

对称混沌系统的非线性动力学行为及控制*

于津江^{1)†} 张明轩¹⁾ 徐海波²⁾

¹⁾ 石家庄师范专科学校物理系, 石家庄 050801)

²⁾ 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2004 年 1 月 31 日收到, 2004 年 3 月 26 日收到修改稿)

基于线性反馈控制思想, 提出了一种对称动力学系统及其控制混沌的方法, 给出了预期各周期轨道反馈系数的选择原则, 适当选择反馈系数, 即可得到不同的周期轨道. 将此方法应用到 Logistic 映射中, 取得了良好的控制效果.

关键词: 反馈控制, 周期轨道, 对称系统

PACC: 0545

1. 引言

混沌现象广泛存在于现实世界中, 表面上混沌现象呈现无规律的特性, 但隐藏在其后面的有序本质逐渐被人们揭示出来. 但是混沌在许多情况下是不利因素, 人们总是期望能够找到一些方法来控制混沌, 使混沌系统中不稳定周期轨道控制在所预期的平衡状态上. 自 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出 OGY 控制方法以来, 对混沌控制^[1]及同步^[2]的研究迅速发展. 已经有许多控制和跟踪混沌运动的方法, 如 OGY 控制法^[3]、非反馈信号控制法^[4]、自适应控制法等, 这些均属于微扰反馈控制法. 虽然对系统参数作小扰动来达到控制目的已证实了 OGY 控制法的有效性, 而该方法则需要作为目标的详细信息, 给实际应用带来许多不便^[5,6].

本文利用加入同类型对称非线性动力学系统的方法, 构成了一个新的非线性动力学系统, 通过对反馈系数和控制项非线性动力学系统的系统参数的调整, 来实现对原混沌系统的控制. 本方法不要求原混沌系统的参数信息, 只要适当选择反馈系数和控制项动力学系统的系统参数, 就可以使任一个处在混沌状态的非线性系统趋于各种预期的稳定轨道^[7,8].

2. 控制方法

考虑如下的动力学系统:

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu), \quad (1)$$

其中 μ 为系统参数. 构造一个同类型非线性动力学控制系统, 该系统具有与原系统相反的动力学行为. 有

$$x'_{n+1} = F'\left(x_n, \frac{1}{\mu}\right), \quad (2)$$

其中系统参数为原系统的倒数, 由此可以看出新系统与原系统的动力学行为相反. 现将(2)式作为控制项引入原系统中, 有

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) + gF'\left(x_n, \frac{1}{\mu}\right), \quad (3)$$

其中 μ 为原系统的系统参数, $1/\mu$ 为控制系统的系统参数, g 为反馈系数, 非线性动力学控制系统 $gF'\left(x_n, \frac{1}{\mu}\right)$ 为已知的控制项. 以 Logistic 映射

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu) = \mu x_n(1 - x_n) \quad (4)$$

为例, 构造一个 Logistic 映射新的混沌系统, 其混沌行为与(4)式描述的系统相反. 随 μ 的逐步增加, 系统从混沌状态进入倍周期分岔, 经倍周期分岔序列最终到达稳定不动点, 如图 1 所示. 系统构造如下:

$$x'_{n+1} = \frac{1}{\mu} x_n(1 - x_n). \quad (5)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10147201 和 10247003)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yujinjiang6060@Yahoo.com.cn

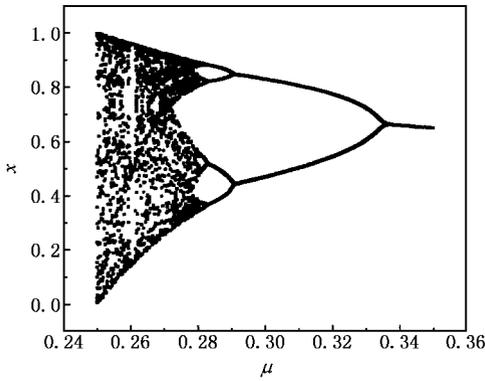


图 1 新系统动力学行为

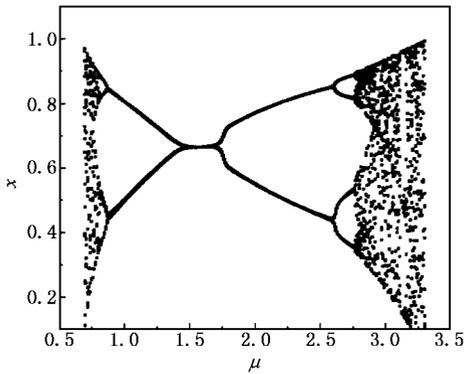


图 2 对称系统的混沌行为 $g = 2.23$

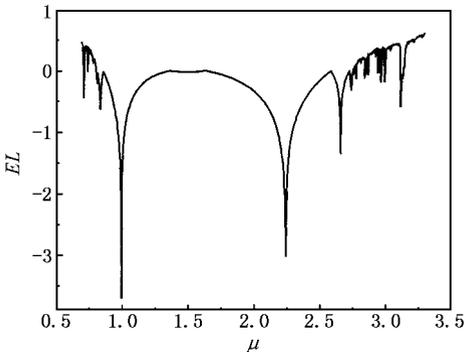


图 3 Lyapunov 指数谱

将 (5) 式作为控制项引入原系统, 构成一个对称混沌系统, 则有

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n) + g \frac{1}{\mu} x_n(1 - x_n) = \left(\mu + g \frac{1}{\mu} \right) x_n(1 - x_n). \quad (6)$$

新系统的混沌行为如图 2 所示. 从图 2 可以看出, 对称系统的混沌行为是由中间的稳定不动点向两边分

岔, 再由二周期分岔到四周期分岔, 最后进入两边的混沌区域. 图 3 表明, Lyapunov 指数谱刻划了对称混沌系统呈现周期和混沌的特性, 系统的临界位置及范围与理论分析的结果一致, 显然, 除了不动点外, 对称混沌系统还可以被控制到其他的周期状态. 对于 (6) 式不动点的条件可表示为

$$x_F = \mu x_F(1 - x_F) + g \frac{1}{\mu} x_F(1 - x_F), \quad (7)$$

$$x_F = 1 - \frac{\mu}{\mu^2 + g}. \quad (8)$$

由临界点(分岔点) $|F'(x)| = 1$ 可知, 临界条件为

$$\left(\mu + g \frac{1}{\mu} \right) - 2 \left(\mu + g \frac{1}{\mu} \right) x_F = \pm 1. \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式得

$$\mu_1 = \frac{3 + \sqrt{1 - 4g}}{2}, \quad \mu'_1 = \frac{3 - \sqrt{1 - 4g}}{2}.$$

由以上两个函数式可知, 稳定不动点范围在 $\mu_1 > \mu > \mu'_1$ 之间. $g > 2.25$ 时不存在稳定不动点. $g = 0$ 时对称系统退化为原系统. 由倍周期分岔的临界条件也可得到其他周期的取值范围. 稳定条件有

$$|F^{(n)}(x)| = \left| \prod_{i=1}^n F'(x_i) \right| < 1, \quad (10)$$

高周期临界点的条件为

$$|F^{(n)}(x)| = 1. \quad (11)$$

用以上方法依次可得出二倍以上周期分岔的取值范围. 由上述研究和图 2 可知, 二倍以上周期均为两个取值范围. 对称系统倍周期各分岔点的取值列于表 1.

表 1 $g = 2.23$ 时倍周期分岔点数值

...	μ_3	μ_2	μ_1	μ'_1	μ'_2	μ'_3	...
...	2.7259	2.5869	1.7414	1.4585	0.8620	0.8180	...

3. 数值模拟

3.1. 对称混沌系统的控制

由上述分析可知, 当 $\mu = 3.9$ 时, 系统处于混沌状态. 根据 (8) 和 (9) 式, 可以得到一个关于 g 的二次方程, 即

$$g^2 + (2\mu - 1)\mu g + \mu^4 - \mu^3 = 0. \quad (12)$$

若取系统参数为 3.9 时, 要得到反馈系数 g 的取值范围, 必须在 (12) 式有实数根的情况, 则

$$\Delta = (2\mu - 1)^2 \mu^2 - 4(\mu - 1)\mu^3 > 0. \quad (13)$$

从(12)式得

$$g_1 = \frac{(1 - 2\mu) + \mu \sqrt{1 + 2\mu}}{2},$$

$$g_2 = \frac{(1 - 2\mu) - \mu \sqrt{1 + 2\mu}}{2}.$$

反馈系统的取值范围 $g_1 > g > g_2$ 之间. 如图 4 所示, 在反馈系数的取值范围内, 适当调整反馈系数, 可以得到不同的数值输出. 如图 5 所示, 当选取 $g = -3$ 时, 系统控制在二周期轨道. 同样选取不同范围的反馈系数, 可使系统控制在其他各高周期轨道.

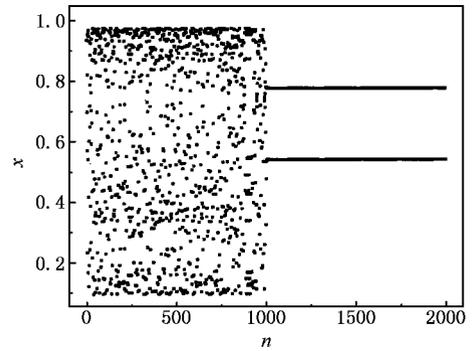


图 5 当选取 $\mu = 3.9, g = -3$ 时控制在二周期轨道

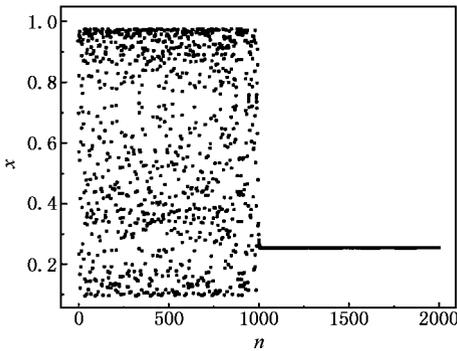


图 4 当选取 $\mu = 3.9, g = -9$ 时的控制结果

3.2. 反馈参数对控制速度的影响

在零次到 200 次迭代不加控制, 从 200 次到 400 次之间的迭代过程用非线性动力学系统控制器进行控制, 如图 6 所示. 从图 6 可以看出, 随反馈参数 g 的减小, 意味着施加控制的次数减少, 控制速度逐渐变快, 控制效果逐渐变好. 根据本文的控制方法和数值模拟可以看出, 控制的速度与控制器系统的系统参数及反馈参数有关. 只要适当选取系统参数和反馈参数, 就可以使系统迅速达到预期的目标轨道.

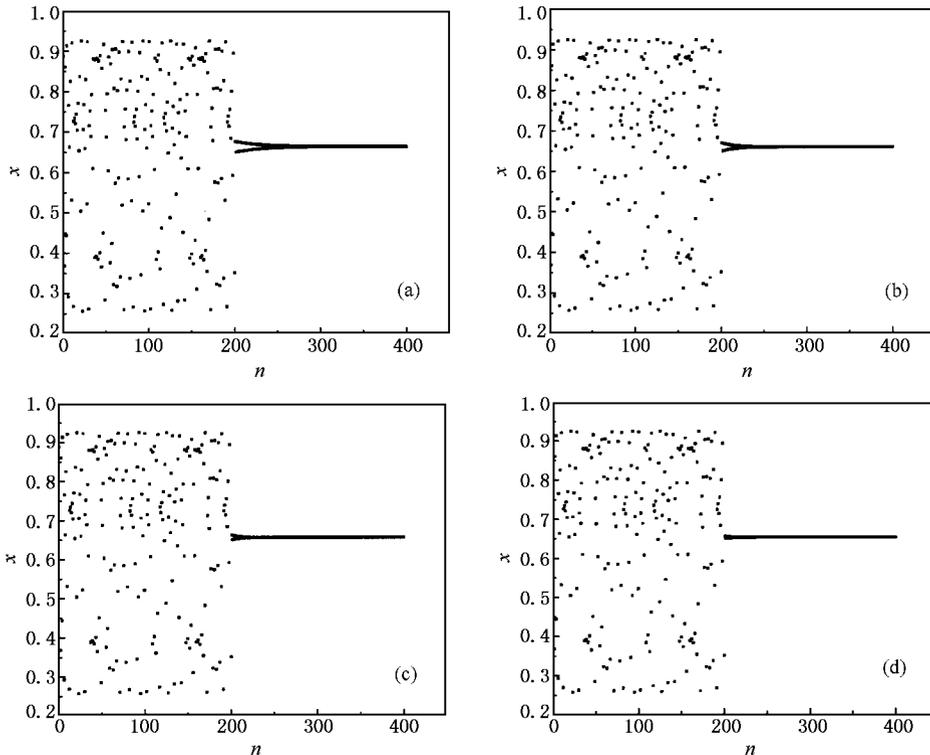


图 6 当选取 $\mu = 3.9$ 时的控制结果 反馈系数 $g = -8.6(a), -8.7(b), -8.8(c), -8.9(d)$

4. 噪声的影响

在分析混沌系统稳定性时,有必要研究外部噪声对控制性能的影响,本文采用均值为零方差为1的高斯白噪声对系统进行干扰,验证系统的实用性.将加法形式噪声引入系统

$$x'_n = x_n + \rho \cdot \sigma,$$

其中 ρ 为噪声强度, σ 为高斯白噪声,噪声作用于控

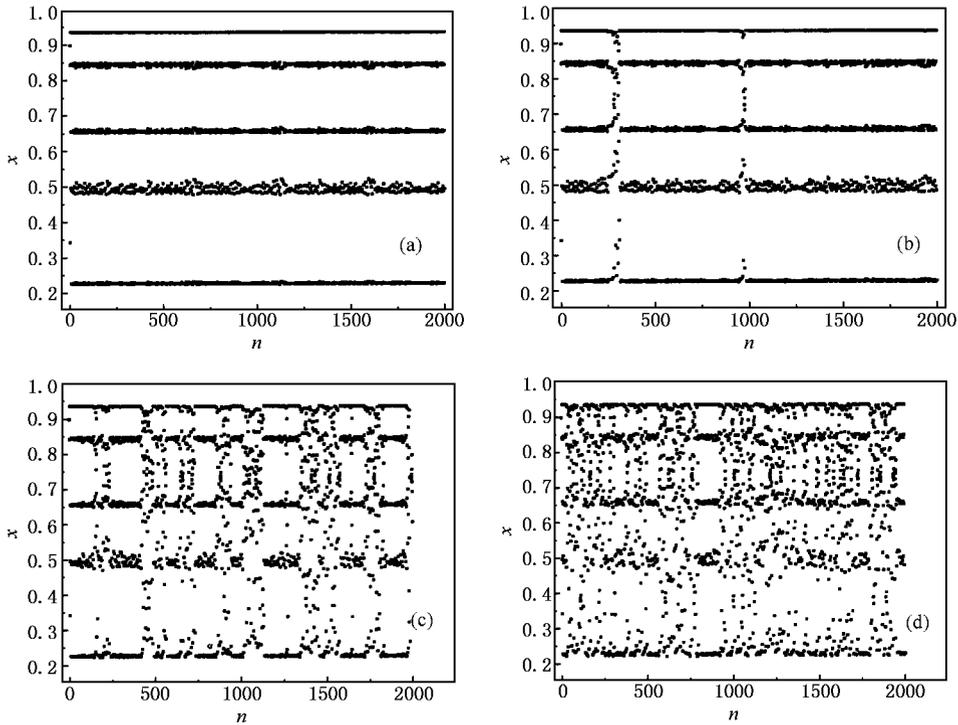


图7 加法噪声对系统的影响 $g = 0.23$. 噪声强度 $\rho = 1 \times 10^{-4}$ (a), 1.5×10^{-4} (b), 2.5×10^{-4} (c), 5×10^{-4} (d)

5. 结 论

在连续反馈的基础上,引入一个同类型并与原系统行为相反的非线性动力学系统,构造一个新的对称行为动力学系统,通过调节反馈系数,可以使系统获得各种指定的目标轨道.在实际控制时,只要按

制系统.图7(a)示出系统的控制目标为周期5时的控制结果.噪声强度取 $\rho = 1 \times 10^{-4}$ 时,从图7(a)可以看出,在系统施加噪声后得到的轨迹变粗,但仍然以稳定的周期轨迹为主.图7(b)是在外部噪声进一步增大时的控制结果,这时噪声强度 $\rho = 1.5 \times 10^{-4}$,系统出现随机不稳定状态.在噪声强度越大时,不稳定时间随之延长,如图7(c)所示.在噪声强度取 $\rho = 5 \times 10^{-4}$ 时,不稳定状态几乎占据了所有的控制时间,最终导致系统失稳而进入混沌状态.

上述的计算方法或对系统的观察来确定控制系统参数和反馈系数.此方法比较简单实用,其控制器只要采用原系统的形式,控制器系统参数即可选用原系统的系统参数,也可随意设置,灵活性很大.

对此方法的研究表明,不论原系统处于周期吸引子状态或是处于混沌状态,其控制方法都能稳定地将原系统控制在预期的目标轨道上.

- [1] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **11** 1196
 [2] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **8** 821
 [3] Lai Y C, Ding M and Grebogi C 1993 *Phys. Rev. E* **47** 86
 [4] Fang J Q 1996 *Prog. Phys.* **1** 137 [in Chinese] 方锦清 1996 物理学进展 **1** 137]

- [5] Li G H, Zhou S P, Xu D M and Lai J W 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2123 [in Chinese] 李国辉、周世平、徐得名、赖建文 2000 物理学报 **49** 2123]
 [6] Guan X P, Fan Z P, Peng H P and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 [in Chinese] 关新平、范正平、彭海朋、王义群 2001 物

- 理学报 50 2108]
- [7] Wang G Y , Yu J B and Gu T X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2307 [in Chinese] 王改云、虞厥邦、古天祥 2001 物理学报 **50** 2307]
- [8] Luo X S , Chen G R , Wang B H , Fang J Q , Zou Y L and Quan H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 [in Chinese] 罗晓曙、陈关荣、汪秉宏、方锦清、邹艳丽、全宏俊 2003 物理学报 **52** 790]

Nonlinear dynamics and control of symmetric chaotic systems ^{*}

Yu Jin-Jiang¹✉† Zhang Ming-Xuan¹) Xu Hai-Bo²)

¹) (Department of Physics , Shijiazhuang Teachers College , Shijiazhuang 050801 , China)

²) (Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China)

(Received 31 January 2004 ; revised manuscript received 26 March 2004)

Abstract

Based on the continuous feedback control idea , a novel nonlinear dynamics of map and control method for a symmetric chaotic system is presented. Different from the periodical orbit method , the basis to choose controlling parameters has been given. Only by appropriately adjusting feedback parameters , any periodical orbit can be reached. This method is applied to Logistic map , and good results have been obtained.

Keywords : feedback control , periodical orbit , symmetric system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10147201 and 10247003).

[†] Corresponding author. E-mail : yujinjiang 6060@Yahoo. com. cn