利用双模压缩真空态实现量子态的远程传输*

宋同强节

(宁波大学物理系,宁波 315211) (2003年10月13日收到2003年12月29日收到修改稿)

借助于双模压缩真空态在 EPR 纠缠态表象中的表示,研究了用双模压缩真空态作为量子通道实现任意的单模和双模量子态的远程传输。

关键词:量子隐形传态, EPR 纠缠态, 压缩真空态

PACC: 4250

1. 引 言

随着量子信息科学的蓬勃发展 ,量子纠缠态找 到了施展作为的主战场.现在 量子纠缠态已经被广 泛地用于量子隐形传态 量子浓缩编码 量子计算等 领域的研究中[1-7].1993年 "Bennett 等人提出了利用 量子态的纠缠特性实现远程隐形传态的理论方 案[3]. Bennett 等人的开创性文章掀起了研究量子隐 形传态的高潮 关于量子隐形传态的各种理论方案 相继出现[8-11].但是 现有的关于量子隐形传态的研 究大都限于分立量子态的传输,对于连续变量的量 子隐形传态则少见报道,最近,山西大学的研究小组 提出了利用明亮压缩光实现连续变量的量子隐形传 态的方案[12] Fan 等人利用 EPR 纠缠态作为量子通 道从理论上研究了双模压缩真空态的隐形传 态[13],本文利用双模压缩态作为量子通道,研究任 意的单模和双模量子态的隐形传态(包括分立的和 连续的量子态).

2. EPR 纠缠态

近年来 量子纠缠态的性质及其应用逐渐成为人们的热门话题. 从历史上讲,纠缠态的概念最早是由爱因斯坦等人提出来的. 为了说明在承认局域性和实在性的前提下,量子力学的描述是不完备的,爱因斯坦等人提出如下一个量子态[14]:

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ip(x_1 - x_2 + x_0)] dp$$
, (1)

其中 x_1 , x_2 分别表示两个粒子的坐标.很容易看出, $\psi(x_1,x_2)$ 是两个粒子的相对坐标 $\hat{X}_1 - \hat{X}_2$ 和总动量 $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ 的共同本征态,它的基本特征是不能写成两个子系统量子态的直积形式.在文献 15 冲, Fan 等人给出了两个粒子的相对坐标 $\hat{X}_1 - \hat{X}_2$ 和总动量 $\hat{P}_1 + \hat{P}_2$ 的共同本征态在双模 Fock 空间的表达式

$$|\eta_{12}| = \exp\left[-\frac{1}{2} |\eta|^2 + \eta a_1^+ - \eta^* a_2^+ + a_1^+ a_2^+\right] |00|_{12},$$
 (2a)

$$(\hat{X}_1 - \hat{X}_2) | \eta_{12} = \eta_1 | \eta_{12},$$
 (2b)

$$(\hat{P}_1 + \hat{P}_2)|_{\eta_{12}} = \eta_2|_{\eta_{12}}, \qquad (2e)$$

$$X_{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{i} + a_{i}^{+}),$$

$$P_{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{i} - a_{i}^{+}),$$
(2d)

其中 $\eta = (\eta_1 + i\eta_2)\sqrt{2}$, 00 是双模真空态. 可以证明 , $|\eta_1|_2$ 是纠缠态 , 它在坐标表象和动量表象中的

Schmidt 分解分别为

$$| \eta_{12} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2} \eta_1 \eta_2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x | x_1$$

$$\otimes | x - \eta_{1/2} \exp(\mathrm{i} \eta_2 x), \qquad (3)$$

$$| \eta_{12} = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2} \eta_1 \eta_2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p | p + \eta_{2}|_{1}$$

$$\otimes | -p_{2} \exp\left(-\mathrm{i}p\eta_1\right), \tag{4}$$

^{*} 浙江省自然科学基金(批准号:101006)资助的课题.

[†] E-mail :stq504@nbip.net.cn;电话 10574-87600752.

其中 $|x_i|$ 和 $|p_i|$ 分别是坐标算符 \hat{X}_i 和动量算符 \hat{P}_i 的本征态

$$|x|_{i} = \pi^{-1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}x^{2} + \sqrt{2}xa_{i}^{+} - \frac{1}{2}a_{i}^{+2}\right] |0|_{i},$$
(5)

$$|p_{i}| = \pi^{-1/4} \exp\left[-\frac{1}{2}p^{2} + i\sqrt{2}pa_{i}^{+} + \frac{1}{2}a_{i}^{+^{2}}\right] |0_{i}|.$$
(6)

利用正规乘积内的积分技术(IWOP) ¹⁶¹和真空态投影算符的正规乘积形式

$$|0 \ 0| = : e^{-a^{+}a} : ,$$
 (7)

其中::表示正规乘积 ,可以证明 $|\eta_{12}$ 满足下列完备性关系和正交关系:

$$\int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta_{12 \ 12} \ \eta| = 1 , \qquad (8)$$

 $_{12}$ η' $|_{\eta}$ $_{12}$ = $\pi\delta(\eta - \eta')\delta(\eta^* - \eta'^*)$. (9) 因此, $|_{\eta}$ $_{12}$ 构成一个新的量子力学表象,称之为 EPR 纠缠态表象.可以证明:在 EPR 纠缠态表象中,双模压缩算子可以表示为[17]

$$S_{12}(\mu) = \exp[\lambda(a_1^+ a_2^+ - a_1 a_2)]$$

$$= \frac{1}{\mu} \int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta/\mu|_{12 |12} \eta|, \qquad \mu = \exp(\lambda),$$
(10)

因此,双模压缩真空态可以表示为

$$S_{12}(\mu) |00\rangle_{12} = \frac{1}{\mu} \int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta/\mu\rangle_{12} |\eta| |00\rangle_{12}$$
$$= \frac{1}{\mu} \int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta/\mu\rangle_{12} \exp\left[-\frac{1}{2} |\eta|^2\right].$$
(11)

3. 单模量子隐形传态

假定发送者 Alice 有粒子 1 处于任意的量子态

$$| \psi_{1} = \sum_{n} C_{n} | n_{1} ,$$
 (12)

根据坐标表象的完备性关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q - q| \, \mathrm{d}q = 1 \,, \tag{13}$$

方程(12)可以表示为

$$| \psi |_{1} = \sum_{n} C_{n} | n |_{1} = \sum_{n} C_{n} \int_{-\infty}^{\infty} dq | q |_{1} |_{1} |_{q} | n |_{1}$$

$$= \sum_{n} C_{n} \frac{1}{\sqrt{2^{n} n \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} dq | q |_{1} H_{n}(q) \exp(-\frac{1}{2} q^{2}) ,$$
(14)

其中 利用了

$$q \mid n = \frac{1}{\sqrt{2^n n \sqrt[4]{\pi}}} H_n(q) \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right).$$
 (15)

Alice 想将此态传送给接受者 Bob, 但粒子 1 本身不被传送. 粒子 2 和 3 事先制备成双模压缩真空态

$$|\mu|_{23} = S_{23}(\mu)|00|_{23}$$

= $\frac{1}{\mu} \int \frac{d^2 \eta}{\pi} |\eta/\mu|_{23} \exp\left[-\frac{1}{2} |\eta|^2\right]$ (16)

它构成 Alice 和 Bob 之间的量子通道 ,然后粒子 2 传送给 Alice 粒子 3 传送给 Bob. 由于粒子 2 和 3 处于纠缠态 ,发送者 Alice 对粒子 2 的任何操作 ,必然导致粒子 3 发生相应的演变.

为了把 $|\phi|$ 1 传送给接受者 Bob ,Alice 对粒子 1 和 2 实施联合测量 ,这导致另一个双模压缩真空态 ,记作

$$|\sigma|_{12} = S_{12}(\sigma)|00|_{12}$$

= $\frac{1}{\sigma}\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta/\sigma|_{12} \exp\left[-\frac{1}{2} |\eta|^2\right].(17)$

联合测量后 粒子 3 的投影态为

$$= \frac{1}{\mu \sigma \pi^{2}} \int d^{2} \eta' d^{2} \eta \exp \left[-\frac{1}{2} (| \eta' |^{2} + | \eta |^{2}) \right] \times_{12} \eta' / \sigma | \eta / \mu_{23} \otimes | \psi_{1}.$$
(18)

把方程(3)和(14)代入方程(18)得

$$= \frac{1}{\mu \sigma \pi^{2}} \int d^{2} \eta' d^{2} \eta \exp \left[-\frac{1}{2} (| \eta' |^{2} + | \eta |^{2}) \right]$$

$$\times \exp \left(\frac{i \eta'_{1} \eta'_{2}}{2 \sigma^{2}} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx'_{1} x' | \otimes_{2} x' - \eta'_{1} / \sigma |$$

$$\times \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\eta'_{\,2}\,x'}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\eta_{\,1}\,\eta_{\,2}}{2\mu^2}\right) \int_{-1}^{\infty} \mathrm{d}x \,|x|_{\,2}$$

$$\bigotimes |x - \eta_1/\mu|_3 \exp\left(\frac{i\eta_2 x}{\mu}\right) \bigotimes \sum_n C_n \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dq |q_{-1}H_n(q) \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right)$$

$$= \frac{1}{\mu\sigma\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq |q_{-1}H_n(q) \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\eta'_1 \eta'_2}{\sigma^2} + \frac{\eta_1 \eta_2}{\mu^2}\right) \sum_{n} C_n \frac{1}{\sqrt{2^n n \sqrt[n]{\pi}}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dq H_n(q) \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[ix\left(\frac{\eta_2}{\mu} - \frac{\eta'_2}{\sigma}\right)\right],$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq H_n(q) \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[ix\left(\frac{\eta_2}{\mu} - \frac{\eta'_2}{\sigma}\right)\right],$$

$$= \frac{1}{\mu\sigma\pi^{2}} \int d^{2} \eta' d^{2} \eta \exp\left[-\frac{1}{2}(+\eta')^{2} + +\eta^{2}\right] + \frac{i}{2} \left(\frac{\eta'_{1} \eta'_{2}}{\sigma^{2}} - \frac{\eta_{1} \eta_{2}}{\mu^{2}} - \frac{2\eta'_{1} \eta_{2}}{\mu\sigma}\right) \sum_{n} C_{n} \frac{1}{\sqrt{2^{n} n \sqrt[4]{\pi}}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dq H_{n}(q) \exp\left[-\frac{q^{2}}{2} + iq\left(\frac{\eta_{2}}{\mu} - \frac{\eta'_{2}}{\sigma}\right)\right] \times |q - \eta_{1}/\mu - \eta'_{1}/\sigma|_{3}$$

$$= \hat{F}(\hat{X}_{3}, \hat{P}_{3}) \sum_{n} C_{n} \frac{1}{\sqrt{2^{n} n \sqrt[4]{\pi}}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dq |q|_{3} H_{n}(q) \exp\left(-\frac{1}{2}q^{2}\right), \qquad (19)$$

$$\hat{F}(\hat{X}_{3},\hat{P}_{3}) = \frac{1}{\mu\sigma\pi^{2}} \int d^{2}\eta' d^{2}\eta \exp\left[-\frac{1}{2}(+\eta'++\eta+^{2})\right]$$

$$+ \frac{i}{2} \left(\frac{\eta'_{1}\eta'_{2}}{\sigma^{2}} - \frac{\eta_{1}\eta_{2}}{\mu^{2}} - \frac{2\eta'_{1}\eta_{2}}{\mu\sigma}\right)$$

$$\times \exp\left[i\hat{P}_{3}\left(\frac{\eta_{1}}{\mu} + \frac{\eta'_{1}}{\sigma}\right)\right]$$

$$\times \exp\left[i\hat{X}_{3}\left(\frac{\eta_{2}}{\mu} - \frac{\eta'_{2}}{\sigma}\right)\right]. \tag{20}$$

比较方程(14)和(17)可以看出:发送者 Alice 将测量的结果通过经典通道告诉接收者 Bob ,后者通过幺正变换 $\hat{F}^{-1}(\hat{X}_3,\hat{P}_3)$,便可使得粒子 3处于欲传送的量子态,从而实现了将未知量子态从 Alice 处发送到 Bob 处,留在 Alice 处的粒子 1 的原始态在测量之后被破坏,这是量子不可克隆性的表现。

4. 双模量子隐形传态

让发送者 Alice 和接收者 Bob 共享两个双模压缩真空态 $|\tau|_{13} = S_{13}(\tau)|_{00}|_{13}$ 和 $|\sigma|_{24} = S_{24}(\sigma)|_{00}|_{24}$,其中 S_{ij} 相应于模 i 和 j 的双模压缩算子,它们构成发送者 Alice 和接收者 Bob 之间的两个量子通道 . 为了传送双模量子态 $|\psi|_{56}$,发送者 Alice 对粒子(3,5)和(4,6)实施联合测量,这导致另外两个双模压缩真空态,记作 $|\tau'|_{35} = S_{35}(\tau')|_{00}|_{35}$ 和 $|\sigma'|_{46} = S_{46}(\sigma')|_{00}|_{46}$ [13] . 联合测量后,粒子 1 和 2 的投影态为

$$+ | \eta' |^{2} + | \eta'' |^{2} + | \eta''' |^{2})],$$

$$= \frac{1}{\tau \tau' \sigma \sigma' \pi^{4}} \int d^{2} \eta d^{2} \eta' d^{2} \eta'' d^{2} \eta'' d^{2} \eta''' d^{2} \eta''' d^{2} \eta'' d^{2} \eta'' d^{2} \eta'' d^{2} \eta''' d^{2} \eta'' d^{2}$$

假定发送者 Alice 有粒子 5 和 6 处于任意的量子态 | ϕ_{-56} ,

$$|\psi|_{56} = \sum_{k,l} C_{kl} |k|_{5} \otimes |l|_{6}.$$
 (22)
强坐标表象的完备性关系(13), |u|_{50} 可以表

根据坐标表象的完备性关系(13), $| \psi \rangle_{56}$ 可以表示为

$$| \psi |_{56} = \sum_{k,l} C_{kl} \frac{1}{\sqrt{2^{k+l} k ! l ! \pi}} \times \int_{-\infty}^{\infty} dq \, dq' \, | q |_{5} \otimes | q' |_{6} H_{k}(q) H_{l}(q') \times \exp \left[-\frac{1}{2} (q^{2} + q'^{2}) \right]. \tag{23}$$

把方程(23)代入方程(21)得

$$\begin{split} & = \frac{1}{\tau \tau' \sigma \sigma' \pi^{4}} \int d^{2} \eta d^{2} \eta' d^{2} \eta'' d^{2} \eta' d^{2} \eta'$$

 \times H(q') | $q_{-1} \otimes | q'_{-2} \exp \left[-\frac{1}{2} (q^2 + q'^2) \right]$. (24)

其中

$$\hat{F}(\hat{X}_{1},\hat{X}_{2},\hat{P}_{1},\hat{P}_{2}) = \frac{1}{\tau\tau'\sigma\sigma'\pi^{4}} \int d^{2}\eta d^{2}\eta' d^{2}\eta'' d^{2}\eta'' \exp\left[-\frac{1}{2}(+\eta)^{2} + |\eta''|^{2} + |\eta''|^{2} + |\eta'''|^{2}\right] \\
+ |\eta'|^{2} + |\eta''|^{2} + |\eta'''|^{2} + |\eta'''|^{2}\right] \times \exp\left[\frac{i}{2}\left(-\frac{\eta'_{1}\eta'_{2}}{\tau'^{2}} - \frac{\eta''_{1}\eta''_{2}}{\sigma'^{2}} + \frac{\eta'''_{1}\eta'''_{2}}{\tau^{2}} + \frac{\eta'''_{1}\eta'''_{2}}{\tau^{2}} + \frac{2\eta'_{1}\eta''_{2}}{\tau\tau'} + \frac{2\eta''_{1}\eta_{2}}{\sigma\sigma'}\right]\right] \\
\times \exp\left[-i\left(\frac{\eta'_{1}}{\tau'} + \frac{\eta'''_{1}}{\tau}\right)\hat{P}_{1} - i\left(\frac{\eta''_{1}}{\sigma'} + \frac{\eta_{1}}{\sigma}\right)\hat{P}_{2}\right] \\
\times \exp\left[-i\left(\frac{\eta'_{2}}{\tau'} - \frac{\eta'''_{2}}{\tau}\right)\hat{X}_{1} - i\left(\frac{\eta''_{2}}{\sigma'} - \frac{\eta_{2}}{\sigma}\right)\hat{X}_{2}\right].$$
(25)

比较方程(23)和(24)可以看出:发送者 Alice 将测量的结果通过经典通道告诉接收者 Bob ,后者通过幺正变换 $\hat{F}^{-1}(\hat{X}_1,\hat{X}_2,\hat{P}_1,\hat{P}_2)$,便可使得粒子 1

和 2 处于欲传送的量子态,从而实现了将未知的双模量子态从 Alice 处发送到 Bob 处.

5. 结论和讨论

量子隐形传态是没有经典对应的信息传递方法,传递前,发送者和接收者共享一个(或多个)纠缠态,即量子通道.文献 13 已经提出了利用具有连续变量的 EPR 纠缠态作为量子通道,实现双模压缩真空态的隐形传态的理论方案,我们利用双模压缩态作为量子通道,研究了任意的单模和双模量子态的隐形传态(包括分立的和连续的量子态),比较而言,双模压缩真空态更容易在实验上实现.在理论计算过程中,我们利用了双模压缩真空在 EPR 纠缠态表象中的表示和 EPR 纠缠态在坐标表象中的 Schmidt分解,这使得问题大为简化.

- [1] Bennett C H and Wiesner S J 1992 Phys. Rev. Lett. 69 2881
- [2] Grangier P 2001 Nature 409 774
- [3] Bennett C H , Brassard G , Crepeau C , Jozsa R , Peres A and Wootters W K 1993 *Phys* . *Rev* . *Lett* . **70** 1895
- [4] Vaidman L 1994 Phys. Rev. A 49 1473
- [5] Bennett C H 1992 Phys. Rev. Lett. 68 3121
- [6] Feng J et al 2001 Acta Phys. Sin. 50 2083 (in Chinese) [冯 健 等 2001 物理学报 50 2083]
- [7] Yao C M et al 2001 Acta Phys. Sin. **50** 59 (in Chinese) [姚春梅 等 2001 物理学报 **50** 59]
- [8] Cirac J I and Parkins A S 1994 Phys. Rev. A 50 R4441
- [9] Moussa M H Y 1996 Phys. Rev. A 54 4661

- [10] Ralph T C and Lam P K 1998 Phys. Rev. Lett. 81 5668
- [11] Zheng S B and Guo G C 1997 Phys. Lett. A 236 180
- [12] Zhang J and Peng K C 2000 Phys. Rev. A 62 064302
- [13] Fan H Y and Fan Y 2002 Chin . Phys . Lett . 19 159
- [14] Einstein A , Podolsky B and Rosen N 1935 Phys . Rev . 47 777
- [15] Fan H Y and Klauder J R 1994 Phys. Rev. A 49 704
- [16] Fan H Y 1997 Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics (Shanghai Scientific and Technical Publishers) p43 (in Chinese)[范洪义 1997 量子力学表象与变换论(上海科技出版社)第43页]
- [17] Fan H Y and Fan Y 1996 Phys. Rev. A 54 958

Teleportation of quantum states by means of two-mode squeezed vacuum *

Song Tong-Qiang
(Department of Physics , Ningbo University , Ningbo 315211 , China)
(Received 13 October 2003 ; revised manuscript received 29 December 2003)

Abstract

By means of the expression of two-mode squeezed vacuum in electron paramagnetic resonance (EPR) entangled state representation, we study the teleportation of any form of single-mode and two-mode quantum states by using two-mode squeezed vacuum as quantum channels.

Keywords: quantum teleportation, EPR entangled state, squeezed vacuum

PACC: 4250

^{*} Project supported by the Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (Grant No. 101006).