第 53 卷 第 11 期 2004 年 11 月
1000-3290/2004/53(11)/3668-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.11,November,2004
©2004 Chin.Phys.Soc.

混合态的不确定关系与压缩效应*

邓文基[1)†] 刘 平[2)] 徐 晓[1)]

[1)] (华南理工大学物理系，广州 510640)

[2)] (华南理工大学材料科学研究所，广州 510640)

(2004 年 2 月 6 日收到；2004 年 3 月 8 日收到修改稿)

在关于混合态的海森堡不确定关系的基础上，研究了纯态和混合态的最小不确定性和压缩效应. 虽然最小不确定态必定是纯态，但在某些并非最小不确定态的纯态或混合态中，依然可以实现力学量不确定度的压缩. 还给出了普通统计学的不确定关系，它们不涉及量子相干性却与量子力学的海森堡不确定关系具有相似的数学结构.

关键词：混合态，最小不确定性，压缩效应

PACC：0365，0365F，4250

1. 引 言

多年以来，源于量子力学的海森堡不确定原理的最小不确定态和压缩态问题激发了人们广泛而持久的兴趣[1—13]. 为了更具体地了解最小经典信号和最小波包的物理性质，最近我们重新考察了量子力学的海森堡不确定原理和最小不确定态问题[11—13]. 所谓最小经典信号，是指由单一物理量表达的特殊的时变信号，它们的持续时间和频谱宽度的乘积达到了物理定律所允许的最小值[12]. 研究表明，这些最小信号必定是时间变量的简单高斯函数，其中心频率恒为零. 再考虑光在真空中的传播行为[13]，我们证明了最小经典波包的中心频率不必限制为零，因为这些横波由两个独立的正交分量构成，也可以分解为左旋和右旋圆偏振光的适当叠加.

有关的研究工作引导我们回溯到 Stoler 等人上世纪 70 年代初期的原始文献[2,3]. 文献[3]采用特殊的方法证明了坐标与动量的最小不确定态必定是纯态，它的论证方式和结论已经得到了广泛的传播[14]. 本文依循完全不同的途径证明了这一重要结论适用于任何一对其对易关系为纯虚数的力学量，并且进一步研究了非最小不确定态的压缩效应. 采用文献[11]的典型方法，系统地研究了关于一般混合态的海森堡不确定关系. 在此基础上，论证了混合态不可能是任何一对力学量的最小不确定态. 进一步研究了非最小不确定态的压缩效应. 给出了普通统计学的不确定关系.

2. 混合态的不确定关系

密度算符给出量子系统混合态的完全描述，采用狄拉克的状态矢量符号可将其一般地记作[16]

$$\hat{\rho} \equiv \sum_s \rho_s |\varphi_s\rangle\langle\varphi_s|, \tag{1}$$

其中下标 s 表示不同的量子纯态，正实数 ρ_s 表示系统处于纯态 $|\varphi_s\rangle$ 的概率，并且满足概率归一化条件 $\sum_s \rho_s = 1$. 特别值得指出的是，(1) 式定义的密度算符反映系统的统计性质，其中的纯态 $|\varphi_s\rangle$ 既不必是两两正交的，也不必构成完全集.

任何一对待研究的力学量算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的对易括号 $[\hat{A},\hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ 可一般地写作

$$[\hat{A},\hat{B}] = \mathrm{i}\hat{C}, \tag{2}$$

其中算符 $\hat{C}$ 必定是厄米的. 两种特殊情形值得强调. 如果 $\hat{C}=0$，则可以存在两个力学量的共同本征态，对它们没有不确定关系的限制. 如果算符 $\hat{C}$ 只是一个不为零的常数 C，它必定是实数.

在任意给定的混合量子态，力学量的不确定度定义为

$$\Delta A \equiv \sqrt{\mathrm{Tr}[\hat{\rho}(\Delta\hat{A})^2]},$$

* 国家基础研究重点项目基金（批准号：200103500）部分资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail：phwjdeng@scut.edu.cn

其中 Tr[⋯]表示求迹运算，$\Delta\hat{A}\equiv\hat{A}-\bar{A}$，而力学量在此混合态下的平均值定义为 $\bar{A}\equiv\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}]$. 考虑到希尔伯特空间中态矢量的模的非负性，容易证明

$$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{T}^{\dagger}\hat{T}]=\sum_s\rho_s\langle\varphi_s|\hat{T}^{\dagger}\hat{T}|\varphi_s\rangle\geqslant 0,\qquad(3)$$

其中 $\hat{T}$ 和 $\hat{T}^{\dagger}$ 可以是任意算符和它的厄米共轭. 若取 $\hat{T}=\Delta\hat{A}+\mathrm{i}\lambda\Delta\hat{B}$，利用不等式(3)可以证明对任意复参数 λ 应有

$$\lambda\lambda^*(\Delta B)^2-\mathrm{Im}(\lambda)\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}]-\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{C}]+(\Delta A)^2\geqslant 0,\qquad(4)$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda)$和 $\mathrm{Im}(\lambda)$分别表示任意复参数 λ 的实部和虚部，反对易括号定义为

$$\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\equiv\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}+\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}.$$

如果 $\Delta B=0$，即

$$\sum_s\rho_s\langle\varphi_s|(\Delta\hat{B})^2|\varphi_s\rangle=0,\qquad(5)$$

所涉及的量子纯态均为力学量 $\hat{B}$ 的简并本征态，即 $\hat{B}|\varphi_s\rangle=\bar{B}|\varphi_s\rangle$，则不等式(4)可以简化为

$$(\Delta A)^2-\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{C}]\geqslant 0.\qquad(6)$$

除非所涉及的纯态均满足$\langle\varphi_s|\hat{C}|\varphi_s\rangle=0$，$\Delta A$ 可以是任意非负实数，否则必定要求 $\Delta A\to+\infty$.

类似地，如果 $\Delta A=0$，不等式(4)简化为

$$\lambda\lambda^*(\Delta B)^2-\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{C}]\geqslant 0.\qquad(7)$$

除非$\langle\varphi_s|\hat{C}|\varphi_s\rangle=0$，$\Delta B$ 可以是任意非负实数，否则必定要求 $\Delta B\to+\infty$.

在更一般情形下，如果 ΔA 和 ΔB 都不为零，那么(4)式等号左端是参数 λ 的典型二次式. 简单的代数运算可以证明

$$(\Delta A)^2\cdot(\Delta B)^2\geqslant\frac{1}{4}(\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{C}])^2+\frac{1}{4}(\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}])^2.\qquad(8)$$

由于上式等号右端两项厄米算符的平均值都是实数，此不等式还可以被进一步改写为

$$\Delta A\cdot\Delta B\geqslant\frac{1}{2}|\mathrm{Tr}[\hat{\rho}\hat{C}]|.\qquad(9)$$

如果两个力学量算符的对易括号等于一个纯虚数，它还可以简化为

$$\Delta A\cdot\Delta B\geqslant\frac{1}{2}|C|,\qquad(10)$$

与纯态的海森堡不确定关系具有一致的标准形式[16—18].

3. 混合态的最小不确定性

能使(10)式等号成立的量子态称为力学量 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的最小不确定态[2,3]. 检查前述证明过程不难发现，这实际上是要求所涉及的全部量子纯态同时满足充分必要条件

$$(\Delta\hat{A}+\mathrm{i}\lambda\Delta\hat{B})|\varphi_s\rangle=0\qquad(11)$$

和

$$\langle\varphi_s|\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}|\varphi_s\rangle=0.\qquad(12)$$

忽略算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 取共同本征态的罕见情形，将(11)式代入(12)式，可以证明参数 λ 必是实数. 再利用(4)式，还可以证明最小不确定态满足

$$\lambda C=2(\Delta A)^2,\qquad(13)$$

即参数 λ 是与 C 同号的非零实数. 不失一般性，在后续的讨论中假定 $C=1$，从而 $\lambda>0$.

所以，如果一个混合态要成为力学量 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的最小不确定态，那么它所涉及的所有量子纯态必须都是某一算符 $\hat{G}_\lambda=\hat{A}+\mathrm{i}\lambda\hat{B}$ 的简并本征态，即具有相同的本征值.

引入玻色型湮没算符 $\hat{a}$和 $\hat{a}^{\dagger}$，即

$$\hat{a}\equiv\frac{\hat{A}+\mathrm{i}\hat{B}}{\sqrt{2}},\quad\hat{a}^{\dagger}\equiv\frac{\hat{A}-\mathrm{i}\hat{B}}{\sqrt{2}},\qquad(14\mathrm{a})$$

$$\hat{A}\equiv\frac{\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{2}},\quad\hat{B}\equiv\frac{\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{2}\mathrm{i}},\qquad(14\mathrm{b})$$

可得

$$\hat{G}_\lambda=\frac{1+\lambda}{\sqrt{2}}\hat{a}+\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}}\hat{a}^{\dagger}=\sqrt{2\lambda}\hat{b}_r,\qquad(15)$$

其中新的湮没和产生算符定义为

$$\hat{b}_r=\hat{a}\cosh r+\hat{a}^{\dagger}\sinh r;\qquad(16)$$

$$\hat{b}_r^{\dagger}\equiv\hat{a}\sinh r+\hat{a}^{\dagger}\cosh r,\qquad(17)$$

依然满足玻色型对易关系$[\hat{b}_r,\hat{b}_r^{\dagger}]=1$. 其中参量 $r\equiv-\ln(\lambda)/2$，而 $\cosh r$ 和 $\sinh r$ 分别表示实数 r 的双曲余弦和双曲正弦函数. 最小不确定态中的量子纯态必定是玻色型湮没算符 $\hat{b}_r$ 的本征态，即量子光学中的压缩相干态[15]

$$|\alpha,r\rangle=\hat{S}_r\hat{D}(\alpha)|0\rangle,\qquad(18)$$

其中$|0\rangle$表示真空态，幺正算符 $\hat{S}_r$ 正是压缩因子取实数 $\xi=r$ 时的压缩算符

$$\hat{S}(\xi)\equiv\exp\left(\frac{\xi^*}{2}\hat{a}^2-\frac{\xi}{2}\hat{a}^{\dagger 2}\right),\qquad(19)$$

幺正算符

$$\hat{D}(\alpha)\equiv\exp(\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^*\hat{a})\qquad(20)$$

为位移算符，它的位移参量 α 可以是任意复数. 利用位移算符和压缩算符的幺正变换关系

$$\hat{D}^{\dagger}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \tag{21a}$$

$$\hat{S}^{\dagger}(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^{\dagger}\exp(\mathrm{i}\theta)\sinh r, \tag{21b}$$

其中参数 $\xi \equiv r\exp(\mathrm{i}\theta)$. 不难算出

$$\hat{G}_{\lambda}|\alpha, r\rangle = \sqrt{2\lambda}\alpha|\alpha, r\rangle, \tag{22}$$

即此压缩相干态是算符 $\hat{G}_{\lambda}$ 的本征态，本征值是 $\sqrt{2\lambda}\alpha$，无简并. 所以，只有纯态才能成为最小不确定态. 换言之，一对力学量的最小不确定态正是它们的压缩相干态，如(18)式所示.

4. 非最小不确定态的压缩效应

前两节严格证明了力学量 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的最小不确定态就是(18)式给出的压缩相干态，(14)式确定了 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 与玻色型湮没和产生算符的关系. 虽然最小不确定态是实现力学量不确定度压缩效应的理想方式，但是在某些纯态甚至混合态中，即使一对力学量不确定度的乘积未能达到测不准关系允许的最小极限，仍然可能观察到其中某一力学量不确定度的压缩效应，即该力学量的不确定度小于它在真空态下的典型值.

4.1. 纯态情形

(18)式定义的压缩相干态是力学量 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 的最小不确定态，力学量与产生算符和湮没算符的关系由(14)式给定. 作为最小不确定态的这一压缩相干态，其压缩因子为实数 $\xi = r$. 在更一般的情形下，如果自由选择压缩相干态 $|\alpha, \xi\rangle$ 中的压缩因子 $\xi \equiv r\exp(\mathrm{i}\theta)$ 和位移因子 $\alpha \equiv R\exp(\mathrm{i}\vartheta)$，它们虽然不再是这一对力学量的最小不确定态. 利用位移算符和压缩算符的幺正变换关系式(21)，可以直接计算出算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 在压缩相干态 $|\alpha, \xi\rangle$ 的期望值

$$\bar{A}_{\alpha\xi} = \frac{R}{\sqrt{2}}[\cos\vartheta\cosh r - \cos(\theta - \vartheta)\sinh r], \tag{23a}$$

$$\bar{B}_{\alpha\xi} = \frac{R}{\sqrt{2}}[\sin\vartheta\cosh r - \sin(\theta - \vartheta)\sinh r] \tag{23b}$$

和它们的方差

$$(\Delta A_{\alpha\xi})^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\theta), \tag{24a}$$

$$(\Delta B_{\alpha\xi})^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2r + \sinh 2r\cos\theta). \tag{24b}$$

简单的代数运算还可以给出力学量不确定度的乘积

$$(\Delta A_{\alpha\xi})^2 \cdot (\Delta B_{\alpha\xi})^2 = \frac{1}{4}[1 + (\sinh 2r\ \sin\theta)^2]. \tag{25}$$

显然，只有在压缩因子的辐角 θ 满足特殊条件时，压缩相干态才成为力学量的最小不确定态. 即当且仅当 $\theta = n\pi$，其中 n 为任何整数时，$\Delta A_{\alpha\xi} \cdot \Delta B_{\alpha\xi} = 1/2$.

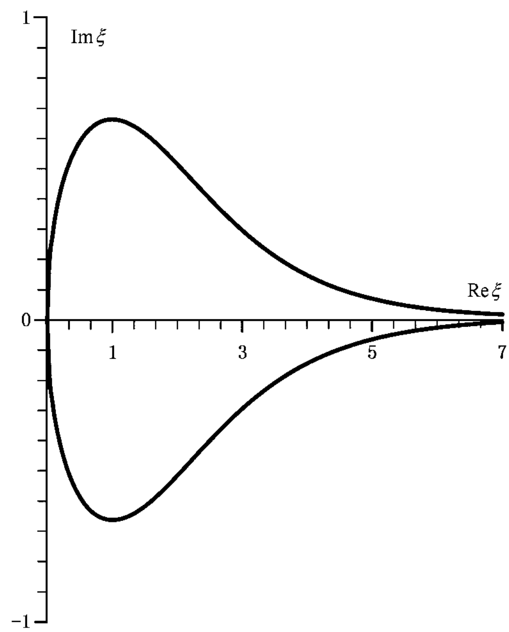

图 1 压缩相干态中力学量 $\hat{A}$ 的压缩效应对压缩因子 ξ 的依赖关系 曲线内的 ξ 实现 $\hat{A}$ 的压缩

特别值得指出的是，选择适当的压缩参数，即满足条件

$$\cos\theta > \tanh r \tag{26}$$

或

$$\cos\theta < -\tanh r, \tag{27}$$

能够分别观察到力学量 $\hat{A}$ 或 $\hat{B}$ 的压缩，虽然此时的量子纯态并非最小不确定态. 如图 1 所示，在复平面曲线内部区域，压缩因子 ξ 均满足不等式(26)，从而保证实现 $\hat{A}$ 的压缩，即 $\Delta A_{\alpha\xi} < 1/2$. 比较(24a)与(24b)式，不难看出在 ξ 复平面与此镜像对称的区域内，相应的量子纯态将实现力学量 $\hat{B}$ 的压缩.

4.2. 混合态情形

既然非最小不确定态能够实现力学量的压缩，我们可以期望在某些混合态中观察到力学量的压缩效应. 考察一个由大量压缩相干态构成的混合态，其密度算符为

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha,\xi}\rho(\alpha, \xi)|\alpha, \xi\rangle\langle\alpha, \xi|, \tag{28}$$

注意式中关于 α 和 ξ 的求和号可能表示连续变量的积分. 混合态中力学量的不确定度由它在各有关纯

态的不确定度 $\Delta A_{\alpha\xi}$ 加权平均得到，即

$$(\Delta A)^2 = \sum_{\alpha,\xi}\rho(\alpha,\xi)\left[(\Delta A_{\alpha\xi})^2 + (\bar{A}_{\alpha\xi} - \bar{A})^2\right]$$
$$\geqslant \sum_{\alpha,\xi}\rho(\alpha,\xi)(\Delta A_{\alpha\xi})^2, \tag{29}$$

其中 $\bar{A}_{\alpha\xi}$ 和 $\bar{A}$ 分别表示力学量 $\hat{A}$ 在给定纯态和混合态的期望值和平均值.

将(24)，(25)和(29)式的结果应用于附录 A 中的统计学不确定关系(A3)式，可得

$$(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\overline{(\sinh 2r\ \sin\theta)^2}$$
$$\geqslant \frac{1}{4}, \tag{30}$$

即直接证明了由压缩相干态构成的混合态的不确定关系.

由压缩真空态 $|0,\xi\rangle$ 适当组合的混合态可以实现力学量的压缩. 根据(23)式，此时所有纯态的期望值 $\bar{A}_{0\xi}$ 和混合态的平均值 $\bar{A}$ 都为零，(29)式简化为

$$(\Delta A)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\xi}\rho(\xi)\sinh 2r\ [\cos\theta - \tanh r], \tag{31a}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{\xi}\rho(\xi)\sinh 2r\ [\cos\theta + \tanh r]. \tag{31b}$$

如果选择所有量子纯态的压缩因子 ξ 满足条件不等式(26)，即位于图 1 曲线所包围区域内，则依然可以实现力学量 $\hat{A}$ 的压缩；类似地，如果选择有关量子纯态的压缩因子 ξ 满足条件不等式(27)，则可以实现力学量 $\hat{B}$ 的压缩.

5. 结　论

我们在文献[11]中采用的典型方法，不仅可以证明量子纯态的海森堡不确定关系和研究量子纯态的压缩效应，而且还可以推导量子混合态以及不涉及量子相干性的统计学的不确定关系，并揭示出它们相似的数学结构. 利用压缩相干态的非简并性，重新证明了最小不确定态必为纯态的普遍结论. 压缩相干态的最小不确定性是与力学量密切相关的，换言之，某一对力学量的压缩相干态通常都不是其他力学量的最小不确定态. 然而，在非最小不确定纯态中，依然可能实现力学量不确定度的压缩. 以压缩真空态为例，我们还具体地讨论了在混合态中力学量不确定度的压缩问题.

另外，在实际物理过程中，热库的作用是实现混合态的典型途径. 结合热场动力学理论[19,20]研究有限温度下量子系统中力学量的最小不确定态及其压缩问题是值得进一步研究的问题.

附录 A　统计学的不确定关系

事件 s 发生的概率记为 ρ_s，而当事件 s 发生时，X 和 Y 分别确定地取值 X_s 和 Y_s. 定义统计平均值为

$$\bar{X} \equiv \sum_s \rho_s X_s, \tag{A1}$$

可以证明一个普遍有用的统计学关系

$$\overline{X^* X} \cdot \overline{Y^* Y} \geqslant \frac{1}{4}\,\overline{(X^* Y + XY^*)^2}$$
$$+ \frac{1}{4}\,\overline{[\mathrm{i}(X^* Y - XY^*)]^2}. \tag{A2}$$

如果 X_s 和 Y_s 的所有取值均为实数，上式简化为

$$\overline{X^2} \cdot \overline{Y^2} \geqslant \overline{X^2 \cdot Y^2}. \tag{A3}$$

如果定义 $\Delta X \equiv X - \bar{X}$ 和 $\Delta Y \equiv Y - \bar{Y}$，还可以得到统计学的不确定关系

$$\overline{(\Delta X)^2} \cdot \overline{(\Delta Y)^2} \geqslant \overline{(\Delta X)^2 \cdot (\Delta Y)^2}. \tag{A4}$$

它们与量子力学的海森堡不确定关系具有相似的数学结构，却不涉及量子相干性. 关于经典物理的不确定关系，还可以参阅文献[21,22].

[1] Agarwal G S 2002 *Fortschr. Der Phys.-Prog. Phys.* **50** 575

[2] Stoler D 1970 *Phys. Rev.* D **1** 3217
Stoler D 1971 *Phys. Rev.* D **4** 1925

[3] Stoler D and Newman S 1971 *Phys. Lett.* A **38** 433

[4] Yuen H P 1976 *Phys. Rev.* A **13** 2226

[5] Walls D F 1983 *Nature* **306** 141

[6] Orzel C *et al* 2001 *Science* **291** 2386

[7] Wu Y and Côté R 2002 *Phys. Rev.* A **66** 25801
Wu Y and Yang X 2001 *Phys. Rev.* A **63** 43816
Wu Y, Yang X and Xiao Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2200

[8] Law C K, Pu H and Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257

[9] Nha H 2003 *Phys. Rev.* A **67** 23801
Nha H *et al* 2002 *J. Phys. Soc. Japan* **71** 1615

[10] Jing H, Chen J L and Ge M L 2001 *Phys. Rev.* A **63** 15601

[11] Deng W J, Xu Y H and Liu P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2961 (in Chinese) [邓文基、许运华、刘　平 2003 物理学报 **52** 2961]

[12] Deng W J, Xu Y H and Liu P 2003 *Chin. Phys.* **12** 1062

[13] Deng W J, Xu J H and Liu P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 693 (in Chinese) [邓文基、许基恒、刘　平 2004 物理学报 **53** 693]

[14] Ballentine L E 1998 *Quantum Mechanics——A Modern Development* (Singapore：World Scientific) p223

[15] Scully M O and Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambrige: Cambrige University Press) chapt 2

[16] Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill) p379, 60

[17] Rerbertson H P 1929 *Phys*. *Rev*. **34** 163

[18] Wey H 1950 *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* originally published in 1931, translated from the 2nd ed by H P Robertson (New York: Dover) p77, 393

[19] Dong C H 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1989 (in Chinese) [董传华 1998 物理学报 **47** 1989]

[20] Umezwaw H and Yamanaka Y 1988 *Adv*. *Phys*. **37** 531

[21] Huang X Y 1996 *Acta Phys*. *Sin*. **45** 353 (in Chinese) [黄湘友 1996 物理学报 **45** 353]

[22] Huang Y C, Yang W H, Li A M and Zhang N 2002 *Chin*. *J*. *Atomic and Molecular Phys*. **19** 534 (in Chinese) [黄永畅、杨卫红、李爱民、张 宁 2002 原子与分子物理学报 **19** 534]

The uncertainty relations and squeezing effects for mixed states*

Deng Wen-Ji[1)] Liu Ping[2)] Xu Xiao[1)]

[1)] (*Department of Phyiscs*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510640, *China*)

[2)] (*Institute of Materials Science*, *South China University of Technology*, *Guanghou* 510640, *China*)

(Received 6 February 2004; revised manuscript received 8 March 2004)

Abstract

Based upon the Heisenberger's uncertainty relations for mixed states, the minimum uncertainty and squeezing effects are studies. Although all minimum uncertainty states must be pure states, the nucertainty of one dynamical variable can be squeezed in some pure states or mixed states, even if they are not minimum uncertainty states for the pair of dynamical variables. In addition, we present the general uncertainty relation of statistics, which has the similar mathmatical structure of Heisenberg's indeterminacy principle, but has no relation with quantum interfernce.

Keywords: mixed state, minimum uncertainty, squeezing effect

PACC: 0365, 0365F, 4250

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 200103500).