

# 孤立导体和多导体系统的广义 Collin 原则

梁昌洪 苏 涛 万继响

(西安电子科技大学电子工程学院, 西安 710071)

(2003 年 3 月 14 日收到, 2003 年 4 月 14 日收到修改稿)

将 Collin 原则应用于实际电容的上下界估值给出了很多简单而有用的结果. 将这一原则全面推广到三维孤立导体及多导体系统, 采用等表面积法估值给出了若干应用实例.

关键词: 孤立导体, 三维多导体系统, 广义 Collin 原则

PACC: 0200, 0260, 0630L

## 1. 引 言

在电磁变分领域中, 上下界的估值一直是研究的重要问题. Collin<sup>[1]</sup>由研究二维导体传输线之间的电容变分稳定而提出了著名的 Collin 原则. 它可以简单描述如下: 如图 1 所示,  $S_1$  作为内导体,  $S_2$  作为外导体一起构成双导体传输线. 其单位长度的电容记为  $C_0$ . 现设  $S'_1$  在  $S_1$  的外部, 而  $S''_1$  在  $S_1$  的内部, 并分别假设  $S'_1$  与  $S_2$  和  $S''_1$  与  $S_2$  之间的电容为  $C'$  和  $C''$ , 则文献 [1] 证明由变分极值原理可知

$$C' > C_0 > C'' \quad (1)$$

换句话说,  $C'$  和  $C''$  可分别作为电容精确值的上界和下界估计.

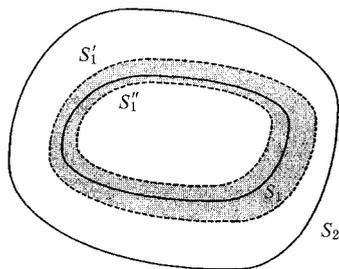


图 1 Collin 原则

文献 [2] 给出了 Hermite 算子的本征值估值定理. 值得指出, 林为干推广了 Collin 原则的应用, 并得到了一批各种传输线电容和特性阻抗的很好近似公式<sup>[3-6]</sup>.

## 2. 孤立导体的 Collin 原则

让我们研究如图 2 所示的孤立导体, 它是由有限封闭面  $S$  包围的体积  $V$  构成的.

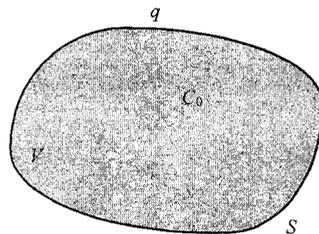


图 2 孤立导体

假设在导体上加电压  $V$ , 而导体表面储存电荷为  $q$ , 则孤立导体的电容  $C_0$  为

$$C_0 = \frac{q}{V} \quad (2)$$

引理 孤立导体上加电压  $V$  后, 在空间形成位分布. 我们在  $S$  面外部选择等位面  $S_1$  作封闭导体面. 这时  $S_1$  和  $S$  之间形成的电容器电容  $C_1$ , 而  $S_1$  和  $\infty$  面, 即新的孤立导体电容为  $C_2$ . 容易证明

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0} \quad (3)$$

见图 3 所示.

证明 十分清楚, 这样的辅助导体面不影响空间位分布.

设  $S_1$  面上的位为  $V_1$  (且  $V_1 < V$ ),  $S_1$  内壁电荷为  $-q$ , 而外壁电荷为  $q$ . 据定义

$$C_1 = \frac{q}{V - V_1} \quad (4)$$

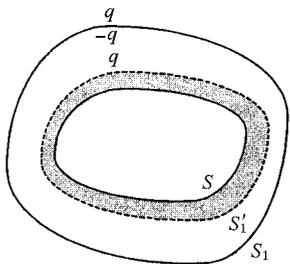


图3 带有辅助面的孤立导体

$$C_2 = \frac{q}{V_1}, \quad (5)$$

显然(3)式成立.

上述引理使  $S$  和  $S_1$  构成双导体系统. 于是以包围孤立导体  $S$  外部的  $S'$  为例, 根据 Collin 原则  $S'$  与  $S_1$  所构成的电容  $C'_1$  有

$$C'_1 > C_1, \quad (6)$$

而  $S'$  本身的孤立导体电容  $C'$  则有

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C'_1} + \frac{1}{C_2} < \frac{1}{C_0},$$

于是得到

$$C' > C_0. \quad (7)$$

简单地说, 较大的孤立导体有着较大的电容. 此即孤立导体的广义 Collin 原则.

### 3. 多导体系统的广义 Collin 原则

图4给出典型的由  $n$  个孤立导体构成的多导体系统.

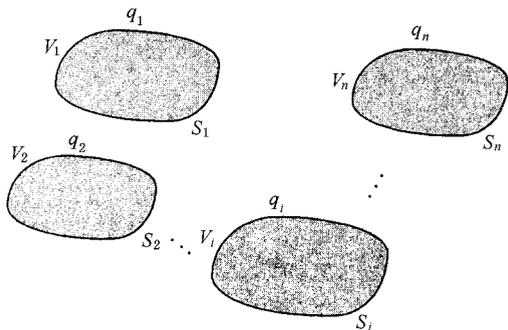


图4 多导体系统

作为一般情况, 每个导体上分别加上电压  $V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n$ , 而储存的电荷则分别为  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ . 于是可写出

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

简记为

$$[C][V] = [q], \quad (9)$$

其中  $[C]$  为电容矩阵, 且有  $[C]^T = [C][^T]$ , 表示矩阵转置. 和孤立导体的情况类似  $[C]$  是空间导体分布和媒质分布的函数, 与  $[V]$  和  $[q]$  无关, 它是特征矩阵.

本文进一步定义模式电容(model capacitance)

$$\alpha[V] = \frac{[V]^T [C] [V]}{[V]^T [V]}. \quad (10)$$

很显然, 模式电容是一个数, 它与  $[V]$  的分布有关, 即不同的  $[V]$  有不同的模式电容. 特别对于  $[V]^T = [1, 1, \dots, 1]$ , 即  $n$  个导体等电位, 这时有广义多导体孤立电容, 具体有

$$C_0 = C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}. \quad (11)$$

和单个孤立导体的概念完全一样, 若由各个  $S_i$  外部构成  $S'_i$ , 则由  $S'_i$  所形成的广义孤立电容  $C'$  仍有

$$C' > C_0. \quad (12)$$

与此相对应的是  $[V]^T = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$ , 即第  $i$  个导体电位为 1, 而其余电位为 0, 这时可得到第  $i$  个导体在多导体系统的广义自电容

$$C_i = \alpha[0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]^T = C_{ii}. \quad (13)$$

因为这种情况下, 在第  $i$  个导体上电位最高, 任何包围  $S_i$  外部构成  $S'_i$  形成的广义自电容必有

$$C'_i > C_{ii}. \quad (14)$$

本文具体以双导体系统为例说明, 如图5所示.

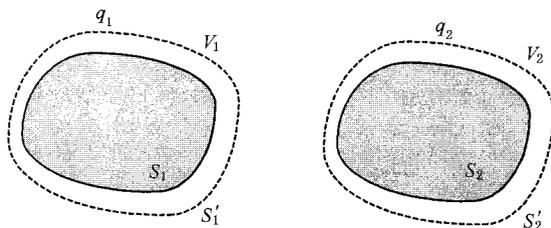


图5 双导体系统

写出这种情况的电容矩阵

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

最有特征的模式电容是  $[V]^T = [1, 1]^T$  对应的偶模电容(即广义自电容)和  $[V]^T = [1, -1]^T$  对应的奇模电容(即广义互电容),且有

$$C = C \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{22}) - C_{12}. \quad (16)$$

十分清楚,奇模电容(广义互电容)和常规的电容器电容只差常数 1/2 倍.由广义 Collin 原则,由外导体  $S'_1$  和  $S'_2$  所构成的新奇模电容  $C'$  必有

$$C' > C, \quad (17)$$

即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(C'_{11} + C'_{22}) - C'_{12} \\ & > \frac{1}{2}(C_{11} + C_{22}) - C_{12}. \end{aligned} \quad (18)$$

现在把它推广到  $n$  个多导体系统,典型的激励矢  $V$  有  $p$  个分量为 +1,而  $q$  个分量为 -1(其中  $p + q = n$ ),即  $[V]^T = [1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1]^T$ .注意到  $p$  个 +1 分量放在前面并不失一般性.把电容矩阵写成分块矩阵形式为

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{II} & C_{I\text{II}} \\ C_{\text{II}I}^T & C_{\text{II}\text{II}} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

这时对应的广义互电容(也即模式电容)是

$$\begin{aligned} C &= \alpha [1, -1, \dots, -1]^T \\ &= \frac{1}{n} \{ C_{\text{II}}^{\Sigma} + C_{\text{II}\text{II}}^{\Sigma} - 2C_{\text{II}I}^{\Sigma} \}. \end{aligned} \quad (20)$$

式中  $C_{ij}^{\Sigma}$  表示其矩阵元素之和,完全一样,若这种情况各外部  $S'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 所构成的广义互电容  $C'$  有

$$C' > C, \quad (21)$$

此即多导体系统的广义 Collin 原则.

## 4. 应用实例

本文将分别给出孤立导体和多导体系统的广义 Collin 原则的应用实例.

### 4.1. 实例 1 孤立导体

$2a \times 2a \times 2a$  的立方体是孤立导体的典型例子.有很多学者致力于它的电容计算,且作为数值方法的验证手段,具体见图 6 所示,比较经典计算表明

$$C_0 = 16.6076\epsilon_0 a. \quad (22)$$

我们采用广义 Collin 原则放内切球和外接球,计及球电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, \quad (23)$$

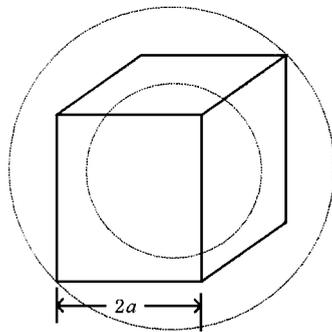


图 6 立方体及内切、外接球

由此,即可得到立方体电容确切的上下界,有

$$12.566\epsilon_0 a < C_0 < 17.7716\epsilon_0 a. \quad (24)$$

我们提出等表面积逼近法,即采用其中球表面积与立方体表面积相同情况作为  $C_0$  的逼近值,其物理意义是在相同的电位条件下,如果平均电荷密度相同,则相同的表面积有相同的总电荷,于是有相同的电容,这时等效半径为

$$R_e = \sqrt{\frac{6}{\pi}} a = 1.3820a, \quad (25)$$

可知

$$C_0 \approx 17.366\epsilon_0 a. \quad (26)$$

与准确值比较,相对误差为  $\delta = 4.6\%$ .

### 4.2. 实例 2 多导体系统

作为典型例子,研究如图 7 所示的对称平行方杆( $W \times W$ )的奇模电容即  $\alpha[1, -1]$ .假定我们知道对称平行圆杆的相关数据<sup>[7,8]</sup>.

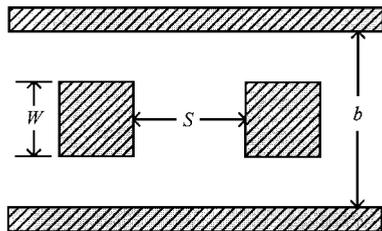


图 7 对称平行耦合方杆

根据广义 Collin 原则,本文采用与方杆等周长的圆作为模式电容的逼近值.其物理意义是:对于二

维情况,在相同的电压条件下,若假定方杆和圆杆电荷都是均匀分布,则两者有相同的电荷(二维分布于周长,且  $z = 1$ ).于是有相同的电容,这是广义上的平均意义.

表 1 和表 2 分别列出了  $W/b = 0.1$  和  $W/b = 0.4$  的  $C/\epsilon$  比较数据和相对误差.

表 1  $W/b = 0.1$  时,  $\alpha[1, -1]$  计算值<sup>[7,8]</sup>和 Collin 原则逼近值

矩形杆 $\frac{1}{2}(s/b)$	矩形杆 计算值	等周长 逼近值	相对误差 1%
0.25	1.588	1.613	1.57
0.35	2.150	2.169	0.88
0.45	2.463	2.474	0.45
0.55	2.627	2.623	-0.15
0.65	2.673	2.656	-0.60

表 2  $W/b = 0.4$  时,  $\alpha[1, -1]$  计算值<sup>[7,8]</sup>和 Collin 原则逼近值

矩形杆 $\frac{1}{2}(s/b)$	矩形杆 计算值	等周长 逼近值	相对误差 1%
0.25	4.946	4.763	-3.70
0.35	5.591	5.786	3.49
0.45	5.901	6.375	8.03
0.55	6.086	6.410	5.32
0.65	6.171	6.891	11.67

## 5. 结 论

本文把 Collin 变分原则推广到孤立导体和多导体系统.利用广义平均意义,等表面积的导体估计电容逼近值,不仅方法简单,而且从应用实例看出,其估计值很靠近于真实值.

这一工作将有助于快速估计复杂系统的电容,同时确切了解问题的上下界.

- [1] Collin R E 1960 *Field Theory of Guided Waves* (New York: McGraw-Hill Book Company)
- [2] Lee T D. 1965 *Mathematical methods of physics* (Издательство «МИР»)
- [3] Lin W G and Zhong X L 1963 *Acta Phys. Sin.* 1963(4) 19 (in Chinese) [林为干、钟祥礼 1963 物理学报 1963(4) 19]
- [4] Lin W G 1963 *Acta Phys. Sin.* 1963(5) 19 (in Chinese) [林为干 1963 物理学报 1963(5) 19]
- [5] Lin W G 1977 *Acta Phys. Sin.* 1977(1) 26 (in Chinese) [林为干 1977 物理学报 1977(1) 26]

- [6] Lin W G and Zeng L R 1981 *Acta Phys. Sin.* 1981(1) 30 (in Chinese) [林为干、曾令儒 1981 物理学报 1981(1) 30]
- [7] Gan B B 1978 *the Designing Handbook of Microwave Transmission Line* (Xi'an: Northwest Telecommunication Institute) (in Chinese) [甘本 1978 微波传输线设计手册(西北电讯工程学院出版社)]
- [8] Gan B B and Wu W CH 1973 *Design and Structure of Modern Microwave Filter* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [甘本、吴万春 1973 现代微波滤波器的结构与设计与(北京:科学出版社)]

# Generalized Collin principle of an isolated conductor and multi-conductor systems

Liang Chang-Hong Su Tao Wan Ji-Xiang

(Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 14 March 2003; revised manuscript received 14 April 2003)

## Abstract

The Collin principle has been used to estimate the upper bound and lower bound of practical capacitance, which gave out many simple and applicable results. The principle is generalized to the three-dimensional isolated and multi-conductor systems in this paper. Some applicable examples are given by using the approximate method of equal surface area.

**Keywords:** isolated conductor, three-dimensional multi-conductor system, generalized Collin principle

**PACC:** 0200, 0260, 0630L