第 53 卷 第 11 期 2004 年 11 月
1000-3290/2004/53(11)/3663-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53, No.11, November, 2004

一般含时线性势的量子解及有关问题*

梁麦林[1)2)†] 孙宇晶[1)]

[1)] (天津大学理学院物理系, 天津 300072)

[2)] (南开大学天津大学刘徽应用数学中心, 天津 300071)

(2004 年 1 月 9 日收到; 2004 年 3 月 16 日收到修改稿)

对于一般形式的含时线性势, 通过假设波函数形式的方法得到了 Schrödinger 方程的精确和完备解. 同时指出, 用两个波函数 $|\phi(t)\rangle$ 和 $|\psi(t)\rangle$ 定义的坐标和动量的矩阵元 $\langle\phi(t)|x|\psi(t)\rangle$ 和 $\langle\phi(t)|p|\psi(t)\rangle$ 满足经典形式的运动方程. 按照量子力学的系综理论, 这样的经典形式的运动方程实际上是流体方程. 进一步研究发现, 对于任意形式的线性系统有类似的结论.

关键词: 线性势, Schrödinger 方程, Heisenberg 对应原理, 经典运动方程

PACC: 0365

1. 引 言

近来关于含时线性势的量子精确解问题有许多讨论[1—4]. 文献[2,4]给出了两种形式的解, 平面波解和 Airy 波包解, 并且认为这样的解是含时线性势的普遍解. 但是, 这里仍然存在一些问题. 例如, 在文献[4]中, 由平面波解得出 Airy 波包解时, 利用了一个变换, $\lambda \to \lambda/B + (B^2 t)/(2m)$, 其中 t 是时间, m 是质量, λ 和 B 是常数. 该变换将一个常数变为一个含时的量, 数学上不太令人满意. 本文讨论一般形式的含时线性势问题(哈密顿量见(1)式), 在动量表象中通过严格的数学推导得到了 Schrödinger 方程的精确和完备解. 当(1)式中 $g(t) = 0$ 时回到文献[1—4]所研究的情况, 发现文献[2,4]中的平面波解和 Airy 波包解都是这里普遍解的特殊情况. 文中同时讨论了量子力学的矩阵元与经典解的关系. 根据 Heisenberg 对应原理[5—8]或者"双波理论"[9—11](这里不对双波理论中的概念问题[12,13]展开讨论), 物理量可能矩阵元之和给出经典运动方程的解. 按照量子力学的系综理论[14], 量子力学描述的实际上是一个系综, 所以这里的经典运动方程应该是流体方程. 进一步研究发现, 对于任意形式的线性系统, 用两个波函数 $|\phi(t)\rangle$ 和 $|\psi(t)\rangle$ 定义的坐标和动量的矩阵元 $\langle\phi(t)|x|\psi(t)\rangle$ 和 $\langle\phi(t)|p|\psi(t)\rangle$ 在数学上存在的前提下就会满足经典形式的运动方程, 并且这样的方程是流体方程.

2. 量子精确解

一般形式的含时线性势的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + f(t)x + g(t)p, \tag{1}$$

式中 $m(t)$ 是含时质量, $f(t)$ 和 $g(t)$ 是含时外场. (1)式的哈密顿量可以重新写为

$$H = [p + m(t)g(t)]^2/[2m(t)] + f(t)x - m(t)g^2(t)/2.$$

该系统相当于一个带单位电量的粒子在矢势为 $(-m(t)g(t))$、标势为 $f(t)x$ 的电磁场中的运动. 在坐标表象中 Schrödinger 方程是二阶偏微分方程. 但是在动量表象中, 对于(1)式的线性势问题, Schrödinger 方程是一阶偏微分方程,

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \mathrm{i}f(t)\frac{\partial}{\partial p} + g(t)p\right]\psi(p,t) = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(p,t). \tag{2}$$

在动量表象中, 动量是 c 数, 而坐标是算符 $x = \mathrm{i}\partial/\partial p$. 数学上, 求解一阶微分方程要比求解二阶微分方程简单一些. 为了得到方程(2)的完全解, 首先

---

* 刘徽应用数学基金资助的课题.

† E-mail: mailinliang@eyou.com

来看方程(2)的一个性质，将波函数写成两个函数的乘积，$\psi(p,t)=A(p,t)B(p,t)$，代回(2)式，得到

$$\left[\frac{p^2}{2m}+g(t)p\right]A(p,t)B(p,t)$$
$$=A(p,t)\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}f\frac{\partial}{\partial p}\right]B(p,t)$$
$$+B(p,t)\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}f\frac{\partial}{\partial p}\right]A(p,t).\qquad(3)$$

如果令两个函数中的任意一个，例如 $A(p,t)$，满足方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}-f\frac{\partial A}{\partial p}=0,\qquad(4)$$

那么另一个函数 $B(p,t)$ 仍然满足原来形式的 Schrödinger 方程，

$$\left[\frac{p^2}{2m}+g(t)p\right]B(p,t)$$
$$=\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}f\frac{\partial}{\partial p}\right]B(p,t).\qquad(5)$$

方程(4)的解能够写成

$$A(p,t)=A(p-g_0(t)),\qquad(6)$$

函数 $g_0(t)$ 满足方程

$$\mathrm{d}g_0(t)/\mathrm{d}t=-f(t).\qquad(7)$$

该方程有解

$$g_0(t)=\Lambda-\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad(8)$$

式中 Λ 是一个常数．实际上，(7)式是经典的运动方程，$g_0(t)$ 是经典动量，常数 Λ 是初始动量．由(6)式的形式，可以知道函数 $A(p,t)$ 代表一个运动的因子．因此波函数 $\psi(p,t)=A(p,t)B(p,t)$ 是一个运动的波包，波包的中心在 $g_0(t)$ 处．函数 $B(p,t)$ 描述波包的形状．现在可以将 $B(p,t)$ 写成指数形式求解方程(5)，

$$B(p,t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(p,t)}.\qquad(9)$$

将(9)式代入(5)式，给出

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{p^2}{2m}-f\frac{\partial\phi}{\partial p}-gp\right)=0.\qquad(10)$$

方程(10)的解可以一般地写成

$$\phi(p,t)=[\phi_0(t)+a(t)p+b(t)p^2/2+c(t)p^3/3].\qquad(11)$$

代入方程(10)后，得到各系数满足的关系为

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}=0,\quad\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}=2f\left(\frac{1}{2mf}+c\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=fb+g,\quad\frac{\mathrm{d}\phi_0}{\mathrm{d}t}=fa.\qquad(12)$$

显然 c 是一个常数．当质量和外场的形式给出后，各系数的形式可以由(9)式通过简单的积分得到．动量表象中波函数的形式最终求出为

$$\psi(p,t)=A(p-g_0(t))\exp[-\mathrm{i}(\phi_0+ap+bp^2/2+cp^3/3)].\qquad(13)$$

坐标表象中的波函数由傅里叶变换得到

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(p,t)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}p.\qquad(14)$$

一个简单的解是

$$A(p-g_0)=\delta(p-g_0).\qquad(15)$$

与(15)式相应的坐标表象中的波函数为

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[\mathrm{i}(g_0x-\varphi(t))],$$
$$\varphi(t)=\phi_0+ag_0+bg_0^2/2+cg_0^3/3.\qquad(16)$$

利用(7)和(12)式,可以证明相位的时间导数满足

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=g_0^2(t)/(2m(t))+g(t)g_0(t),$$

或者

$$\varphi(t)=\int_0^t\frac{g_0^2(\tau)}{2M(\tau)}\mathrm{d}\tau+\int_0^t g(\tau)g_0(\tau)\mathrm{d}\tau.\qquad(17)$$

当 $g(t)=0$ 时，波函数(16)式回到文献[4]中的波函数(12)式，常数之间的关系是 $\Lambda=\lambda/A_0$．

另一个简单的情况即 $A(p-g_0)$ 是一个常数，选择

$$A(p-g_0)=1/\sqrt{2\pi},\qquad(18)$$

通过傅里叶变换(14)式，得到坐标表象中的形式为

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi_0}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bp^2/2}\cos\left[p(x-a)-\frac{c}{3}p^3\right]\mathrm{d}p.\qquad(19)$$

接下来证明，当 $g(t)=0$ 时，波函数(19)式与文献[2]中的 Airy 波包解(8)式一致．引入变量 $u=p+b/(2c)$，波函数(19)式可以重新写为

$$\psi(x,t)=\psi_1(x,t)\psi_2(x,t),$$
$$\psi_1(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\mathrm{i}(x-x_0(t))u-\frac{c}{3}u^3\right]\mathrm{d}u,$$
$$\psi_2(x,t)=\exp\left[-\mathrm{i}\left(\phi_0-\frac{b^3}{24c^2}+(x-x_0(t))\frac{b}{2c}\right)\right],\qquad(20)$$

因子 $\psi_1(x,t)$ 是 Airy 函数．式中

$$x_0(t)=a-b^2/(4c),\qquad(21)$$

系数 b 可以由(12)式通过积分写成

$$b = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{(m)\tau} + 2c\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau . \tag{22}$$

将(22)式代入(20)式，波函数可以进一步写成

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t)\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2c}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)}(x - x_0(t))\Big]$$

$$\times \exp\Big[-\mathrm{i}x\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]\exp[\mathrm{i}\varphi_0(t)], \tag{23}$$

式中

$$\varphi_0(t) = -\phi_0 + \frac{b^3}{24c^2} + x_0(t)\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau . \tag{24}$$

利用(12)式，进行一些运算后得到

$$\frac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{2cm} = -\frac{1}{2cm}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)} - \frac{1}{m}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau ,$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2m}\Big[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\Big]^2 + \frac{1}{8mc^2}\Big[\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)}\Big]^2 . \tag{25}$$

积分后，有结果

$$x_0(t) = -\frac{1}{4c}\Big[\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)}\Big]^2 - \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)}\int_0^\tau f(\sigma)\mathrm{d}\sigma ,$$

$$\varphi_0(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)}\Big[\int_0^\tau f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\Big]^2 + \frac{1}{24c^2}\Big[\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m(\tau)}\Big]^3 . \tag{26}$$

对(26)式求导数,可以重新得到(25)式．令 $c = -1/B^3$，$f = g_1$，波函数(23)式与文献[2]中的波包解(8)式一致．

尽管(15)和(18)式都是含时线性势的解，但它们都不是完备的．一个完备的解是

$$A_\lambda(p - g_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[\mathrm{i}\lambda(p - g_0)] . \tag{27}$$

该解相当于动量空间的一个平面波．式中 λ 的变化范围是从 $-\infty$ 到 $+\infty$．(18)式的解相当于 $\lambda = 0$，而(15)式的解可以由(27)式叠加得到．数学上，δ 函数可以写成平面波的叠加．实际上，任意一个函数都可以用平面波进行展开，即解(27)式是完备的．以上列出的都是非束缚态形式的解，下面给出一个束缚态形式的波包解：

$$A(p - g_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi d_0}}\exp[-(p - g_0)^2/d_0^2] . \tag{28}$$

该解具有高斯形式，常数 d_0 描述波包的宽度．

3．量子与经典对应

根据 Heisenberg 对应原理[5—7]，量子力学的矩阵元是在经典近似下过渡到相应经典物理量的傅里叶展开系数．因此，一个物理量对应算符的所有可能矩阵元之和在经典近似下就是该经典物理量的傅里叶展开．换言之，如果定义一个量(这里的运算在动量表象中进行)，

$$\Omega_\lambda(t) = \sum_{\lambda'}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*_{\lambda'}(p,t)\Omega\psi_\lambda(p,t)\mathrm{d}p , \tag{29}$$

那么该量在经典近似下应当给出经典解．式中 Ω 是物理量所对应的算符．从数学上考虑,“双波理论”也有类似的结论[9—11]．根据(29)式的定义，利用波函数[(13),(27)式]可以直接算出

$$p_\lambda(t) = g_0(t), \tag{30}$$

$$x_\lambda(t) = -\lambda + a + bg_0 + cg_0^2 . \tag{31}$$

在(30)和(31)式的推导中用到了关系

$$\sum_\lambda\int\psi^*_{\lambda'}(p,t)\psi_\lambda(p,t)\mathrm{d}p = \sum_{\lambda'}\delta(\lambda - \lambda') = 1 . \tag{32}$$

利用(7)和(12)式，不难得到

$$\frac{\mathrm{d}x_\lambda(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{g_0}{m} + g . \tag{33}$$

从(30),(31)和(33)式，可以看到，$p_\lambda(t)$和 $x_\lambda(t)$正是经典的动量和坐标．

实际上，要得到一个经典形式的解，(29)式的定义并不是唯一的．假设$|\phi(t)\rangle$和$|\psi(t)\rangle$是两个波函数(为了书写简洁，在下面的推导中利用 Dirac 符号进行)，满足 Schrödinger 方程

$$H|\phi(t)\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial|\phi(t)\rangle}{\partial t}, \quad H|\psi(t)\rangle = \mathrm{i}\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}, \tag{34}$$

容易证明，用$|\phi(t)\rangle$和$|\psi(t)\rangle$定义的坐标和动量的矩阵元$\langle\phi(t)|x|\psi(t)\rangle = x(t)$和$\langle\phi(t)|p|\psi(t)\rangle = p(t)$满足经典的运动方程．利用 Schrödinger 方程(34)，可以得到如下的时间演化规律：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Omega(t) = \frac{1}{\mathrm{i}}\langle\phi(t)|[\Omega,H]|\psi(t)\rangle, \tag{35}$$

式中 $\Omega = x, p$．对于含时线性势问题的哈密顿量(1)式，方程(35)变成

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{p(t)}{m(t)} + g(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = -f(t) . \tag{36}$$

显然方程(36)具有经典形式. 这一结果表明，只要所定义的矩阵元在数学上有意义，它们就是经典运动方程的解. 矩阵元中的两个波函数可以不一样，例如(29)式的情况，也可以是相等的，例如都可以是(28)式的束缚态波包解. 当$|\phi(t)\rangle$和$|\psi(t)\rangle$都是(28)式的束缚态波包解时，有 $p(t)=g_0(t)$，$x(t)=a+bg_0+cg_0^2$. 与(30)，(31)式相比，只是坐标的初始值有所不同.

从(34)和(35)式的推导不依赖于哈密顿量的具体形式,亦即，(35)式的演化方程对于任意体系都成立. 如果哈密顿量描述一个任意形式的线性系统，(36)式会变成对应的经典形式的运动方程. 当然，这里的运动方程仍然应该理解为流体方程，矩阵元$\langle\phi(t)|x|\psi(t)\rangle=x(t)$和$\langle\phi(t)|p|\psi(t)\rangle=p(t)$是其相应的解.

4. 结　语

对于含时线性势问题，动量空间的波函数要比坐标空间的波函数形式上简单许多，由此容易得到各种形式解之间的关系. 同时对通过量子力学的矩阵元得到经典方程的解进行了分析.

[1] Guedes I 2001 *Phys*. *Rev*. A **63** 34102

[2] Feng M 2001 *Phys*. *Rev*. A **64** 34101

[3] Bauer J 2002 *Phys*. *Rev*. A **65** 36101

[4] Bekkar H，Benamira F and Maamache M 2003 *Phys*. *Rev*. A **68** 16101

[5] Jia Y W *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 201(in Chinese)[贾艳伟等 2002 物理学报 **51** 201]

[6] Greenberg W R and Klein A 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 1244

[7] Morehead J J 1996 *Phys*. *Rev*. A **53** 1285

[8] Liang M L and Wu H B 2003 *Phys*. *Scr*. **68** 41

[9] Huang X Y，Wang J Y and Ye X M 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 566 (in Chinese)[黄湘友、王继业、叶学敏 1999 物理学报 **48** 566]

[10] Zhang S *et al* 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1360

[11] Liu Q H 1992 *Acta Phys*. *Sin*. **41** 697(in Chinese)[刘全慧 1992 物理学报 **41** 697]

[12] Shen H C and Shen H S 1994 *Science* (Shanghai，China) **46** 42 (in Chinese)[沈惠川、沈惠申 1994 科学(上海) **46** 42]

[13] Liang F H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 572 (in Chinese)[梁方豪 2001 物理学报 **50** 572]

[14] Ballentine L E 1990 *Quantum Mechanics* (Englewood Cliffs，N.J.: Prentice Hall)

Exact quantum solution for the general time-dependent linear potential and related problems *

Liang Mai-Lin[1)2)] Sun Yu-Jing[1)]

[1)] (*Department of Physics*, *School of Science*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)

[2)] (*Liu Hui Center for Applied Mathematics*, *Nankai University and Tianjin University*, *Tianjin* 300071, *China*)

(Received 9 January 2004; revised manuscript received 16 March 2004)

Abstract

For the general time-dependent linear potential, the exact and complete solution of the Schrödinger equation was obtained by assuming a form of wave function. Meanwhile, it was pointed out that the matrices $\langle\phi(t)|x|\psi(t)\rangle$ and $\langle\phi(t)|p|\psi(t)\rangle$ defined by the two wave functions $|\phi(t)\rangle$ and $|\psi(t)\rangle$ satisfy classical equations of motion. According to the ensemble theory of quantum mechanics, such classical equations describe the motion of fluid. A further research shows that similar conclusions apply to any linear system.

Keywords: linear potential, Schrödinger equation, Heisenberg correspondence principle, classical equation of motion

PACC: 0365

* Project supported by the Liu Hui Fund for Applied Mathematics.