第 53 卷 第 1 期 2004 年 1 月
1000-3290/2004/53(01)/0005-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.1,January,2004

奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性*

罗绍凯

(长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

(2003 年 1 月 23 日收到;2003 年 3 月 31 日收到修改稿)

研究奇异系统 Hamilton 正则方程的形式不变性即 Mei 对称性,给出其定义、确定方程、限制方程和附加限制方程.研究奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,寻求系统的守恒量.给出一个例子说明结果的应用.

关键词:奇异系统,Hamilton 正则方程,约束,对称性,守恒量

PACC:0320,0220

1. 引 言

在 Legendre 变换下,奇异 Lagrange 系统在过渡到相空间用 Hamilton 正则变量描述时,其正则变量之间存在固有约束,称之为约束 Hamilton 系统[1].众多重要的物理系统均属于这类系统,例如,描述自然界基本相互作用中的量子电动力学(QED)、量子味动力学(QFD,弱电统一理论)、量子色动力学(QCD,强作用理论)和广义相对论(GR,引力理论),以及超对称、超引力和超弦理论中的 Lagrange 函数均是奇异的,因此约束 Hamilton 系统的基本理论在理论物理学中,特别是在现代量子场论中,占有十分重要的地位[1—4].

动力学系统的对称性与守恒量在现代数学、力学和物理学中发挥着非常重要的作用.利用对称性寻求系统守恒量的方法主要有:Noether 对称性[5]、Lie 对称性[6]和 Mei 对称性[7].Noether 对称性是利用动力学系统的 Hamilton 作用量泛函在无限小变换下的不变性寻求系统的守恒量.Lie 对称性是利用系统的动力学方程在无限小变换下的不变性寻求系统的守恒量.Mei 对称性是利用动力学方程中的动力学函数在无限小变换下仍保持原方程形式不变寻求系统的守恒量.Mei 对称性是近年来受到学术界关注的一种新的对称性[7],最近,这种对称性的研究被迅速拓展到 Appell 系统[8—11]、Nielsen 系统[12,13]、Chaplygin 系统[14]、Birkhoff 系统[15—19]、非完整系统[20]、可积微分动力学系统[21]、广义经典力学系统[22]、变质量系统[9]、相对论系统和转动相对论系统[10,18,19],形成了利用对称性寻求系统守恒量的一种新的通用性的方法.但是,关于奇异系统的 Mei 对称性的研究尚未见报道.

Dirac 和 Li 研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Noether 对称性与守恒量及其在众多物理系统中的应用[1—4].Mei 研究了奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量[23],Zhang 研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Lie 对称性与守恒量[24].本文研究奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性与守恒量.首先,给出奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性定义,建立相应的确定方程、限制方程和附加限制方程,提出弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性的概念;其次,分别研究奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,寻求系统的守恒量;然后,给出一个例子说明本文结果的应用;最后,对三种对称性之间的关系加以讨论.

2. 奇异系统的 Hamilton 正则方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s =$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010,10272021,10372053),河南省自然科学基金(批准号:934060800),湖南省自然科学基金(批准号:03JJY3005)和湖南省教育厅科研基金(批准号:02C033)资助的课题.

$1,\cdots,n$)来确定,系统的 Lagrange 函数 $L(t,q_s,\dot{q}_s)$,广义动量为 $p_s=\partial L/\partial\dot{q}_s\ (s=1,\cdots,n)$,设 L 的 Hess 矩阵($\partial^2 L/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k$)的秩为 $r<n$. 利用 Legendre 变换,将 Lagrange 描述过渡到 Hamilton 描述时,在相空间中正则变量之间存在固有约束

$$\varphi_j(t,q_s,p_s)=0\quad(j=1,\cdots,n-r),\tag{1}$$

则奇异系统的 Hamilton 正则方程为[2]

$$\dot{q}_s=\{q_s,H_T\},\dot{p}_s=\{p_s,H_T\},\tag{2}$$

其中 $H_T=H_c+\lambda_j\varphi_j$ 称为总 Hamilton 函数,H_c 为正则 Hamilton 函数,λ_j 为 Lagrange 乘子. 方程(2)式可与 Lagrange 方程等价[25],因此,系统在相空间中状态的变化是由 H_T 决定的. 由于存在约束方程(1),我们必须算完 Poisson 括号后才能用这些约束. 方程(2)可写为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H_c}{\partial p_s}+\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H_c}{\partial q_s}-\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_s}$$
$$(s=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n-r).\tag{3}$$

考虑仅含第二类约束的奇异系统,即假设约束(1)式包括第二类初级约束和次级约束,有

$$\det|\{\varphi_i,\varphi_j\}|_{\varphi=0}\neq0,(i\neq j;i,j=1,\cdots,n-r),$$

那么(3)式中的所有 Lagrange 乘子 λ_j 可由约束的相容性条件[2]

$$\{\varphi_i,H_T\}=\{\varphi_i,H_c\}+\lambda_i\{\varphi_i,\varphi_j\}=0\tag{4}$$

完全确定,有

$$\lambda_j=\lambda_j(t,q_s,p_s).$$

3. 奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性及其确定方程

引入时间、广义坐标和广义动量的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,q_k,p_k),$$
$$q_s^*=q_s+\varepsilon\xi_s(t,q_k,p_k),$$
$$p_s^*=p_s+\varepsilon\eta_s(t,q_k,p_k)\ (s,k=1,\cdots,n),\tag{5}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s,η_s 为无限小变换的生成元,取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\eta_s\frac{\partial}{\partial p_s},\tag{6}$$

及其一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+(\dot{\eta}_s-\dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{p}_s}.\tag{7}$$

定义 如果正则 Hamilton 函数 H_c 和约束方程 $\varphi_j=0$ 在无限小变换(5)下使得运动方程(1),(2)的形式保持不变,即

$$\varphi_j^*(t,q_s,p_s)=0\ (j=1,\cdots,n-r),$$
$$\dot{q}_s=\{q_s,H_T^*\},\dot{p}_s=\{p_s,H_T^*\},$$
$$H_T^*=H_c^*+\lambda_j\varphi_j^*\tag{8}$$

成立,亦即

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H_c^*}{\partial p_s}+\lambda_j\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial p_s},$$
$$\dot{p}_s=-\frac{\partial H_c^*}{\partial q_s}-\lambda_j\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial q_s}$$
$$(s=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n-r)\tag{9}$$

成立,则称这种不变性为奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性.

定理 1 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足如下的确定方程

$$\frac{\partial}{\partial p_s}X^{(0)}(H_c)+\lambda_j\frac{\partial}{\partial p_s}X^{(0)}(\varphi_j)=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial q_s}X^{(0)}(H_c)+\lambda_j\frac{\partial}{\partial q_s}X^{(0)}(\varphi_j)=0,$$
$$(s=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n-r),\tag{10}$$

则与系统(1),(2)相应的自由 Hamilton 系统(3)式具有 Mei 对称性.

证明 分别展开 H_c^* 和 φ_j^*,有

$$\begin{aligned}H_c^*&=H_c(t^*,q_s^*,p_s^*)\\&=H_c(t,q_s,p_s)+\varepsilon X^{(1)}(H_c)+O(\varepsilon^2)\\&=H_c(t,q_s,p_s)+\varepsilon X^{(0)}(H_c)+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\varphi_j^*&=\varphi_j(t^*,q_s^*,p_s^*)\\&=\varphi_j(t,q_s,p_s)+\varepsilon X^{(0)}(\varphi_j)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{12}$$

把(11)式和(12)式代入方程(9),并利用方程(3),忽略 ε^2 及以上高阶小项,便得(10)式.

把方程(10)称为奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性确定方程.

约束(1)在无限小变换(5)下的不变性归结为

$$X^{(0)}(\varphi_j(t,q_s,p_s))|_{\varphi_j=0}=0$$
$$(j=1,\cdots,n-r),\tag{13}$$

称(13)式为无限小生成元的限制方程.

定理 2 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足确定方程(10)和限制方程(13),则系统(1),(2)具有弱 Mei 对称性.

单从微分方程中的动力学函数在无限小变换下

保持原方程形式不变而言,上述定义的弱 Mei 对称性就是通常理解的 Mei 对称性.但是,若考虑到微分方程的导出过程,则因对无限小生成元还要施加另外的限制,而必须定义另外的 Mei 对称性.对于奇异系统,由于正则变量之间存在的约束(1)式必须适合相容性条件,以使 Lagrange 描述与 Hamilton 描述的结果相同,在推导(2)式时,有[2]

$$\delta\varphi_j = \frac{\partial\varphi_j}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial\varphi_j}{\partial p_s}\delta p_s = 0, \tag{14}$$

将由变换(5)式确定的等时变分代入(14)式,有

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial\varphi_j}{\partial p_s}(\eta_s - \dot{p}_s\xi_0) = 0, \tag{15}$$

称方程(15)为附加限制方程.

定理 3 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足确定方程(10)、限制方程(13)和附加限制方程(15),则系统(1),(2)具有强 Mei 对称性.

4. 奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性与 Noether 对称性

Li 深入、系统、全面地研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Noether 对称性与守恒量[2-4].下面的定理给出系统(1),(2)的 Mei 对称性与 Noether 对称性之间的关系,并得到系统的守恒量.

定理 4 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10),而且存在规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足下列广义 Noether 等式

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H_c}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H_c}{\partial q_s}\xi_s - H_c\dot{\xi}_0 - \lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial q_s} \times(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) - \lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_s}(\eta_s - \dot{p}_s\xi_0) = -\dot{G}, \tag{16}$$

则与系统(1),(2)相应的自由 Hamilton 系统(3)的 Mei 对称性导致 Noether 对称性,且系统存在如下守恒量

$$I = p_s\xi_s - H_c\xi_0 + G = \text{const}. \tag{17}$$

定理 5 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)和限制方程(13),而且存在规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足广义 Noether 等式(16),则系统(1),(2)的弱 Mei 对称性导致弱 Noether 对称性,且系统存在形如(17)式的弱守恒量.

定理 6 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)、限制方程(13)和附加限制方程(15),而且存在规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足下列 Noether 等式

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H_c}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H_c}{\partial q_s}\xi_s - H_c\dot{\xi}_0 = -\dot{G},$$

$$\eta_s = \frac{\partial p_s}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0), \tag{18}$$

则系统(1),(2)的强 Mei 对称性导致强 Noether 对称性,且系统存在形如(17)式的强守恒量.

下面分别给出定理 4—6 的逆定理.

定理 7 对于给定的奇异系统(1),(2),如果存在无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 和规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足广义 Noether 等式(16),而且使得 Mei 对称性确定方程(10)成立,那么,与系统(1),(2)相应的自由 Hamilton 系统(3)式的 Noether 对称性导致 Mei 对称性,且系统存在形如(17)式的守恒量.

定理 8 对于给定的奇异系统(1),(2),如果存在无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 和规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足广义 Noether 等式(16),而且使得 Mei 对称性确定方程(10)和限制方程(13)成立,则系统(1),(2)的弱 Noether 对称性导致弱 Mei 对称性,且系统存在形如(17)式的弱守恒量.

定理 9 对于给定的奇异系统(1),(2),如果存在无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 和规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足 Noether 等式(18),而且使得 Mei 对称性确定方程(10)、限制方程(13)和附加限制方程(15)成立,则系统(1),(2)的强 Noether 对称性导致强 Mei 对称性,且系统存在形如(17)式的强守恒量.

5. 奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性与 Lie 对称性

Zhang 研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Lie 对称性与守恒量[24].下面的定理给出系统(1),(2)的 Mei 对称性与 Lie 对称性之间的关系,并得到系统的守恒量.

定理 10 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10),而且使得 Lie 对称性确定方程

$$\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left(\frac{\partial H_c}{\partial p_s}\right) + X^{(0)}\left(\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial p_s}\right),$$

$$\dot{\eta}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0 = -X^{(0)}\left(\frac{\partial H_c}{\partial q_s}\right) - X^{(0)}\left(\lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_s}\right)$$

$$(s = 1,\cdots,n;j = 1,\cdots,n - r) \tag{19}$$

成立,那么,与系统(1),(2)相应的自由 Hamilton 系统(3)的 Mei 对称性导致 Lie 对称性.反之,亦然.

定理 11 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)和限制方程(13),而且使得 Lie 对称性确定方程(19)成立,则系统(1),(2)的弱 Mei 对称性导致弱 Lie 对称性.反之,亦然.

定理 12 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)、限制方程(13)和附加限制方程(15),而且使得 Lie 对称性确定方程(19)成立,则系统(1),(2)的强 Mei 对称性导致强 Lie 对称性.反之,亦然.

定理 13 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)和 Lie 对称性确定方程(19),而且存在规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足下列结构方程

$$- H_c\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H_c}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H_c)$$

$$- \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) - \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_s}(\eta_s - \dot{p}_s\xi_0) + \dot{G} = 0, \tag{20}$$

那么,与系统(1),(2)相应的自由 Hamilton 系统(3)的 Mei 对称性导致 Lie 对称性(反之,亦然),且系统存在形如(17)式的守恒量.

定理 14 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)、Lie 对称性确定方程(19)和限制方程(13),而且存在规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足结构方程(20),则系统(1),(2)的弱 Mei 对称性导致弱 Lie 对称性(反之,亦然),且系统存在形如(17)式的弱守恒量.

定理 15 对于给定的奇异系统(1),(2),如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(10)、限制方程(13)和附加限制方程(15),而且存在规范函数 $G = G(t,q_s,p_s)$ 满足下列结构方程

$$- H_c\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H_c}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H_c) + \dot{G} = 0, \tag{21}$$

则系统(1),(2)的强 Mei 对称性导致强 Lie 对称性(反之,亦然),且系统存在形如(17)式的强守恒量.

6. 算 例

系统的 Lagrange 函数为[23,24]

$$L = \dot{q}_1 q_2 - q_1\dot{q}_2 + q_1^2 + q_2^2, \tag{22}$$

试研究系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性的关系,并寻求系统的守恒量.

系统的广义动量分别为

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = q_2, p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = - q_1, \tag{23}$$

L 的 Hess 矩阵的秩 $r = 0$,从而正则变量之间存在两个约束

$$\varphi_1 = p_1 - q_2 = 0, \varphi_2 = p_2 + q_1 = 0. \tag{24}$$

系统的正则 Hamilton 函数为

$$H_c = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L = -(q_1^2 + q_2^2), \tag{25}$$

总 Hamilton 函数为

$$H_T = -(q_1^2 + q_2^2) + \lambda_1(p_1 - q_2) + \lambda_2(p_2 + q_1). \tag{26}$$

由约束的相容性条件(4)式,容易得到

$$\lambda_1 = - q_2, \lambda_2 = q_1. \tag{27}$$

系统的运动微分方程(3)给出

$$\dot{q}_1 = - q_2, \dot{q}_2 = q_1, \dot{p}_1 = q_1, \dot{p}_2 = q_2. \tag{28}$$

Mei 对称性的确定方程(10)给出

$$q_1 \frac{\partial}{\partial p_1}(\eta_2 - \xi_1) - q_2 \frac{\partial}{\partial p_1}(\xi_2 + \eta_1) = 0,$$

$$q_1 \frac{\partial}{\partial p_2}(\eta_2 - \xi_1) - q_2 \frac{\partial}{\partial p_2}(\xi_2 + \eta_1) = 0,$$

$$q_1 \frac{\partial}{\partial q_1}(\eta_2 - \xi_1) - q_2 \frac{\partial}{\partial q_1}(\xi_2 + \eta_1) = 2\xi_1,$$

$$q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}(\eta_2 - \xi_1) - q_2 \frac{\partial}{\partial q_2}(\xi_2 + \eta_1) = 2\xi_2. \tag{29}$$

方程组(29)有如下解

$$\xi_0 - 1, \xi_1 = - q_2,$$

$$\xi_2 = q_1, \eta_1 = q_1, \eta_2 = q_2, \tag{30}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = - q_2, \xi_2 = q_1,$$

$$\eta_1 = q_1 + 1, \eta_2 = q_2 + 1. \tag{31}$$

限制方程(13)给出

$$\eta_1 - \xi_2 = 0, \eta_2 + \xi_1 = 0. \tag{32}$$

附加限制方程(15)给出

$$\eta_1 - \xi_2 + (\dot{q}_2 - \dot{p}_1)\xi_0 = 0,$$

$$\eta_2 + \xi_1 - (\dot{q}_1 + \dot{p}_2)\xi_0 = 0. \tag{33}$$

Noether 等式(16)给出与生成元(30),(31)对应的规范函数分别为

$$G_1 = 0, \tag{34}$$

$$G_2 = 0, \tag{35}$$

因此,系统存在形如(17)式的守恒量

$$I_1 = q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_1^2 + q_2^2 = H_T - H_c = \text{const.} \tag{36}$$

$$I_2 = q_1 p_2 - q_2 p_1 = H_T = \text{const.} \tag{37}$$

易验证,生成元(30)式满足条件(32),(33)式,它对应系统的强 Mei 对称性,(36)式为系统的强 Mei 对称性导致的守恒量;生成元(31)式不满足条件(32),(33)式,因此,它是相应自由 Hamilton 系统(28)式的 Mei 对称性变换生成元,(37)式为相应自由 Hamilton 系统的 Mei 对称性导致的守恒量.

Lie 对称性确定方程(19)式给出

$$\dot{\xi} - \dot{q}_1 \dot{\xi}_0 = -\xi_2, \dot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \dot{\xi}_0 = \xi_1,$$
$$\dot{\eta}_1 - \dot{p}_1 \dot{\xi}_0 = \xi_1, \dot{\eta}_2 - \dot{p}_2 \dot{\xi}_0 = \xi_2, \tag{38}$$

方程组(38)式有形如(30),(31)式的解,而且有如下解

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = \cos t, \xi_2 = \sin t,$$
$$\eta_1 = \sin t, \eta_2 = -\cos t, \tag{39}$$

结构方程(20)给出与其对应的规范函数为

$$G_3 = -p_1 \cos t - p_2 \sin t, \tag{40}$$

因此,系统还存在形如(17)式的守恒量

$$I_3 = -(q_1^2 + q_2^2) = H_c = \text{const.} \tag{41}$$

生成元(30),(31)式同时满足确定方程(29)式和(38)式,它们既是 Mei 对称性的,也是 Lie 对称性的;满足条件(32),(33)式的生成元(30)式,对应系统的强 Mei 对称性和强 Lie 对称性,(36)式是系统的强 Mei 对称性也是强 Lie 对称性导致的守恒量;不满足条件(32),(33)式的生成元(31)式,对应于相应自由 Hamilton 系统的 Mei 对称性和 Lie 对称性,(37)式是相应自由 Hamilton 系统的 Mei 对称性也是 Lie 对称性导致的守恒量.生成元(39)式满足方程组(38)式,而且满足条件(32),(33)式,因此,它对应系统的强 Lie 对称性;由于生成元(39)式不满足方程组(29)式,因此,它不对应系统的 Mei 对称性;守恒量(41)式是系统的强 Lie 对称性导致的守恒量,但不是 Mei 对称性导致的守恒量.

7. 讨论与结论

1. 本文给出了奇异系统 Hamilton 正则方程的 Mei 对称性定义和确定方程(10),并提出了弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性的概念.由于约束(1)的限制方程(13)和附加限制方程(15)对三种对称性是共有的,因此弱(强)对称性的概念对三种对称性而言也是相互对应的.

2. 本文全面研究了奇异系统 Hamilton 正则方程的三种对称性之间的关系,文中定理表明:Mei 对称性一般不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性;三种对称性之间既可以相互独立,也可以两两相"交"或三三相"交".如图 1 所示.

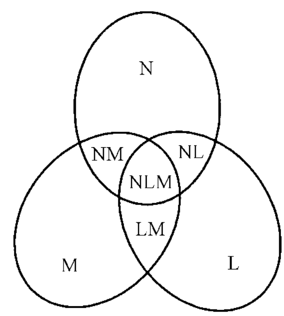

图 1　三种对称性之间的关系

3. 本文讨论了奇异系统 Hamilton 正则方程的三种对称性与守恒量之间的关系.结构方程(20)等价于广义 Noether 等式(16),结构方程(21)等价于 Noether 等式(18),因此,文中定理表明:Noether 对称性直接导致守恒量;Mei 对称性和 Lie 对称性不一定总导致守恒量,它们都是在满足 Noether 等式的条件下才导致守恒量;在无限小变换(5)下,Mei 对称性和 Lie 对称性导致的守恒量都是 Noether 守恒量.由于 Noether 对称性是利用系统的 Hamilton 作用量泛函在无限小变换下的不变性寻求系统的守恒量,是从所有可能的对称性中挑选出存在守恒量的对称性,Noether 等式统一给出了无限小变换的生成元和规范函数,因此,Noether 对称性可以直接导致守恒量.

4. 上述讨论 1—3 同样适用于奇异 Lagrange 系统.上述讨论 2 和 3 同样适用于 Nielsen 系统、Appell 系统、Chaplygin 系统、Birkhoff 系统、非完整约束系统等各类动力学系统.

5. 对于非奇异系统,不存在约束(1)式,文中弱(强)对称性的概念失效,本文的全部结论蜕化为经典 Hamilton 系统的相应结果[26].如果约束(1)满足相容性条件,作为本文定理的推论,我们得到位形空间中奇异 Lagrange 系统三种对称性之间的关系.

6. 奇异系统的 Noether 对称性与守恒量在现代

物理学中占有重要地位并广为应用[1—4].奇异系统的 Mei 对称性、Lie 对称性和能够找到非 Noether 守恒量的新的对称性在现代物理学中的应用,也是值得物理学家们关注的课题.

[1] Dirac P A M 1964 *Lecture on Quantum Mechanics* (New York: Yeshiva University Press)

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[3] Li Z P 1999 *Constrained Hamiltonian Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1999 约束 Hamiltonian 系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[4] Li Z P and Jiang J H 2002 *Symmetries in Constrained Canonical System* (Beijing: Science Press)

[5] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[6] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105

[7] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[8] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[9] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[10] Luo S K 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[11] Luo S K 2002 *J. Changsha Univ.* **16**(4) 1 (in Chinese) [罗绍凯 2002 长沙大学学报 **16**(4) 1]

[12] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[13] Fang J H 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会 2002 物理学报 **51** 2183]

[14] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[15] Mei F X 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 138

[16] Cheng X W, Luo S K and Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 53

[17] Luo S K 2002 *Res. Dyn. Vibr. Contr.* (Beijing: Mechanical Industry Press) p1 (in Chinese) [罗绍凯 2002 动力学、振动与控制研究(北京 机械工业出版社)第1页]

[18] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[19] Luo S K 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 257

[20] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[21] Ge W K *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2105 (in Chinese) [葛伟宽等 2003 物理学报 **52** 2105]

[22] Zhang Y *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[23] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[24] Zhang Y and Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816 (in Chinese) [张 毅、薛 纭 2001 物理学报 **50** 816]

[25] Cabo J 1986 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 629

[26] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

Mei symmetry, Noether symmetry and Lie symmetry of Hamiltonian canonical equations in a singular system*

Luo Shao-Kai

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha* 410003, *China*)

(Received 23 January 2003; revised manuscript received 31 March 2003)

Abstract

The Mei symmetry, i.e. the form invariance, of the Hamiltonian canonical equations in a singular system is studied. The definition, the determining equations, the restriction equations and the additional restriction equations of Mei symmetry of the system are given. The relations among the Mei symmetry, the Noether symmetry and the Lie symmetry are studied, and the conserved quantities of the singular system are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: singular system, Hamiltonian canonical equations, constraint, symmetry, conserved quantity

PACC: 0320, 0220

* Project supported by the National Science Foundation of China (Grant Nos. 19972010, 10272021, 10372053), the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 934060800), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 03JJY3005), and the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 02C033).