

# 原子间相互作用对原子激光压缩性质的影响

周 明 黄春佳

(长沙理工大学物理与电子科学系, 长沙 410077)

(2002 年 12 月 26 日收到, 2003 年 7 月 3 日收到修改稿)

研究了原子间相互作用对光场与原子玻色-爱因斯坦凝聚体相互作用系统中耦合输出的相干原子束压缩性质的影响. 结果表明, 原子激光的两正交分量的涨落均可压缩, 玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用不利于原子激光的压缩.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 压缩相干态光场, 压缩原子激光

PACC: 3280, 4250

## 1. 引 言

1924 年, 玻色和爱因斯坦在理论上预言了玻色-爱因斯坦凝聚(Bose-Einstein condensation, BEC)现象, 即在一定的温度下, 玻色粒子在最低能量的量子态上迅速聚集, 达到相当可观的数量. 1995 年, 美国科学家在实验室观察到了中性碱金属原子的玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[1, 2]</sup>, 由此开辟了一个全新的物理学研究领域. 近年来人们以极大的兴趣对原子玻色-爱因斯坦凝聚体(Bose-Einstein condensate, BEC)的产生及其独特性质以及原子 BEC 与光场的相互作用进行了大量的实验和理论研究, 取得了一系列重要成果<sup>[3-13]</sup>. 如所周知, 光场与原子的相互作用在原子的冷却、BEC 的制备和探测过程中起着极为重要的作用. 因此, 深入研究 BEC 的光学性质不仅有助于研究 BEC 自身的特性, 而且可能为 BEC 的制备和探测提供有效的方法. You 等人提出的一种普遍的与光子相互作用的原子量子场论<sup>[5]</sup>, 不仅可用于处理超冷原子的量子统计性质, 而且可用于描写原子 BEC 的形成以及 BEC 的量子光学性质. Sun 等人针对原子激光的耦合输出实验提出了一种类似于 J-C 模型的理论分析模型<sup>[6]</sup>. 其后, Jing 等人进一步研究了压缩原子激光的量子动力学理论, 提出利用压缩相干态光场与原子 BEC 的相互作用可以产生压缩原子激光<sup>[7]</sup>. 最近, 景辉等人又提出了一种利用强入射光控制原子激光相干性的方法, 并证明了输出的原子激光束将会随时间演化而呈现一些非经典性质, 如亚泊松分布和正交压缩性质等<sup>[8]</sup>. 但文献

[6, 7] 均没有考虑超冷原子之间的相互作用. 然而, BEC 中原子间的相互作用对于原子 BEC 的形成及其相关性质都是一个非常重要的影响因素. 因此, 研究 BEC 中原子间的相互作用对原子激光量子特性的影响, 无疑具有特别重要的理论意义和应用价值. 本文在文献 [6, 7, 9] 的基础上, 讨论了原子间相互作用对光场与原子 BEC 相互作用系统中耦合输出的相干原子束压缩性质的影响. 结果表明, 玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用不利于原子激光的压缩.

## 2. 系统哈密顿量和态矢

考虑原子间的相互作用, 光场-原子 BEC 系统的总哈密顿量为<sup>[9]</sup>

$$H = \omega_0 b_1^\dagger b_1 + \omega a^\dagger a + \epsilon (a^\dagger b_0^\dagger b_1 + ab_0 b_1^\dagger) + \Omega (b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0 + b_0^\dagger b_1^\dagger b_0 b_1 + b_1^\dagger b_0^\dagger b_1 b_0 + b_1^\dagger b_1^\dagger b_1 b_1), \quad (1)$$

式中  $a^\dagger$  和  $a$  分别为光场光子的产生算符和湮没算符,  $b_0^\dagger$  和  $b_0$ 、 $b_1^\dagger$  和  $b_1$  分别表示基态原子、激发态原子的产生算符和湮没算符,  $\omega$  和  $\omega_0$  分别为光场圆频率和原子本征跃迁圆频率,  $\epsilon$  和  $\Omega$  分别表征光场-原子相互作用强度和 BEC 中原子间相互作用强度.

我们只讨论弱光场情形. 为了使体系的运动方程便于求解, 采用熟知的 Bogoliubov 近似<sup>[14]</sup>. 假定初始时刻处于玻色-爱因斯坦凝聚态的原子数目很大, 以至于在与光场相互作用的过程中基态原子数的缓

慢变化可以忽略不计,从而可以将系统哈密顿量中的  $b_0$  和  $b_0^+$  分别用  $\sqrt{N_0}e^{-i\theta}$  和  $\sqrt{N_0}e^{i\theta}$  替代,略去含  $b_1^+ b_1^+ b_1 b_1$  的项 ( $N_0 \gg N$ ),记  $b = b_1, b^+ = b_1^+$ ,最后系统哈密顿量简化为

$$H = \omega_0 b^+ b + \omega a^+ a + \varepsilon \sqrt{N_0} (a^+ b e^{i\theta} + a b^+ e^{-i\theta}) + \Omega (N_0^2 + 2N_0 b^+ b). \quad (2)$$

为了更清楚地揭示原子玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间相互作用对光场-原子 BEC 系统能量的影响,将系统哈密顿量改写为

$$H = (\omega_0 + 2N_0\Omega) b^+ b + \omega a^+ a + \varepsilon \sqrt{N_0} \times (a^+ b e^{i\theta} + a b^+ e^{-i\theta}) + N_0^2 \Omega. \quad (3)$$

从(3)式可以看出,玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用使原子的能级间隔由原来的  $\omega_0$  增大到  $\omega_0 + 2N_0\Omega$ ,能级间隔的增加量  $\Delta = 2N_0\Omega$  与 BEC 中的原子数  $N_0$  和原子间的相互作用强度  $\Omega$  的乘积成正比.

在共振条件 ( $\omega = \omega_0$ ) 下,求解系统的 Heisenberg 运动方程

$$i\dot{a} = [a, H] = \omega a + \varepsilon \sqrt{N_0} b e^{i\theta}, \quad (4)$$

得到

$$\alpha(t) = \frac{e^{-(\omega_0 + N_0\Omega)t}}{\gamma} \{ \gamma \cos(\gamma t) + iN_0\Omega \sin(\gamma t) \} \alpha(0) - i\sqrt{N_0}\varepsilon \sin(\gamma t) e^{i\theta} b(0), \quad (6)$$

$$b(t) = \frac{e^{-(\omega_0 + N_0\Omega)t}}{\gamma} \{ -i\sqrt{N_0}\varepsilon \sin(\gamma t) e^{-i\theta} \alpha(0) + [ \gamma \cos(\gamma t) - iN_0\Omega \sin(\gamma t) ] b(0) \}, \quad (7)$$

其中  $\gamma = \sqrt{N_0(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)}$ .

### 3. 原子激光的压缩效应

设初始时刻所有原子均处于基态并发生玻色-爱因斯坦凝聚,激发态为真空态.系统的初始态矢可表示为

$$|\varphi(0)\rangle = |\beta_0\rangle \otimes |\Phi(0)\rangle, \quad (8)$$

式中  $|\beta_0\rangle$  为原子基态湮没算符  $b_0$  的本征态,表示在基态发生玻色-爱因斯坦凝聚的原子处于相干态,即有  $b_0|\beta_0\rangle = \sqrt{N_0}e^{-i\theta}|\beta_0\rangle$ ,此处  $N_0$  为处于  $|\beta_0\rangle$  态的平均原子数,而  $|\Phi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |\alpha, \xi\rangle$ ,其中  $|0\rangle$  和  $|\alpha, \xi\rangle$  分别表示初始时刻原子的激发态为真空态而

光场处于压缩相干态,  $|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$ ,其中  $D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$ ,

$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{+2})\right]$ ,且有  $\alpha = \sqrt{n}e^{i\eta}$ ,  $\xi = re^{i\varphi}$ ,  $n$  为初始光场的平均光子数,  $r$  为光场的初始压缩因子.

为了研究原子激光的压缩效应,定义原子激光场的两个缓变的正交分量算符:

$$U_1 = (b e^{i\omega_0 t} + b^+ e^{-i\omega_0 t})/2, \quad (9)$$

$$U_2 = (b e^{i\omega_0 t} - b^+ e^{-i\omega_0 t})/(2i), \quad (10)$$

$U_1, U_2$  满足下列对易关系:

$$[U_1, U_2] = i/2. \quad (11)$$

相应的不确定关系为

$$(\Delta U_1)(\Delta U_2) \geq 1/16. \quad (12)$$

引入

$$Q_i = (\Delta U_i)^2 - \frac{1}{4} \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

若在某一状态下,有  $Q_i < 0$  ( $i = 1$  或  $2$ ),则意味着原子激光的第  $i$  个分量的量子噪声被压缩.利用(6)(7)式,可以得到

$$Q_1(t) = \frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)} \sinh^2[\sinh r \cos(2N_0\Omega t + 2\theta - \varphi)] \sin^2(\sqrt{N_0(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)}t), \quad (14)$$

$$Q_2(t) = \frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)} \sinh^2[\sinh r \cos(2N_0\Omega t + 2\theta - \varphi)] \sin^2(\sqrt{N_0(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)}t). \quad (15)$$

从(14)(15)式不难看出,当

$$\cos(2N_0\Omega t + 2\theta - \varphi) > \tanh r \quad (16)$$

时,有  $Q_1 < 0$ ,但  $Q_2 > 0$ ,即原子激光的  $U_1$  分量可被压缩而  $U_2$  分量不可压缩,而当

$$\cos(2N_0\Omega t + 2\theta - \varphi + \pi) > \tanh r \quad (17)$$

时,有  $Q_2 < 0$ ,但  $Q_1 > 0$ ,即原子激光的  $U_2$  分量可被压缩而  $U_1$  分量不可压缩.不妨选取  $\varphi = 2\theta$ ,则由(16)(17)式可知,当

$$\frac{2n\pi - \arccos(\tanh r)}{2N_0\Omega} < t < \frac{2n\pi + \arccos(\tanh r)}{2N_0\Omega} \quad (t > 0), \quad (18)$$

原子激光的  $U_1$  分量可被压缩而  $U_2$  分量不可压缩;而当

$$\frac{2n\pi - \arccos(\tanh r)}{2N_0\Omega} - \pi < t < \frac{2n\pi + \arccos(\tanh r)}{2N_0\Omega} - \pi \quad (t > 0), \quad (19)$$

原子激光的  $U_2$  分量可被压缩而  $U_1$  分量不可压缩.

考虑到一般情况下原子 BEC 中超冷原子的数目较大,有  $\epsilon^2 \ll N_0 \Omega^2$ , 因此(18)式和(19)式还可简化为

$$Q_1(t) = \frac{\epsilon^2}{2N_0\Omega^2} \sinh r [\sinh r - \cosh r \cos(2N_0\Omega t)] \sin^2(N_0\Omega t) \quad (20)$$

$$Q_2(t) = \frac{\epsilon^2}{2N_0\Omega^2} \sinh r [\sinh r + \cosh r \cos(2N_0\Omega t)] \sin^2(N_0\Omega t). \quad (21)$$

从(20)(21)式可看出,原子激光的两正交分量的涨落均随时间周期性地变化,最大压缩深度为  $\frac{\epsilon^2 \tanh r (\cosh 2r - \sinh 2r)}{16N_0\Omega^2}$ . 这表明原子激光的最大压

缩深度与 BEC 中原子间相互作用系数  $\Omega$ 、光场的初始压缩因子  $r$ 、光场与原子 BEC 相互作用系数  $\epsilon$  以及处于基态的超冷原子数目  $N_0$  等因素密切相关. 若取  $r = 0.5$ ,  $\epsilon/\Omega = 100$ ,  $N_0 = 10^4$ , 原子激光的最大压缩深度约为 1%. 可见,由具有相互作用的 BEC 制备的原子激光是不易压缩的,而且在光场的初始

压缩因子、光场与原子 BEC 相互作用强度以及处于基态的超冷原子数目一定的情况下, BEC 中原子间的相互作用越强,原子激光的压缩深度越小,即玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用不利于原子激光的压缩.

## 4. 结 论

本文运用全量子理论,在旋波近似和波戈留玻夫近似下,考虑原子间的相互作用,给出了单模光场与二能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体相互作用系统的哈密顿量,求解了系统的动力学方程,并进一步讨论了原子间相互作用对压缩相干态光场与原子玻色-爱因斯坦凝聚体相互作用系统中原子激光正交压缩特性的影响. 结果表明:在一定的条件下,原子激光的两正交分量的涨落均可压缩,其最大压缩深度与原子间相互作用、光场的初始压缩因子、光场与原子 BEC 相互作用强度以及处于基态的超冷原子数目等因素密切相关. 玻色-爱因斯坦凝聚体中原子间的相互作用不利于原子激光的压缩.

- [1] Anderson M H, Enscher J R, Methews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [4] Anderson B P and Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [5] You L, Lewenstein M and Cooper J 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4712
- [6] Sun C P, Zhan H, Miao Y X *et al* 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 161
- [7] Jing H, Chen J L and Ge M L 2001 *Phys. Rev. A* **63** 15601
- [8] Jing H and Ge M L 2001 *Science in China A* **31** 725 [ in Chinese ] 景辉、葛墨林 2001 中国科学(A辑) **31** 725 ]

- [9] Zhou M, Fang J Y and Huang C J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1916 ( in Chinese ) [ 周 明、方家元、黄春佳 2002 物理学报 **52** 1916 ]
- [10] Kuang L M 1998 *Commun. Theor. Phys.* **30** 161
- [11] Kuang L M and Ouyang Z W 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023604
- [12] Zhou M and Huang C J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2514 ( in Chinese ) [ 周 明、黄春佳 2002 物理学报 **51** 2514 ]
- [13] Zhao Z C and Kuang L M 2000 *Acta Sin. Quant. Opt.* **6** 29 ( in Chinese ) [ 赵志超、匡乐满 2000 量子光学学报 **6** 29 ]
- [14] Ni G J and Chen S Q 2000 *Advanced Quantum Mechanics* ( Shanghai: Fudan University Press ) p372 ( in Chinese ) [ 倪光炯、陈苏卿 2000 高等量子力学(上海:复旦大学出版社)第 372 页 ]

# Influence of the interaction between atoms on the squeezing properties of atomic lasers

Zhou Ming Huang Chun-Jia

( *Department of Physics and Electronic Science , Changsha University of Science and Technology , Changsha 410077 , China* )

( Received 26 December 2002 ; revised manuscript received 3 July 2003 )

## Abstract

The influence of the interaction between atoms in Bose-Einstein condensate ( BEC ) on the squeezing properties of atomic lasers is studied under Bogoliubov approximation. The results show that the fluctuations of two quadrature components of the atomic laser can be squeezed and the interaction between atoms in BEC is disadvantageous to the squeeze of atomic lasers.

**Keywords** : Bose-Einstein condensate , squeezed state , atomic laser

**PACC** : 3280 , 4250