

# 连续时间混沌系统的自适应 $H_\infty$ 同步方法

魏 荣 王行愚

(华东理工大学信息学院, 上海 200237)

(2004 年 1 月 9 日收到, 2004 年 2 月 27 日收到修改稿)

提出了一种连续时间混沌系统的自适应  $H_\infty$  同步方法. 当响应系统没有受噪声干扰影响时, 所设计的自适应  $H_\infty$  同步控制器能够使响应系统与驱动系统全局同步. 当响应系统受噪声干扰影响时, 自适应  $H_\infty$  同步控制器能够使噪声干扰对同步误差的影响小于期望的水平. 最后, 以蔡氏电路混沌系统为例来说明所提方法的有效性.

关键词: 混沌, 混沌同步, 自适应控制,  $H_\infty$  控制, 自适应  $H_\infty$  同步

PACC: 0545

## 1. 引 言

两个相同的混沌系统, 如果它们的初始条件存在着无穷小的误差或存在着小的随机干扰和参数变化, 那么它们的解将按指数分离和在有限时间内变得无关. 因此, 两个混沌系统能够同步, 即在时间平均或渐近意义下, 其中一个混沌系统的状态达到另一个混沌系统的状态, 是令人难以置信的. 这种重要的现象称为“混沌同步”. 在许多实际物理系统如电路、激光、化学反应、高频电路等中, 人们已经发现了混沌同步现象<sup>[1, 2]</sup>. 同步是自然界中常见的现象, 在工程中是极其重要的, 已经应用在机械、电子、通信、测量、控制、激光等许多领域<sup>[1, 2]</sup>.

在 1983 年, Fujisaka 和 Yamada<sup>[3]</sup>进行了混沌同步的早期研究工作. 他们考虑了由许多相同混沌振荡器耦合组成的大系统, 研究表明当耦合强度充分强时, 所有振荡器将呈现相同的混沌振荡即同步. 尽管 Fujisaka 和 Yamada 是第一个利用局部分析法研究混沌同步, 但他们的工作当时并没有引起人们的注意. 随后, 文献 4 提出了许多分析混沌同步的必要概念. 然而第一个注意到混沌同步可以应用于通信的是 Pecora 和 Carroll<sup>[5]</sup>. Pecora 和 Carroll 的工作引起了人们研究混沌同步及其应用的极大兴趣, 特别是在通信中的应用<sup>[1, 2, 6-8]</sup>. 目前, 人们已经提出了许多同步方案如非线性反馈方法<sup>[9]</sup>、脉冲同步方法<sup>[10, 11]</sup>、滑模变结构控制同步方法<sup>[12]</sup>、预测控制同步方法<sup>[13]</sup>、观测器同步方法<sup>[14, 15]</sup>等. 有关混沌同步的综述可见文献 [1, 2]. 一方面, 混沌同步可以看作

是一个特殊的观测器设计问题<sup>[14, 15]</sup>, 另一方面, 混沌同步也可以看作是动态系统的控制问题<sup>[7-13]</sup>.

目前提出的混沌系统同步方法大部分都是没有考虑响应系统中存在的系统噪声对同步性能的影响. 本文基于自适应控制和  $H_\infty$  控制的思想, 提出了一种连续时间混沌系统的自适应  $H_\infty$  同步控制器. 当响应系统没有受噪声干扰影响时, 该连续自适应  $H_\infty$  同步控制器能够使响应系统与驱动系统全局同步. 当响应系统受噪声干扰影响时, 该连续自适应  $H_\infty$  同步控制器能够使噪声干扰对同步误差的影响小于期望的水平. 最后, 以蔡氏电路混沌系统为例来说明所提方法的有效性.

## 2. 混沌系统同步问题的描述和控制器的设计

考虑如下两个连续时间混沌系统

$$\dot{y} = Ay + Bg(y, t),$$

$$y(0) = y_0 \in R^n, \quad (1)$$

$$\dot{x} = Ax + B(g(x, t) + u(t)) + Ca(t),$$

$$x(0) = x_0 \in R^n, \quad (2)$$

其中  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{n \times l}$ ,  $g: R^n \times R \rightarrow R^n$ ,  $x \in R^n$ ,  $y \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  ( $A, B$ ) 可控, 噪声干扰  $\omega(t) \in R^l$  属于  $L_2[0, \infty)$ , 即满足如下能量有限条件:

$$\int_0^T \omega^T(t)\omega(t)dt < \infty. \quad (3)$$

令 (1) 式为驱动系统, (2) 式为响应系统, 记  $e(t) = x(t) - y(t)$ . 响应系统 (2) 式和驱动系统 (1) 式同步

的问题就可以转化为对误差系统进行研究,同步误差系统为

$$\dot{e} = A e(t) + B(g(x(t)) - g(y(t)) + C\omega(t) + u(t)). \quad (4)$$

若函数  $g(\cdot, \cdot)$  未知,可利用混沌吸引子的有界性引入如下假设<sup>[10,15]</sup>.

假设 1 设混沌系统(1)式和(2)式中的非线性部分  $g: R^n \times R \rightarrow R^n$  满足 Lipschitz 条件,即

$$\|g(x(t)) - g(y(t))\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad (5)$$

其中  $x \in \Omega_1 \subset R^n, y \in \Omega_2 \subset R^n, \Omega_1, \Omega_2$  分别为混沌系统(1)和(2)的状态演化空间,  $\gamma$  为未知的 Lipschitz 常数.

注 1 混沌系统都可以分解成(1)和(2)式形式所示的线性和非线性两个部分,如著名的蔡氏电路, Rössler 混沌系统, Lorenz 混沌系统等.此外,在混沌控制和同步化问题中,在某种情况下可以人为选取外加控制的形式,这也是混沌控制和同步化问题所具有的特殊性,和以往一般意义下的控制问题有所不同,故可通过人为地选择  $B$  (外加控制形式)来满足(2)式.

注 2 假设 1 看起来不容易做到,其实由于混沌系统的吸引子具有有界性,故几乎所有混沌系统中的非线性都可以被看作满足 Lipschitz 条件,至少是满足局部 Lipschitz 条件.如蔡氏电路中的非线性满足全局 Lipschitz 条件, Rössler 和 Lorenz 混沌系统中的非线性满足局部 Lipschitz 条件.

为了能够实现混沌系统(1)和(2)之间的鲁棒同步,设计如下的混沌同步控制器:

$$u(t) = -K e(t) - \hat{k}(t) \|e\| \frac{B^T M e}{\|B^T M e\|}, \quad (6)$$

$$\dot{\hat{k}}(t) = q \|B^T M e\| \|e\|, \hat{k}(0) \in R^+, q \in R^+, \quad (7)$$

其中  $K \in R^{m \times n}$  和对称正定阵  $M \in R^{n \times n}$  满足

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (A - BK)^T M + M(A - BK) + I & MC \\ C^T M & -\delta^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

对于同步误差系统(3),当初始条件为  $e(0) = x(0) - y(0)$  和  $\hat{k}(0)$  时,定义噪声干扰对同步误差影响水平的测量为

$$\Xi = \sup_{0 \neq \tau(0), \alpha(0) \in L_2^2[0, \infty)} \left\{ \frac{\|e(t)\|_2^2}{\|\alpha(t)\|_2^2 + \Sigma(0)} \right\}^{1/2}, \quad (9)$$

其中  $\Sigma(0)$  与系统初始条件有关,表示为  $\Sigma(0) =$

$e^T(0)R_1 e(0) + \tilde{k}^2(0)q_1, \tilde{k}(0) = \hat{k}(0) - \gamma$ , 加权矩阵  $R_1 = R_1^T > 0, q_1 > 0$ . 设计目标是

1) 当  $\omega(t) = 0$  时,混沌系统(1)式和(2)式是渐近同步的;

2) 当  $\omega(t) \neq 0$  时,对于任意给定的  $T > 0$ ,对所有满足(3)式的干扰信号  $\omega(t)$  均有  $\Xi < \delta$ ,其中  $\delta > 0$  为给定常数.

于是有如下定理.

定理 1 若连续时间混沌系统(1)式和(2)式满足假设 1, 给定  $\delta > 0, R_1, q_1$ , 同步控制器  $u(t)$  由(6)式和(7)式确定,且  $M \leq \delta^2 R_1, q_1 \leq \delta^2 q$ , 则对任何初始条件  $x(0), y(0) \in R^n$ , 即  $\forall e(0) \in R^n, \hat{k}(0) \in R^+$ , 有

1) 当  $\omega(t) = 0$  时,混沌系统(1)和(2)是渐近同步的;

2) 当  $\omega(t) \neq 0$  时,对于任意给定的  $T > 0$ ,对所有满足(3)式的干扰信号  $\omega(t)$  均有  $\Xi < \delta$ . 即能实现连续时间混沌系统(1)式和(2)式之间的自适应鲁棒同步.

证明 在定理 1 条件下,首先建立当  $\omega(t) = 0$  时,同步误差系统的渐近稳定性.

构造 Lyapunov 函数

$$V(e, \hat{k}, t) = e^T M e + \frac{1}{q} \tilde{k}^2(t), \quad (10)$$

式中  $\tilde{k}(t) = \hat{k}(t) - \gamma$ . 因  $M$  为对称正定阵,故  $V(e, \hat{k}, t)$  是正定的.当  $\omega(t) = 0$  时,将(10)式沿着(4)和(7)式对时间求导数可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \hat{k}, t) &= e^T M \dot{e} + e^T M \dot{e} + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) \\ &= 2 \left[ Ae + B(g(x(t)) - g(y(t))) - BKe - B\hat{k}(t) \|e\| \frac{B^T M e}{\|B^T M e\|} \right]^T M e + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) \\ &= [e^T A_c^T M e + e^T M A_c e + \mathfrak{I}(g(x(t)) - g(y(t)))^T B^T M e - 2\hat{k}(t) \|e\| \|B^T M e\|] \\ &\quad + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) \\ &< -[e^T (I + \delta^2 MCC^T M) e] \\ &\quad - 2\hat{k}(t) \|e\| \|B^T M e\| + 2\gamma \|e\| \|B^T M e\| \\ &\quad + \mathfrak{I}(\hat{k}(t) - \gamma) \|B^T M e\| \|e\| \\ &\leq -\lambda_{\min}(I + \delta^2 MCC^T M) \|e\|^2, \end{aligned}$$

其中  $\lambda_{\min}(I + \delta^2 MCC^T M)$  为  $I + \delta^2 MCC^T M$  的最小特

征值. 所以  $\forall x(0), y(0) \in R^n$ , 即  $\forall \alpha(0) \in R^n, \hat{k}(0) \in R^+$ , 当  $\omega(t) = 0$  时, 混沌系统 (1) 和 (2) 式是渐近同步的.

下一步, 将证明当  $\omega(t) \neq 0$  时, 对于任意给定的  $T > 0$ , 对所有满足 (3) 式的干扰信号  $\omega(t)$  均有

$$\int_0^T \alpha(t)^T \alpha(t) dt < \delta^2 \left( \int_0^T \omega(t)^T \omega(t) dt + \Sigma(0) \right).$$

引入

$$J = \int_0^T [ \alpha(t)^T \alpha(t) - \delta^2 \omega(t)^T \omega(t) ] dt - \delta^2 \Sigma(0),$$

注意到同步误差系统是稳定的,  $\forall \omega(t) \in L_2[0, \infty)$  有

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T [ e^T(t) \alpha(t) - \delta^2 \omega^T(t) \omega(t) ] dt - \delta^2 \Sigma(0) \\ &\leq \int_0^T [ e^T(t) \alpha(t) - \delta^2 \omega^T(t) \omega(t) + \dot{V} ] dt - (\delta^2 \Sigma(0) - V(0)) \\ &\leq \int_0^\infty [ e^T(t) \alpha(t) - \delta^2 \omega^T(t) \omega(t) + \dot{V} ] dt, \end{aligned}$$

其中  $V$  如 (10) 式所示, 因为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \hat{k}(t)) &= e^T Me + e^T Me + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) \\ &= 2 \left[ Ae + B(g(x, t) - g(y, t)) + (-BKe + Bu_N(t)) + C\alpha(t) \right]^T Me \\ &\quad + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) \\ &= 2 \left[ Ae + B(g(x, t) - g(y, t)) + \left( -BKe + B\hat{k}(t) \|e\| \frac{B^T Me}{\|B^T Me\|} \right) \right]^T Me \\ &\quad + 2 \frac{1}{q} \tilde{k}(t) \dot{\tilde{k}}(t) + 2\alpha(t)^T C^T M \\ &= e^T A_c^T Me + e^T M A_c e + \omega^T C^T Me + e^T M C \omega. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J &\leq \int_0^T (e^T A_c^T Me + e^T M A_c e + \omega^T C^T Me + e^T M C \omega + e^T e - \delta^2 \omega^T(t) \omega(t)) dt \\ &= \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} e \\ \omega \end{bmatrix}^T \left[ (A - BK)^T M + M(A - KC) + I \quad MC \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \begin{matrix} C^T M \\ -\delta^2 I \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} e \\ \omega \end{bmatrix} \right\} dt \\ &\equiv \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} e \\ \omega \end{bmatrix}^T \Gamma \begin{bmatrix} e \\ \omega \end{bmatrix} \right\} dt. \end{aligned}$$

由 (8) 式可得  $\forall \omega(t) \in L_2[0, \infty), J < 0$ . 所以  $\int_0^T \alpha(t)^T \alpha(t) dt < \delta^2 \left( \int_0^T \omega(t)^T \omega(t) dt + \Sigma(0) \right)$ . 定理 1 得证.

注意到 (8) 式中存在两个未知矩阵变量  $K$  和  $M$ , 而且这两个矩阵变量是以非线性的形式出现在这个矩阵不等式中, 因此, 要直接从 (8) 式中的矩阵不等式中求解  $K$  和  $M$  是很困难的. 通过对不等式 (8) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵  $\text{diag}\{P^{-1}, I\}$ , 可得不等式 (8) 等价于

$$\begin{bmatrix} (AM^{-1} - BKM^{-1})^T + (AM^{-1} - BKM^{-1}) + I & C \\ C^T & -\delta^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

定义  $P = M^{-1}$  和  $w = KP$ , 则从上式可得线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} (AP - Bw)^T + (AP - Bw) + I & C \\ C^T & -\delta^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来求解该线性矩阵不等式.

### 3. 仿真实例

以蔡氏电路混沌系统为例进行数值仿真, 描述蔡氏电路的方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bg(x) \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} x + B \begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

其中  $f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$ , 当  $\alpha = 10, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$  时, 系统处于混沌状态. 以 (11) 式为驱动系统, 响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay + Bg(y) \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \times (-\alpha f(y_1)) + Bu(t) + C\alpha(t). \end{aligned} \tag{12}$$

取  $B = [1 \ 0 \ 0]^T$ , 则同步误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} e$$

$$+ B(-\alpha(f(x_1) - f(y_1))) + Bu(t) + Ca(t). \quad (13)$$

由于  $f(\cdot)$  为分段线性连续函数, 斜率分别为  $a$  和  $b$ , 故

$$\begin{aligned} \alpha(x_1 - y_1) &\leq f(x_1) - f(y_1) \\ &\leq b|x_1 - y_1|. \end{aligned} \quad (14)$$

由(14)式得  $|f(x_1) - f(y_1)| \leq |a||x_1 - y_1|$ , 进而有

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\| &= 10|f(x_1) - f(y_1)| \\ &\leq 10|a||x_1 - y_1| \\ &\leq 10|a|\|x - y\|. \end{aligned}$$

显然  $\gamma$  可取大于  $10|a| = 12.7$  的任何值, 在此取  $\gamma = 12.7$ . 在干扰抑制性能指标(9)中, 取  $q_1 = 0.5$ ,  $\delta^2 = 0.01$  和  $R_1 = \text{diag}(0.15, 0.75, 1.6) \times 10^5$ , 利用 LMI

工具箱中的求解器 feasp 可得

$$P = \begin{bmatrix} 0.8413 & -0.1021 & 0.3007 \\ -0.1021 & 0.1181 & 0.0237 \\ 0.3007 & 0.0237 & 1.3684 \end{bmatrix} \times 10^3,$$

$$w = [-9.0621 \quad 3.4650 \quad -1.2358] \times 10^3,$$

$$K = [-8.2850 \quad 22.0762 \quad 0.5357].$$

现在假设  $\gamma$  未知, 采用同步控制器(6)和(7)来实现两个蔡氏电路混沌系统间的同步控制, 取同步误差

$\|e\|_2$  及  $(\hat{k}(t) - t)$  随时间  $t$  的变化情况如图 1, 从

图 1 可以看出, 在控制律(6)和(7)的作用下, 蔡氏混沌系统(11)和(12)之间能很好地同步, 同步误差

$\|e\| \rightarrow 0$  且有  $\hat{k} \rightarrow k_0 \approx 7.9$ .

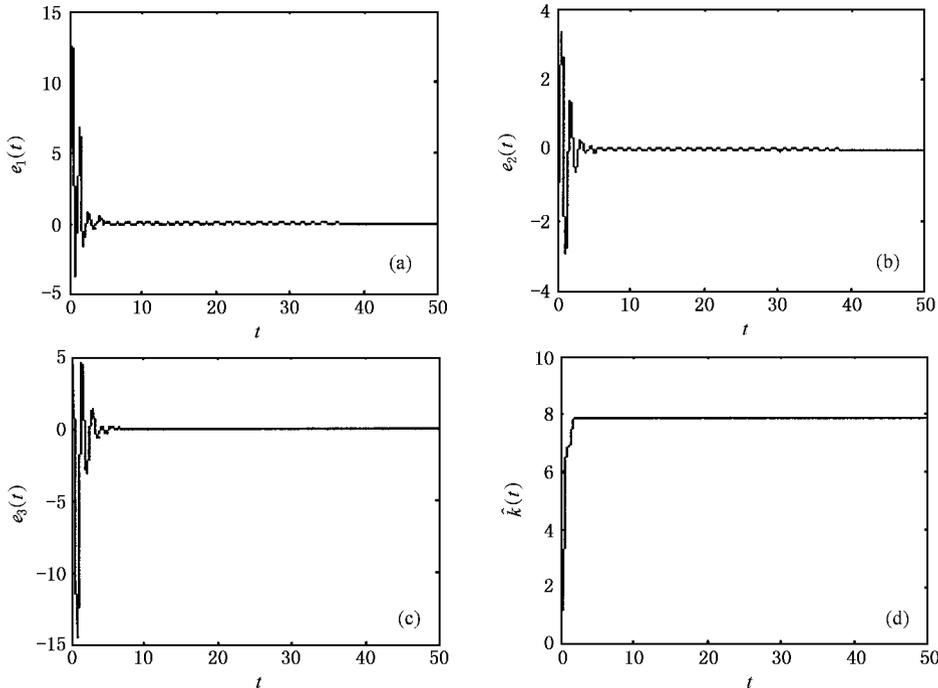


图 1  $\gamma$  未知时蔡氏电路混沌系统同步误差及  $(\hat{k}(t) - t)$  图

## 4. 结 论

本文给出了实现两个连续时间混沌系统自适应鲁棒同步的策略, 当响应系统没有受噪声干扰影响

时, 该自适应鲁棒同步控制器能够使响应系统与驱动系统全局同步. 当响应系统受噪声干扰影响时, 该自适应鲁棒同步控制器能够使噪声干扰对同步误差的影响小于期望的水平. 最后, 以蔡氏电路混沌系统为例的仿真结果说明所提方法的有效性.

- [ 1 ] Chen G and Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives , and Applications* ( Singapore : World Scientific ).
- [ 2 ] Fang J Q 1996 *Progress in Physics* **16** 137( in Chinese ) [ 方锦清 1996 物理学进展 **16** 137 ]
- [ 3 ] Fujisaka H and Yamada T 1983 *Prog . Theory Phys.* **69** 32
- [ 4 ] Afraimovich V S , Verichev N N and Rabinovich M I 1986 *Izv . VUZ . Raiofz . RPQAE* **29** 795
- [ 5 ] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys . Rev . Lett .* **64** 821
- [ 6 ] Lu J G , Wei R , Wang Z Q 2002 *Acta Electronica Sinica* **30** 1003 ( in Chinese ) [ 卢俊国、魏 荣、王执钐 2002 电子学报 **30** 1003 ]
- [ 7 ] Yang T , Shao H H 2002 *Acta Phys . Sin.* **51** 742( in Chinese ) [ 杨 涛、邵惠鹤 2002 物理学报 **51** 742 ]
- [ 8 ] Zhang J S , Xiao X C 2001 *Acta Phys . Sin.* **50** 1248( in Chinese ) [ 张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 1248 ]
- [ 9 ] Gao J F *et al* 1999 *Acta Phys . Sin.* **48** 1618( in Chinese ) [ 高金峰 等 1999 物理学报 **48** 1618 ]
- [ 10 ] Liu F , Mu Z L , Qiu Z L 1999 *Acta Phys . Sin.* **48** 1198( in Chinese ) [ 刘 峰、穆肇骊、邱祖廉 1999 物理学报 **48** 1198 ]
- [ 11 ] Yang L B and Yang T 2000 *Acta Phys . Sin.* **49** 636( in Chinese ) [ 杨林保、杨 涛 2000 物理学报 **49** 636 ]
- [ 12 ] Yin X H , Ren Y and Shan X M 2002 *Acta Phys . Sin.* **51** 1948( in Chinese ) [ 尹逊和、任 勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1948 ]
- [ 13 ] Liu F C , Wang J , Peng H P and Li L X 2002 *Acta Phys . Sin.* **51** 1954( in Chinese ) [ 刘福才、王 娟、彭海朋、李丽香 2002 物理学报 **51** 1954 ]
- [ 14 ] Nijmeijer H and Mareels I M Y 1997 *IEEE Trans . Circuit Syst.* **44** 882
- [ 15 ] Liao Y M and Tung P C 1997 *Phys Rev . E* **56** 5265

## An adaptive $H_\infty$ synchronization approach for continuous-time chaotic systems

Wei Rong Wang Xing-Yu

( College of Information Science and Engineering , East China University of Science and Technology , Shanghai 200237 , China )

( Received 9 January 2004 ; revised manuscript received 27 February 2004 )

### Abstract

An adaptive  $H_\infty$  synchronization approach for continuous-time chaotic systems is proposed. An adaptive controller is designed such that the global asymptotic synchronization between the drive and response systems can be accomplished without noise , and the influence of noises in the response system on the synchronization error is less than the expected level. Finally , the simulation results via Chua 's circuit verify the theoretical results.

**Keywords** : chaos , chaos synchronization , adaptive control ,  $H_\infty$  control , adaptive  $H_\infty$  synchronization

**PACC** : 0545