第 53 卷 第 12 期 2004 年 12 月
1000-3290/2004/53(12)/4021-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.12,December,2004

非保守 Nielsen 方程的形式不变性导致的非 Noether 守恒量*

许学军[1)2)] 梅凤翔[1)] 秦茂昌[1)]

[1)](北京理工大学力学系,北京 100081)

[2)](浙江师范大学物理系,金华 321004)

(2004 年 2 月 6 日收到;2004 年 3 月 23 日收到修改稿)

研究非保守 Nielsen 方程由形式不变性直接导致的非 Noether 守恒量.函数对时间的全导数采用沿运动轨道曲线的方式,给出非保守 Nielsen 方程的非点的形式不变性的定义和判据,并研究其 Noether 守恒量.得到形式不变性导致非 Noether 守恒量的条件以及守恒量的形式,并给出三种特殊情形的推论.举例说明结果的应用.

关键词:Nielsen 方程,形式不变性,非 Noether 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

动力学系统的守恒定律在数学、物理学和力学等领域中扮演着重要的角色.对称性理论有许多用途,其中之一是用来寻求守恒量.由力学系统的对称性来求守恒量,有多种途径,主要有 Noether 方法、Lie 方法和形式不变性方法.由 Noether 对称性用 Noether 定理来寻找 Noether 守恒量是常用的直接方法,并已取得重大进展[1—3].由 Lie 对称性或形式不变性通过 Noether 对称性可间接地找到 Noether 守恒量,并取得重要进展[2—20].Hojman 给出了由 Lie 对称性直接寻找守恒量的方法,也取得了重要进展[21—31].文献[9]研究了 Nielsen 方程的点的形式不变性,文献[10]和文献[20]分别将其推广至非保守系统和相对论变质量非完整系统.梅凤翔、王树勇等将 Lie 对称性与形式不变性的等价关系[12]和 Hojman 方法相结合,研究了两类力学系统的形式不变性通过 Lie 对称性导致的非 Noether 守恒量[32,33].本文按照函数对时间全导数采用沿运动轨道曲线的方式,给出非保守 Nielsen 方程的非点的形式不变性的定义和判据,研究其 Noether 守恒量,得到了非保守 Nielsen 方程由形式不变性直接导致的非 Noether 守恒量,并举例说明结果的应用.

2. 形式不变性的定义和判据

具有双面理想完整约束的非保守力学系统的运动微分方程可表示为 Nielsen 方程

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

式中 $L = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数,$Q_s = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力.方程(1)可表示为

$$N_s(L) = Q_s \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

式中

$$N_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial}{\partial q_s} \qquad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

为 Nielsen 算子.设系统(1)非奇异,则可解出所有广义加速度,记之为

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

取时间和广义坐标的非点的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ &\qquad (s = 1,2,\cdots,n), \end{aligned} \tag{5}$$

式中 ε 为无限小参数,ξ_0 和 ξ_s 为无限小生成元.在变换后,函数 L 变为 L^*,Q_s 变为 Q_s^*,将 L^* 和 Q_s^*

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)资助的课题.

在$(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$处沿运动轨道曲线作 Taylor 展开,有

$$
\begin{aligned}
L^{*} &= L\left(t^{*},\boldsymbol{q}^{*},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{*}}{\mathrm{d}t^{*}}\right) = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\
&\quad + \varepsilon X^{(1)}(L) + O(\varepsilon^{2}), \\
Q_s^{*} &= Q_s\left(t^{*},\boldsymbol{q}^{*},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^{*}}{\mathrm{d}t^{*}}\right) = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\
&\quad + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + O(\varepsilon^{2}) \\
&\quad (s = 1,2,\cdots,n),
\end{aligned} \tag{6}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
X^{(1)} &= \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \\
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

(7)式采用 Einstein 求和约定,全文同.

定义 系统(1)的形式不变性是指用 L^{*} 替代 L,Q_s^{*} 替代 Q_s 时,其形式保持不变,即

$$
N_s(L^{*}) = Q_s^{*} \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{8}
$$

考虑到 Nielsen 算子的运算过程中要求广义加速度与广义速度无关,利用算子运算关系式

$$
\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial}{\partial q_s} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{9}
$$

可证明

$$
N_s = \bar{N}_s - \frac{\partial \alpha_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{10}
$$

式中

$$
\bar{N}_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1,2,\cdots,n) \tag{11}
$$

为广义 Nielsen 算子.将(6)式代入方程(8),忽略 ε^2 及更高阶小量项,并利用方程(2)和(10)式,得到

$$
\bar{N}_s[X^{(1)}(L)] - \frac{\partial \alpha_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_k} = X^{(1)}(Q_s) \quad (s = 1,2,\cdots,n). \tag{12}
$$

判据 若变换(5)式中的无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(12),则相应不变性为系统(1)的形式不变性.

称方程(12)为非保守 Nielsen 方程的形式不变性的判据方程.显然,文献[9]中的判据是此判据的特殊情形.

3.形式不变性的 Noether 守恒量

形式不变性通过 Noether 对称性间接地获得 Noether 守恒量的条件和守恒量的形式,由命题 1 给出.

命题 1 如果非保守 Nielsen 方程的无限小变换(5)式中的生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(12),且存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足如下结构方程:

$$
L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + X^{(1)}(L) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{N}} = 0, \tag{13}
$$

则系统存在形式不变性的 Noether 守恒量

$$
I_{\mathrm{N}} = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}} = \mathrm{const}. \tag{14}
$$

证 将(14)式按(7)式对时间求导数,并利用(13)式得

$$
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{N}} = \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0). \tag{15}
$$

根据 Lagrange 方程和 Nielsen 方程的等价性,利用(1)式,(15)式变为

$$
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{N}} = 0.
$$

证毕.

4.形式不变性导致的非 Noether 守恒量

形式不变性直接导致非 Noether 守恒量的条件和守恒量的形式,由命题 2 给出.

命题 2 如果非保守 Nielsen 方程的无限小变换(5)式中的生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(12),且存在规范函数 $G_{\mathrm{F}} = G_{\mathrm{F}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足广义结构方程

$$
\begin{aligned}
&X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] \\
&\quad + X^{(1)}(Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{F}} = 0,
\end{aligned} \tag{16}
$$

则系统形式不变性导致非 Noether 守恒量

$$
I_{\mathrm{F}} = X^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{F}} = \mathrm{const}. \tag{17}
$$

证 将(17)式按(7)式对时间求导数,并先后利用(16)和(9)式得

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{F}} &= \Bigg[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}X^{(1)}(L)}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} \\
&\quad - \frac{\partial \alpha_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_k} - X^{(1)}(Q_s)\Bigg](\xi_s - \dot{q}_s\xi_0).
\end{aligned} \tag{18}
$$

将判据方程(12)代入(18)式,便得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{F}} = 0.$$

证毕.

对保守 Nielsen 方程,有 $Q_s = 0$.于是有下列推论.

推论 1　如果保守 Nielsen 方程的无限小变换(5)式中的生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$\bar{N}_s[X^{(1)}(L)] - \frac{\partial\alpha_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_k} = 0$$

$$(s = 1,2,\cdots,n), \tag{19}$$

且存在规范函数 $G_{\mathrm{F}} = G_{\mathrm{F}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足

$$X^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{F}} = 0, \tag{20}$$

则保守 Nielsen 方程形式不变性导致守恒量(17)式.

推论 2　如果形式不变性的生成元满足 $\xi_s = \dot{q}_s\xi_0$,则命题给出平凡守恒量

$$I_{\mathrm{F}} = 0. \tag{21}$$

证　计算得

$$X^{(1)}[X^{(1)}(L)] = \xi_0\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}X^{(1)}(L). \tag{22}$$

由(16),(17),(22)式立即证得.

推论 3　如果形式不变性生成元满足 $X^{(1)}(L) = 0$,则推论 1 给出平凡守恒量.

5.说明性例子

例 1　Emden 方程[34] $\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0$ 可表示为 Nielsen 方程

$$N(L) = Q,$$
$$L = \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2, \tag{23}$$
$$Q = -t^2q^5.$$

取生成元为

$$\xi_0 = -3t,\quad \xi = 2q, \tag{24}$$

则有

$$X^{(1)}(L) = 2t^2\dot{q}^2,$$
$$X^{(1)}[X^{(1)}(L)] = 4X^{(1)}(L),$$
$$X^{(1)}(Q) = -4t^2q^5,$$

可以验证判据方程(12)成立.结构方程(13)给出

$$G_{\mathrm{N}} = -t^3\dot{q}^2 - \frac{3}{2}t^2q\dot{q} + \frac{1}{6}t^3q^6,$$

则系统存在形式不变性的 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}t^3\dot{q}^2 + \frac{1}{2}t^2q\dot{q} + \frac{1}{6}t^3q^6. \tag{25}$$

这便是 Emden 方程的著名守恒量.注意到,此形式不变性虽为点的,但文献[34]不按照函数对时间全导数采用沿运动轨道曲线的方式,却得不到(25)式.广义结构方程(16)给出

$$G_{\mathrm{F}} = 4G_{\mathrm{N}},$$

而形式不变性导致的守恒量(17)式给出

$$I_{\mathrm{F}} = 4I_{\mathrm{N}}. \tag{26}$$

例 2　二自由度完整力学系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2,$$
$$Q_1 = \dot{q}_1, \tag{27}$$
$$Q_2 = t - \dot{q}_2.$$

取生成元为

$$\xi_0 = 0,\quad \xi_1 = 1,\quad \xi_2 = 0, \tag{28}$$

同于例 1,则有

$$G_{\mathrm{N}} = -q_1,\quad I_{\mathrm{N}} = \dot{q}_1 - q_1,$$
$$G_{\mathrm{F}} = 0,\quad I_{\mathrm{F}} = 0. \tag{29}$$

取生成元为

$$\xi_0 = 1,$$
$$\xi_1 = 0, \tag{30}$$
$$\xi_2 = \dot{q}_2 + q_2 + t - \frac{1}{2}t^2,$$

同理有

$$G_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + q_2 - q_2\dot{q}_2 - t\dot{q}_2 + \frac{1}{2}t^2\dot{q}_2,$$
$$I_{\mathrm{N}} = 0,$$
$$G_{\mathrm{F}} = q_2 + t - \frac{1}{2}t^2,$$
$$I_{\mathrm{F}} = -\dot{q}_2 - q_2 + \frac{1}{2}t^2 - t. \tag{31}$$

显然,(31)式中的最后一式是由形式不变性直接导致的新的非平凡的非 Noether 守恒量.

6.结　论

研究力学系统的形式不变性的目的之一是寻求系统的守恒量.在函数对时间的全导数采用沿运动轨道曲线方式的情形下,能得到原来无法得到的形式不变性的 Noether 守恒量,但有时会出现平凡守恒量.存在着形式不变性直接导致的非 Noether 守恒量,但缺少新的非平凡的非 Noether 守恒量存在的条件.

[1] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press)(in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]
[2] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]
[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]
[4] Mei F X 2000 *Acta Mech*. **141** 135
[5] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Institute of Technology* **9** 120
[6] Mei F X 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]
[7] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔、尚 玫 2000 物理学报 **49** 1901]
[8] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177
[9] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373
[10] Fang J H, Xue Q Z, Zhao S Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]
[11] Zhang H B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1
[12] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5
[13] Zhang H B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 765
[14] Qiao Y F, Zhang Y L, Han G C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1051 (in Chinese)[乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051]
[15] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 695
[16] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1058
[17] Fang J H, Chen P S, Zhang J *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2945 (in Chinese) [方建会、陈培胜、张 军等 2003 物理学报 **52** 2945]
[18] Xu X J, Mei F X 2004 *J*. *Beijing Institute of Technology* **24** 16 (in Chinese) [许学军、梅凤翔 2004 北京理工大学学报 **24** 16]
[19] Zhang Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 331 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 331]
[20] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 292
[21] Hojman S A 1992 *J*. *Phys*. *A*: *Math*. *Gen*. **25** L291
[22] Pillay T, Leach P G L 1996 *J*. *Phys*. *A*: *Math*. *Gen*. **29** 6999
[23] Lutzky M 1995 *J*. *Phys*. *A*: *Math*. *Gen*. **28** L637
[24] Mei F X 2002 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **47** 2049
[25] Mei F X 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]
[26] Zhang Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]
[27] Zhang Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1832 (in Chinese) [张 毅 2003 物理学报 **52** 1832]
[28] Zhang Y, Xue Y 2003 *J*. *Southeast University* **19** 289
[29] Luo S K, Cai J L 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 357
[30] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 841
[31] Fu J L, Chen L Q 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 287
[32] Mei F X 2003 *J*. *Beijing Institute of Technology* **23** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 1]
[33] Wang S Y, Shang M, Mei F X 2003 *J*. *Beijing Institute of Technology* **23** 271 (in Chinese) [王树勇、尚 玫、梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 271]
[34] Mei F X 2003 *Mechanics in Engineering* **25** 69 (in Chinese) [梅凤翔 2003 力学与实践 **25** 69]

A non-Noether conserved quantity constructed using form invariance for Nielsen equation of a non-conservative mechanical system*

Xu Xue-Jun[1)2)] Mei Feng-Xiang[1)] Qin Mao-Chang[1)]

[1)] (*Department of Mechanics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

[2)] (*Department of Physics*, *Zhejiang Normal University*, *Jinhua* 321004, *China*)

(Received 6 February 2004; revised manuscript received 23 March 2004)

Abstract

This paper deals with a non-Noether conserved quantity constructed directly by using the form invariance for the Nielsen equation of a non-conservative mechanical system. The definition and the criterion of a non-point form invariance of the equation, of which the Noether conserved quantity is studied, are established by relying on the total time derivative along the trajectory of the equation. The condition under which the form invariance can lead to a non-Noether conserved quantity and the form of the conserved quantity are deduced, and three corollaries in special cases are presented. Two examples are finally given to illustrate the application of the results.

Keywords: Nielsen equation, form invariance, non-Noether conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021).