上,这时引入

$$\mu_k = 4\ln|\zeta_k|,\ \varphi_k = 4\ln|b_k|, \tag{65}$$

$$\eta_k = -16\arg\zeta_k, \theta_k = \arg b_k\quad\left(0 < \arg\zeta_k < \frac{\pi}{2}\right), \tag{66}$$

对应与呼吸子解的情况.注意到 $\ln b_n = \ln|b_n| + \mathrm{i}\arg b_n$ 和 $\ln\tilde{b}_n = \ln|b_n| - \mathrm{i}\arg b_n$,我们很容易得到

$$\{p_n, q_m\} = \delta_{nm},\ \{\mu_k, \varphi_j\} = \{\eta_k, \theta_j\} = \delta_{kj}, \tag{67}$$

并且其他关于作用变量和角变量的泊松括号全部为零.

与连续谱的情况类似,由哈密顿方程有

$$\partial_t b_n = \{b_n, H\} = \mathrm{i}\lambda_n, \tag{68}$$

因此哈密顿量中对应与分离谱的部分应为

$$H_{\mathrm{dis}} = -\mathrm{i}4\sum_n\left(\zeta_n - \frac{1}{\zeta_n}\right), \tag{69}$$

式中的求和是对 $a(\zeta)$ 的所有零点求和.又由于 $-\overline{\zeta}_n$ 是 $a(\zeta)$ 的零点当且仅当 ζ_n 是 $a(\zeta)$ 的零点,我们得到分离谱的哈密顿量

$$H_{\mathrm{dis}} = -4\sum_m(\mathrm{e}^{-p_m}+\mathrm{e}^{p_m}) + \sum_k\sin\frac{\eta_k}{16}(\mathrm{e}^{-\frac{\mu_k}{4}}+\mathrm{e}^{\frac{\mu_k}{4}}). \tag{70}$$

以上便给出了 SG 方程完整的哈密顿理论.

11. 结　论

通过将约斯特函数对的直积线性组合,给出了一个将非线性方程单式矩阵元之间的泊松括号表示成为约斯特解对的直积的正负无穷时的渐近值之

差.从而给出了完全可积的非线性方程建立哈密顿理论的关键手续.而选择 SG 方程为例来讲述这一方法,主要是因为实验室系中的 SG 方程单式矩阵元之间的泊松括号形式非常复杂,能更加清楚地反映线性组合的本质.同时有必要改正关于约斯特解的渐近行为的一个流传甚广的错误.

[1] Zakharov V E and Shabat A B 1972 *Sov. Phys. JETP* **34** 62

[2] Faddeev L D 1980 *Mathematical Physics Review Sect. C.: Math. Phys. Rev* (Harwood Academic) 107

[3] Faddeev L D and Takhtajan L A 1987 *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons* (Springer-Verlag, Berlin)

[4] Dubrovin B A and Novikov S P 1983 *Sov. Math. Dokl.* **26** 760

[5] Shadwick W F 1981 *Lett. Math. Phys.* **5** 137

[6] Gelfand I M, Manin Y I and Shubin M A 1976 *Funkz. Anal. Priloz.* **10** (Russian) 30

[7] Lü K P, Duan W S, Zhao J B, Wang B R and Wei R J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1969 (in Chinese) [吕克璞、段文山、赵金保、王本仁、魏荣爵 1999 物理学报 **48** 1969]

[8] Zhao Y M and Yan J R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1976 (in Chinese) [赵永明、颜家壬 1999 物理学报 **48** 1976]

[9] Tang Y and Yan X H 2002 *Chin. Phys.* **9** 565

[10] Chen S R and Chen S J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 882 (in Chinese) [陈世荣、陈向军 1999 物理学报 **48** 882]

[11] Zakharov V E *et al* 1971 *Funkz. Anal. Priloz.* **5** (Russian) 18

General procedure to formulate Hamiltonian theory of the completely integrable nonlinear equations and its application to the sine-Gordon equation*

Cai Hao[1)] Chen Shi-Rong[2)] Huang Nian-Ning[1)]

[1)] (*Department of Physics, Wuhan University, Wuhan* 430072, *China*)

[2)] (*Department of Mathematics, Huazhong Normal University, Wuhan* 430074, *China*)

(Received 20 November 2002; revised manuscript received 30 December 2002)

Abstract

For a completely integrable nonlinear equation, the Poisson bracket of monodramy matrix is known to be expressed in a form of integral with respect to x. The integrand is found to be an x-differential of a linear combination of direct product of two pairs of Jost solutions definitely, and the coefficients can be determined by comparing the corresponding elements of direct product matrices on two sides. Hence a general procedure for constructing Hamiltonian formalism is given for a completely integrable nonlinear equation. As an example, the Hamiltonian theory of sine-Gordon equation is re-examined, which shows the essence of the linear combination method for its very complicated Poisson bracket. And the previous works involve, as is known, some inappropriate violating simultaneity of variables in Poisson bracket, which is also revised now.

Keywords: nonlinear equation, Hamiltonian theory, soliton

PACC: 5235, 0230, 0340

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10071057).