

# 混沌系统的预测反馈控制\*

唐国宁 罗晓曙

(广西师范大学物理与电子科学系 桂林 541004)

(2002 年 8 月 16 日收到, 2003 年 4 月 22 日收到修改稿)

提出了一种基于采样数据的预测反馈控制混沌的方法, 用此方法可将混沌 Lorenz, Chua 电路系统控制到指定的平衡点和希望的周期轨道上. 理论分析和数值计算表明该方法具有极强的鲁棒性.

关键词: 混沌, 采样数据, Lorenz 系统, 预测反馈, Chua 电路系统

PACC: 0545

## 1. 引 言

在一定的条件下, 非线性系统会出现混沌. 基于应用混沌的目的, 混沌控制吸引了广泛的注意<sup>[1]</sup>. 近年来, 在混沌控制方面已取得了较大进展, 提出了不少简单而易于推广的控制方法, 例如, 注入反馈控制<sup>[2]</sup>、采样数据反馈控制<sup>[3,4]</sup>、参数开关调制法<sup>[5]</sup>等. 研究实验表明, 基于采样数据控制技术的混沌控制具有很强的鲁棒性和抗噪能力<sup>[6,7]</sup>, 因而有良好的应用前景.

本文提出了一种基于采样数据的预测反馈控制方法, 该方法首先通过对时间序列的过去值进行加权平均来进行预测, 然后将预测值代替延迟反馈方法<sup>[4]</sup>中的延迟项对系统进行控制, 因此该方法不仅具有延迟反馈的特点和如下优点: 无需事先知道被控系统的轨道信息, 控制参数的选择与系统参数无关, 容易在物理上实现和操作等, 而且可以根据选择的控制参数确定控制目标(如将系统控制到指定的平衡点上, 这是传统的延迟反馈方法难以做到的), 将系统控制到周期轨道上时, 控制参数的选取范围也比延迟反馈方法宽.

## 2. 控制原理和稳定性分析

在许多工程应用领域, 经常需要对随机变量变

化的趋势进行预测. 设状态变量  $y$  的一组观测值为  $y_t, y_{t-\Delta}, y_{t-2\Delta}, \dots, y_{t-n\Delta}$ , 这里  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $\Delta$  是采样数据的时间间隔,  $t=n\Delta$  是采样数据的时刻. 设

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} &= \alpha y_t + (1-\alpha)S_t = S_t + \alpha(y_t - S_t) \\ &= \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-\Delta} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2\Delta} \\ &\quad + \dots + \alpha(1-\alpha)^n y_{t-n\Delta} \\ &\quad + (1-\alpha)^{n+1} S_0, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $S_0$  为  $S$  在  $t=0$  时刻的值, 必须使  $\alpha$  满足  $0 < \alpha < 1$ , 以保证  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^k = 1$ , 使  $S_{t+\Delta}$  成为对  $y$  的时间序列的加权平均. 根据预测理论, 可以把  $S_{t+\Delta}$  作为变量  $y$  在  $t+\Delta$  时刻的预测值. 根据  $y$  长期变动趋势的快、慢, 可经验选取较大或较小的  $\alpha$  值以获得较好的预测结果. 由于  $S_{t+\Delta}$  是通过加权平均得到的, 它削弱原时间序列中的不规则变动, 如果用  $S_{t+\Delta}$  代替传统延迟反馈方法中的延迟项, 将会削弱被控系统的随机性, 从而达到控制系统混沌运动的目的. 下面将上述预测方法分别用于混沌 Lorenz 系统、混沌 Chua 电路系统的控制.

### 2.1. 混沌 Lorenz 系统的控制及稳定性分析

Lorenz 系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x), \dot{y} = bx - y - xz, \dot{z} = xy - cz. \end{aligned} \quad (2)$$

当  $a=10, b=28, c=8/3$  时, Lorenz 系统处于混沌状

\* 国家自然科学基金(批准号: 10147101, 10247005)资助的课题.

态<sup>[8]</sup>.为了控制其混沌行为,设计一个控制器,它能在  $t = n\Delta$  时刻采样  $y$  变量数据,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 并按(1)式计算  $t + \Delta$  时刻  $y$  变量的预测值  $S_{t+\Delta}$ , 在时段  $[n\Delta, (n+1)\Delta)$  保持预测值  $S_{n\Delta}$  不变, 即该控制器能将时间序列  $S_{n\Delta}$  变成一阶梯函数  $S_t = S_{n\Delta}, n\Delta \leq t < (n+1)\Delta$ , 并向混沌系统提供恒定的控制输入  $u = -\epsilon(y - e_1 S_t)$  相当在上述方程组的第二等式右边加入控制函数  $u$ , 得到一个受控的 Lorenz 系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= bx - y - xz - \epsilon(y - e_1 S_t), \\ \dot{z} &= xy - cz. \end{aligned} \quad (3)$$

如果选择的控制参数  $e, e_1, \Delta, \alpha$  使得预测值  $S_t \approx y$ , 则可将系统分别稳定在平衡点  $Q_1 = (x_q, y_q, z_q), Q_2 = (-x_q, -y_q, z_q), Q_3 = (0, 0, 0)$  上, 其中  $z_q = b - 1 - e + e_1 e, x_q = y_q = \sqrt{cz_q}$ , 显然不同的控制参数, 对应不同的平衡点, 特别是当  $e_1 = 1.0$  时, 得到的平衡点是原系统的不稳定平衡点. 将(3)式在平衡点  $Q_1, Q_2$  线性化, 可得相应的本征方程

$$\begin{aligned} \lambda^3 + P_1 \lambda^2 + P_2 \lambda + P_3 \\ - g(\lambda^2 + P_4 \lambda + P_5) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} P_1 &= a + c + e + 1, \\ P_2 &= \alpha(c + e + 1 - b + z_q) + (1 + e)c + x_q^2, \\ P_3 &= \alpha[\alpha(1 + e - b + z_q) + x_q^2 + x_q y_q], \\ P_4 &= a + c, \quad P_5 = ac. \end{aligned} \quad (5)$$

当取  $t = 0$  时刻的预测值  $S_0 = 0$  和预测时间间隔  $\Delta$  足够小且满足

$$(1 - \alpha)e^{-\lambda\Delta} < 1, |\lambda\Delta| < 1.0 \quad (6)$$

时取  $g = \frac{ee_1\alpha}{\alpha - 1 + e^{\lambda\Delta}} \approx \frac{ee_1\alpha}{\alpha + \lambda\Delta + 0.5(\lambda\Delta)^2}$ , 从而(4)式化为

$$d_0 \lambda^5 + d_1 \lambda^4 + d_2 \lambda^3 + d_3 \lambda^2 + d_4 \lambda + d_5 = 0, \quad (7)$$

式中

$$\begin{aligned} d_0 &= 0.5\Delta^2, d_1 = \Delta + \frac{P_1\Delta^2}{2}, \\ d_2 &= \alpha + P_1\Delta + P_2\frac{\Delta^2}{2}, \\ d_3 &= P_1\alpha + P_2\Delta + P_3\frac{\Delta^2}{2} - ee_1\alpha, \\ d_4 &= P_2\alpha + P_3\Delta - ee_1\alpha P_4, \end{aligned}$$

$$d_5 = P_3\alpha - ee_1\alpha P_5. \quad (8)$$

平衡点  $Q_1, Q_2$  的稳定性条件可由霍尔维茨判据给出.

由霍尔维茨条件(7)式全部本征值具有负实部的充要条件为

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_1 d_2 - d_3 d_0 > 0, \\ d_1 d_2 d_3 + d_0 d_1 d_5 - d_1^2 d_4 - d_3^2 d_0 > 0, \\ (d_1 d_2 - d_3 d_0)(d_3 d_4 - d_2 d_5) \\ - (d_1 d_4 - d_5 d_0)^2 > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

若全部本征值中有一对纯虚数本征值且其余本征值具有负实部, 则

$$\begin{aligned} d_1 > 0, d_1 d_2 - d_3 d_0 > 0, d_1 d_2 d_3 \\ + d_0 d_1 d_5 - d_1^2 d_4 - d_3^2 d_0 > 0, \\ (d_1 d_2 - d_3 d_0)(d_3 d_4 - d_2 d_5) \\ - (d_1 d_4 - d_5 d_0)^2 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

计算结果表明, 受控 Lorenz 系统在  $\alpha = 0.2 - 0.8, \Delta = 10^{-2}, 10^{-3}$  的条件下, 满足条件(6)式和(10)式的  $e-e_1$  关系曲线形状一般都有微小差异.  $e-e_1$  关系曲线的下方至曲线  $z_q = b - 1 - e + e_1 e = 0$  为控制参数满足条件(9)式和平衡点坐标值是实数的区域, 图1给出在  $\Delta = 10^{-3}$  情况下的  $e-e_1$  关系曲线和  $b - 1 - e + e_1 e = 0$  曲线. 在这两曲线之间区域取控制参数, 条件(6)式始终成立, 从而可将系统控制到平衡点上, 故该区域为稳定区. 在  $e-e_1$  关系曲线的上方附近取控制参数, 条件(6)式也始终成立, 可使方程(7)有一对正实部的共轭本征值, 其余为负实部的复本征值(包括负实数本征值), 有可能将系统控制到周期轨道上.

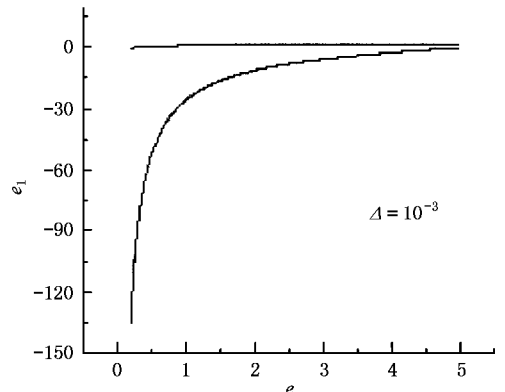


图1 受控 Lorenz 系统的  $e-e_1$  关系曲线(上)和  $b - 1 - e + e_1 e = 0$  曲线(下)

## 2.2. 混沌 Chua 电路系统的控制及稳定性分析

Chua 电路系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(y-x) - b_1 f(x), \\ \dot{y} &= a_2(x-y) + b_2 z, \\ \dot{z} &= -cy, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $f(x) = m_0 x + 0.5(m_1 - m_0)|x + b_p| - 0.5(m_1 - m_0)|x - b_p|$  是分段线性函数, 当  $a_1 = 6.30, b_1 = 9.0, a_2 = 0.70, b_2 = 1.0, c = 7.0, m_0 = -0.50, m_1 = -0.80, b_p = 1.0$  时系统处于混沌状态<sup>[5]</sup>. 在系统中加入控制输入  $u = -ce(z - e_1 S_t)$ , 得到受控 Chua 电路系统的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1(y-x) - b_1 f(x), \\ \dot{y} &= a_2(x-y) + b_2 z, \\ \dot{z} &= -cy - ce(z - e_1 S_t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $S_t$  是  $t$  时刻  $z$  的预测值, 该系统的平衡点为  $Q_1 = (1.5 + 3.5y_q, y_q, z_q), Q_2 = -Q_1, Q_3 = (0, 0, 0)$ , 其中  $z_q = -\frac{1.89}{1.8 - 3.15\alpha(1 - e_1)}, y_q = -e(1 - e_1)z_q$ , 将方程 (12) 在  $Q_1$  点线性化, 同理可得相应本征方程形式如 (4) 和 (7) 式, 经类似受控 Lorenz 系统的稳定性分析可得到受控 Chua 电路系统的  $e-e_1$  关系曲线,  $e-e_1$  关系曲线的下方至曲线

$$z_q = -\frac{1.89}{1.8 - 3.15\alpha(1 - e_1)} = -\infty$$

(即曲线  $\alpha(1 - e_1) = \frac{1.8}{3.15}$ ) 为控制参数满足条件 (9)

式和平衡点坐标值  $x_q > b_p = 1.0$  的区域, 如图 2 所示 (在其他参数下也得到相同结果). 预期的控制结果可类似给出.

值得指出的是, 以上解析分析只是对一不动点附近线性稳定性分析所得的结果, 分析结论原则上不适用于远离不动点的轨道, 但在以下数值实验可观察到, 即使对离参考态较远的轨道, 该分析的定性结论对控制行为仍然有较好的吻合.

## 3. 数值研究结果

本文采用四阶龙格-库塔算法对受控 Lorenz 系统和 Chua 电路系统进行了数值研究. 在数值计算中取  $\Delta = 10^{-2}, 10^{-3}, \alpha = 0.2-0.8$ . 对于 Lorenz 系统,

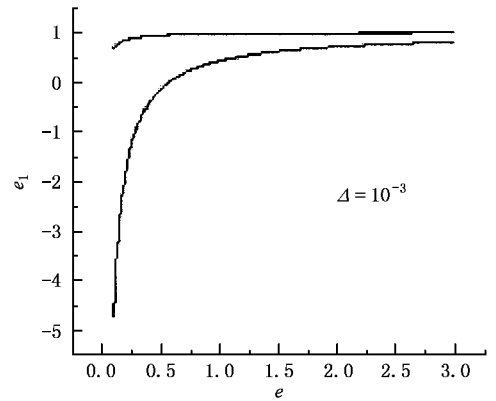


图2 受控 Chua 电路系统的  $e-e_1$  关系曲线(上)和  $\alpha(1 - e_1) = 1.8/3.15$  曲线(下)

系统参数固定取  $a = 10, b = 28, c = 8/3$ , 步长取  $\delta = 10^{-5}$ , 控制参数取  $e = 0.2-5.0$ . 对于 Chua 电路系统, 系统参数固定取文献 [5] 中 Chua 电路系统出现混沌运动的参数, 步长取  $\delta = 10^{-4}$ , 控制参数取  $e = 0.2-3.0$ . 数值研究结果表明:

1) 在给定  $\Delta, \alpha$  情况下, 控制参数  $e, e_1$  在稳定区取值, 都可将两系统控制到平衡点上, 而且与理论预言结果一致, 只是不同初值  $x_0, y_0, z_0$  可将两系统控制到两个对称的平衡点中的一个. 对于 Lorenz 系统, 选取的参数  $e, e_1$  离  $e-e_1$  关系曲线越近, 系统趋于平衡点所用时间越长, 反之越短, 若选取的参数  $e, e_1$  满足  $z_q = b - 1 - e + e_1 e = 0$ , 可将系统控制到平衡点  $Q_3 = (0, 0, 0)$  上. 对于 Chua 电路系统, 选取的参数  $e, e_1$  离  $e-e_1$  关系曲线或曲线  $e(1 - e_1) = \frac{1.8}{3.15}$  越近, 系统趋于平衡点所用时间越长, 反之越短. 这是由于某些本征值的实部趋于零的缘故.

2) 在给定  $\Delta, \alpha$  情况下, 控制参数  $e, e_1$  在  $e-e_1$  关系曲线上适当取值, 都可将两系统控制到周期轨道上, 只是在  $\Delta = 10^{-3}$  情况下,  $e, e_1$  取值范围稍宽.

3) 对于 Lorenz 系统, 控制参数  $e, e_1$  在  $e-e_1$  关系曲线上或其上方附近取值, 可能使系统仍处于混沌状态, 这是因为正实部共轭本征值与负实部本征值产生的效应不能抵消的缘故. 当选择的控制参数使共轭本征值的正实部足够大时, 都可将系统控制到周期轨道上, 而且在不同参数下得到形状相同的周

期轨道对应的共轭本征值的正实部很接近.随着  $e_1$  的增大,共轭本征值的正实部和轨道周期也相应增大(共轭本征值的虚部相应减少),直至共轭本征值转变为正实数本征值,可能导致控制发散.所以当给定  $\Delta, \alpha$  和  $e$  并让  $e_1$  由小到大变化时,控制效果一般按平衡点、混沌、周期轨道、发散顺序变化.相应可将  $e_1$  的取值区间分成四个区:平衡点区、混沌区、周期轨道区、发散区.虽然模拟结果与共轭本征值的正实部存在一定关系,但这种关系在上述提到的区域的边界附近是不清楚的,由于在第二节所述的原因,故不能根据共轭本征值的正实部的值给出混沌区和周期区的边界.如选取  $y = 0$  的 Poincare 截面,作状态

变量  $x$  随控制参数  $e_1$  变化的分岔图,可看出周期区的范围是很宽的.图 3 给出了部分控制到平衡点、周期轨道上的稳定结果.少数情况在  $e_1$  的混沌区会出现周期窗口,图 3(b)就是在这样的窗口中得到的周期轨道.图 4 给出了一组参数下的分岔图(由于系统发散不是突变的,无法在图中给出周期区的上限).一般有随着  $e$  的增大, $e_1$  的混沌区间会逐渐变小,从而使周期区间逐渐靠近  $e-e_1$  关系曲线.显然只有在  $e-e_1$  关系曲线上方附近取控制参数值,控制信号才较弱,获得的周期轨道才接近原系统的不稳定周期轨道.

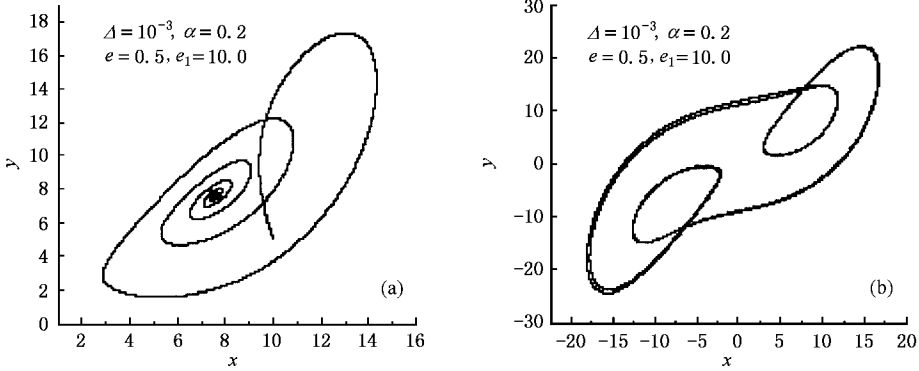


图 3 受控 Lorenz 系统在相空间的稳定轨迹

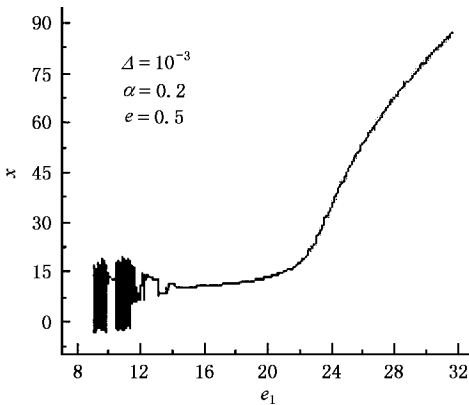


图 4 受控 Lorenz 系统的分岔图(取  $e_1 = 9-32$ )

4)对于 Chua 电路系统,要将系统控制到周期轨道上,初值  $x_0, y_0, z_0$  必须在原系统混沌区内取值,控制参数  $e, e_1$  要在  $e-e_1$  关系曲线上方附近取值,随着  $e_1$  的增大,可将系统控制到越来越高的原系统的不稳定周期轨道上,直至系统进入混沌状态,最后会导致控制发散.同样可将  $e_1$  的取值区间分成四个区,当给定  $\Delta, \alpha$  和  $e$  并让  $e_1$  由小到大变化时,控制效果一般按平衡点、周期轨道、混沌、发散顺序变化,图 5 给出了部分控制结果,图 6 给出了一组参数下的分岔图,在该图中混沌区的右边是发散区,从图可以看出,周期区的范围是比较宽的.在  $\Delta = 10^{-2}$  情况下,在  $e_1$  的周期区会出现混沌窗口.适当选取控制参数,可将系统控制到高周期轨道上,如图 7 所示(在图 5,图 7 的数值结果中取初值  $x_0 = 1, y_0 = -0.2, z_0 = -1$ ).

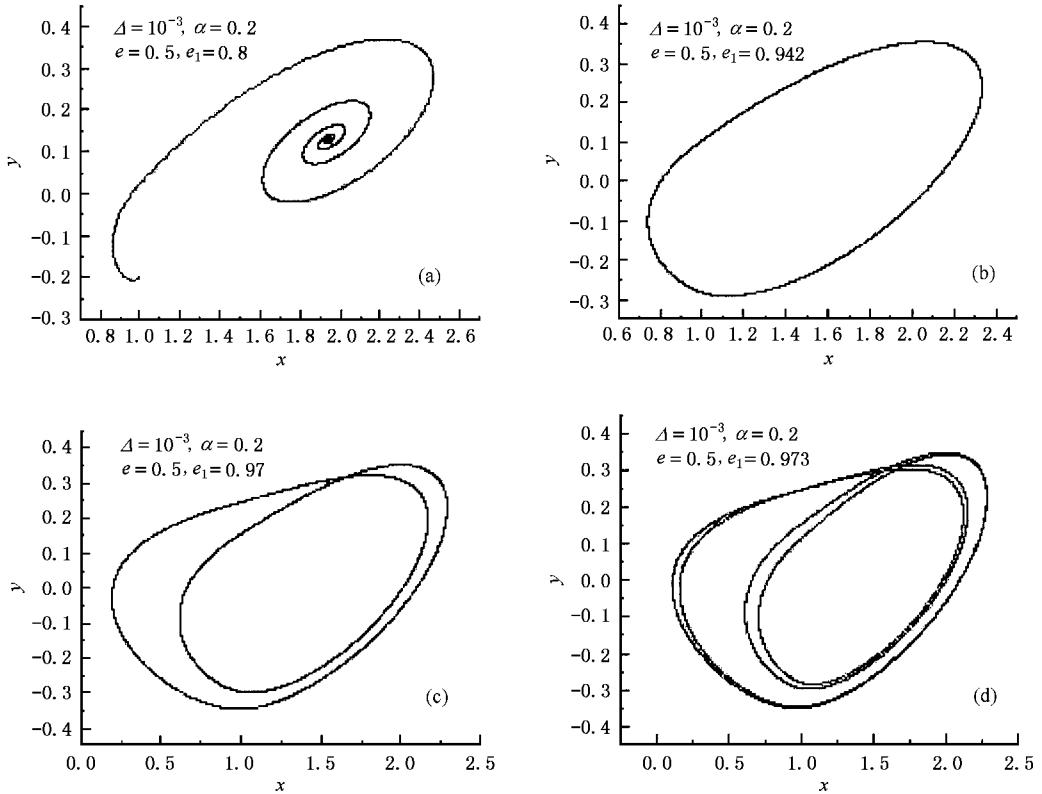


图5 受控 Chua 电路系统在相空间的稳定轨迹

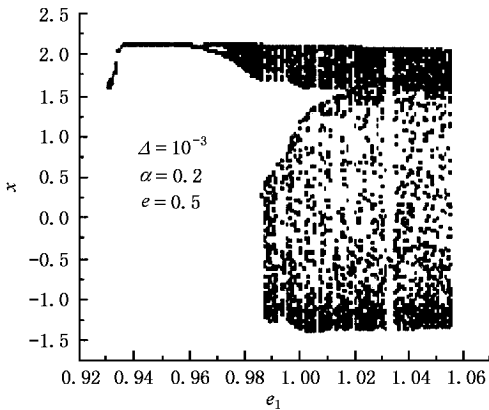


图6 受控 Chua 电路系统分岔图(取  $e_1 = 0.9-1.2$ )

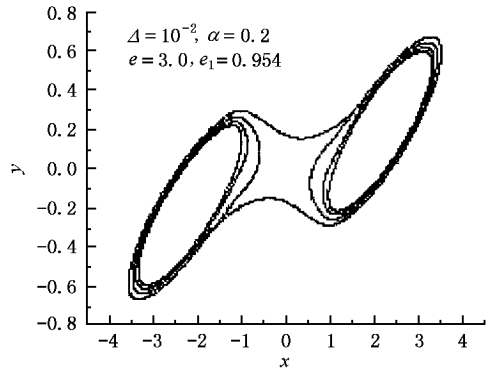


图7 受控 Chua 电路系统在相空间的稳定轨迹

### 4. 结 论

本文提出的预测反馈控制方法 ,可以有效地控制混沌系统 ,这个方法简单实用 ,不改变系统的参数和结构 ,可在相当大的范围内选取控制参数使系统

趋向于指定的平衡点和某个周期轨道上 ,甚至是通过适当选取控制参数使共轭本征值的正实部取某确定值 ,将系统控制到希望的周期轨道上 ,甚至是高周期轨道上 .理论分析和数值研究结果表明 :该控制方法具有很强的鲁棒性 .

- [ 1 ] Ott E , Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [ 2 ] Yan S L *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 428( in Chinese ) [ 颜森林等 2001 物理学报 **50** 428 ]
- [ 3 ] Yang L B and Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1039( in Chinese ) [ 杨林保、杨涛 2000 物理学报 **49** 1039 ]
- [ 4 ] Chen Y Y *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1871( in Chinese ) [ 陈艳艳等 2001 物理学报 **50** 1871 ]
- [ 5 ] Luo X S *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 988( in Chinese ) [ 罗晓曙等 2002 物理学报 **51** 988 ]
- [ 6 ] Itoh M ,Yang T and Chua L O 1999 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **9**( 7 )1393
- [ 7 ] Panas A I ,Yang T and Chua L O 1998 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **8**( 3 )639
- [ 8 ] Tang G N ,Luo X S and Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30( in Chinese ) [ 唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 30 ]

## The prediction feedback control for chaotic systems<sup>\*</sup>

Tang Guo-Ning Luo Xiao-Shu

( Department of Physics and Electronic Science ,Guangxi Normal University ,Guilin 541004 ,China )

( Received 16 August 2002 ; revised manuscript received 22 April 2003 )

### Abstract

A method of sampled-data and prediction -feedback control for chaotic systems is put forward. By this method ,the chaotic Lorenz system and Chua 's circuit system can be controlled in assigned equilibrium points and the periodical trajectories. The results of theoretic and numerical calculations indicate that this controlling method is strongly robust.

**Keywords** : Chaos , sampled-data , Lorenz system , prediction-feedback , Chua circuit system

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant Nos. 10147101 and 10247005 ).