

# 势场中玻色-爱因斯坦凝聚的临界温度

余学才 莫 影

(电子科技大学光电信息学院, 成都 610054)

(2003 年 6 月 13 日收到 2004 年 7 月 8 日收到修改稿)

给出了不同于文献的势场中玻色-爱因斯坦凝聚临界温度表达式. 结果揭示了势场中理想玻色子气体凝聚的临界温度与势场之间的关系, 表明势场中临界温度正比于无势场情况下临界温度  $T_c^0$ . 还给出了势场的有效性判据. 势场的有效性是势场与玻尔兹曼常数  $k$  和无势场情况下临界温度  $T_c^0$  乘积  $kT_c^0$  的比较. 当势场接近或大于  $kT_c^0$  时, 临界温度会有效增加; 当势场远小于  $kT_c^0$  时, 势场是无效的.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 临界温度, 势阱

PACC: 0530J, 6500, 7430E

## 1. 引 言

对于玻色-爱因斯坦凝聚 ( Bose-Einstein condensation, 简称 BEC ) 的凝聚、俘获及其独特的性质, 理论和实验都作了大量的研究工作<sup>[1-7]</sup>. 在没有外加势场的情况下, 对于粒子之间无相互作用的理想玻色气体, 凝聚的临界温度为

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi kM} \left( \frac{1}{2.612} \frac{N}{V} \right)^{2/3}, \quad (1)$$

其中  $h$  为普朗克常数,  $k$  为玻尔兹曼常数,  $M$  为粒子质量,  $V$  为容器体积,  $N$  为粒子数目. 当温度  $T < T_c$  时, 能量为零的状态上的粒子数  $N_0$  和总粒子数  $N$  之比为

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (2)$$

通过激光冷却原子技术将原子气体的温度降低到  $\mu\text{K}$  量级<sup>[8-11]</sup>, 在碱金属原子气体中实现了玻色子气体的凝聚. 实验技术的成功为产生相干原子奠定了基础. 为了控制和囚禁凝聚的玻色原子气体, 提出了外加势阱, 例如四极磁阱. 当玻色子气体处于外加势场中时, 受外加势场的作用, 系统的动力学行为将发生变化, 包括发生凝聚的临界温度也不同于自由状态情况. 文献 [12] 研究了在外加势场

$$U(r) = \epsilon_1 \left| \frac{x}{a} \right|^p + \epsilon_2 \left| \frac{y}{b} \right|^l + \epsilon_3 \left| \frac{z}{c} \right|^q \quad (3)$$

中玻色子气体凝聚的临界温度, 给出了系统的热力学参数及临界温度

$$T_c = \left[ \frac{h^3}{2\pi(2M)^{3/2}} \frac{N}{abc} \frac{\epsilon_1^{1/p} \epsilon_2^{1/l} \epsilon_3^{1/q}}{k^{7+1} F(p, l, q) Q(\eta)} \right]^{1/(\eta+1)}. \quad (4)$$

这里,

$$F(p, l, q) = \int_{-1}^1 (1 - |X|^p)^{1/2+1/q+1/l} dX \times \int_{-1}^1 (1 - |X|^l)^{1/2+1/q} dX \times \int_{-1}^1 (1 - |X|^q)^{1/2} dX, \quad (5)$$

$$Q(\eta) = \int_0^\infty \{ \theta^\eta [ \exp(\theta) - 1 ] \} d\theta, \quad (6)$$

$$\eta = 1/p + 1/l + 1/q + 1/2.$$

此后, 关于势阱中 BEC 气体的临界温度就很少有进一步的理论研究, 此结果也成为文献引用的理论结果. 这里, 有一个值得探讨的问题是存在外加势场时玻色子是在最低能量态——基态还是在最低动量态上凝聚. 原则上, BEC 不是仅被限制在最低能量态上. 只要原子聚集在某一个量子态上, 原子的波函数之间的相位是相关的, 就可以称发生了凝聚. 但这个量子态的本征能量并没有限定为基态能量. 文献 [12] 是在半经典图像中研究 BEC 气体在势场中凝聚的临界温度. 在半经典图像中, 当原子温度逐渐降低时大量原子的动量越来越接近于零, 但由于处于外加势场中, 原子的能量与所在空间位置有关, 能量不一定为零. 例如处于谐振子势场中的原子, 在经典图像上只有坐标原点的原子能量为零. 所以在半经

典图像上理解势场中温度降到很低时的 BEC,应该在最低动量状态上凝聚.文献 [12] 对临界温度的推导是在零能量态凝聚的前提下进行的,从所得到的最终结果(4 式)很难看出需要加多大势场才能有效增加临界温度.假设 BEC 发生零动量状态,我们重新研究了势场中 BEC 的临界温度,得到了不同于文献 [12] 的结果.

## 2. 一般势场中的临界温度

考虑理想玻色气体处于势场  $U(r)$  之中,在局域密度近似<sup>[13]</sup>下,在  $p \rightarrow p + dp$  的动量范围内状态数目为

$$\frac{4\pi}{h^3} p^2 dp d^3 r = \frac{2\pi}{h^3} (2M)^{3/2} (\epsilon - U(r))^{3/2} d\epsilon d^3 r, \quad (7)$$

式中  $M$  为原子质量,相空间中的态密度为

$$\rho(r) d\epsilon = \frac{2\pi}{h^3} (2M)^{3/2} (\epsilon - U(r))^{3/2} d\epsilon. \quad (8)$$

粒子在能量  $\epsilon$  态上的占有数

$$n_\epsilon = g_\epsilon \frac{1}{\exp((\epsilon - \mu)/kT) - 1}, \quad (9)$$

式中  $g_\epsilon$  为能量  $\epsilon$  态简并度,  $\mu$  为体系的化学势. 粒子密度

$$\begin{aligned} n(r) &= n_0(r) + \int_{U(r)}^{\infty} n_\epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon \\ &= n_0(r) + \int_{U(r)}^{\infty} \left[ n_\epsilon \frac{2\pi}{h^3} (2M)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. \times (\epsilon - U(r))^{3/2} \right] d\epsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式中在动量为零(此时  $\epsilon = U(r)$ )时积分为零,所以  $n_0(r)$  表示零动量状态上的原子密度. 完成积分后得到

$$\begin{aligned} n(r) &= n_0(r) + \frac{(2\pi M)^{3/2}}{h^3} g_\epsilon (kT)^{3/2} \\ &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \exp\left(-m \frac{U(r) - \mu}{kT}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

势  $U(r) = 0$  时,积分在化学势  $\mu = 0$  时最大,  $\mu > 0$  时积分发散. 取  $n_0 = 0, \mu = 0$ , 得到势  $U(r) = 0$  时的临界温度(1 式). 将不加势场时的临界温度重记为

$$T_c^0 = \frac{h^2}{2\pi kM} \left( \frac{n}{2.612} \right)^{2/3} \quad (g_\epsilon = 1), \quad (12)$$

式中  $n$  为空间均匀分布粒子密度. 势  $U(r) \neq 0$  时, 取  $n_0(r) = 0$ , 得到临界温度与势  $U(r)$  之间关系的

超越方程

$$T_c(r) = T_c^0 \left\{ \frac{2.612}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \exp(-m(U(r)/kT_c(r)))} \right\}^{2/3}. \quad (13)$$

这个方程表明了理想玻色气体在零动量状态上凝聚的临界温度与势场之间的一般关系. 从方程(13)可见,由于势场一般是空间变化的,临界温度也与空间位置有关. 临界温度可以用  $T_c^0$  来度量,势场的大小则用  $kT_c^0$  来度量. 定义无量纲的临界温度和势场,

$$\begin{aligned} \tau_c(r) &= T_c(r) T_c^0, \\ u(r) &= U(r) / (kT_c^0), \end{aligned} \quad (14)$$

则方程(13)表示为

$$\tau_c(r) = \left\{ \frac{2.612}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \exp(-m(u(r)/\tau_c(r)))} \right\}^{2/3}. \quad (15)$$

图 1 给出了归一化临界温度  $\tau_c$  与归一化势  $u$  的关系曲线.  $\tau_c$  随  $u$  的增加而单调增加. 当  $u(r) \ll 1$  时,  $\tau_c(r) \approx 1$ , 临界温度接近  $T_c^0$ , 势场是无效的; 当  $u(r) \gg 1$  时,

$$\tau_c(r) \approx 1.8966 \exp\left(\frac{u(r)}{\tau_c(r)}\right)^{2/3}. \quad (16)$$

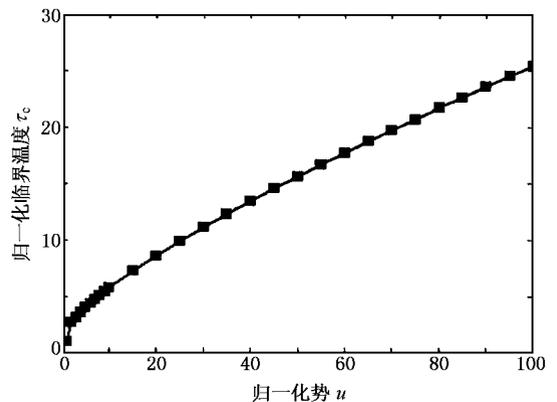


图 1 归一化临界温度  $\tau_c$  与归一化势  $u$  的关系

## 3. 势场 $U(r) = \epsilon_1 \left| \frac{x}{a} \right|^p + \epsilon_2 \left| \frac{y}{b} \right|^l + \epsilon_3 \left| \frac{z}{c} \right|^l$ 中的临界温度

对方程(11)进行空间积分,得到总的原子数

$$N = N_0 + \frac{(2\pi M)^{3/2}}{h^3} \frac{8abc}{plq} \frac{(kT)^{\eta+1}}{\varepsilon_1^{1/p} \varepsilon_2^{1/l} \varepsilon_3^{1/q}} \\ \times \Gamma(1/p) \Gamma(1/l) \Gamma(1/q) \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\eta-1} \exp\left(m \frac{\mu}{kT}\right), \quad (17)$$

式中

$$\eta = 1/2 + 1/p + 1/l + 1/q,$$

$$\Gamma(1/\kappa) = \int_0^{\infty} \xi^{1/\kappa-1} \exp(-\xi) d\xi \quad (\kappa = p, l, q).$$

积分在化学势  $\mu > 0$  时仍是发散的, 在  $\mu = 0$  时最大. 取  $\mu = 0, N_0 = 0$ , 得到临界温度

$$T_c = \frac{1}{k} \left( \frac{N}{8abc \Gamma(1/p) \Gamma(1/l) \Gamma(1/q)} \frac{h^3}{(2\pi M)^{3/2}} \right. \\ \left. \times \frac{\varepsilon_1^{1/p} \varepsilon_2^{1/l} \varepsilon_3^{1/q}}{\Gamma(1/p) \Gamma(1/l) \Gamma(1/q)} \frac{1}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\eta-1}} \right)^{1/(\eta+1)}. \quad (18)$$

定义系统有效体积

$$V^* = 8abc \Gamma(1/l) \Gamma(1/p) \Gamma(1/q) \mathcal{K}(plq),$$

以及不加势场时在体积为有效体积的容器中凝聚临界温度

$$T_c^* = \frac{h^2}{2\pi kM} \left( \frac{N}{V^*} \frac{1}{2.612} \right)^{2/3}, \quad (19)$$

则临界温度可另表示为

$$T_c = T_c^* \left( \left( \frac{\varepsilon_1}{kT_c^*} \right)^{1/p} \left( \frac{\varepsilon_2}{kT_c^*} \right)^{1/l} \left( \frac{\varepsilon_3}{kT_c^*} \right)^{1/q} \right)^{\frac{1}{1+\eta}} \\ \times \left( \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2}}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\eta}} \right)^{\frac{1}{1+\eta}}. \quad (20)$$

凝聚在动量为零状态上的粒子数与总原子数之比为

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{\eta+1}. \quad (21)$$

从 (20) 式可知, 势场的有效性是根据势场强度  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  和  $kT_c^*$  比较结果进行判断的. 当  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq kT_c^*$  时, 临界温度有效增加. 当  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = kT_c^*$  时,  $T_c \approx T_c^*$ , 此时玻色气体被约束在有效体积的范围内, 因此势场对玻色气体的约束体积可以用有效体积估算. 当  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ll kT_c^*$  时, 势场是无效的. 临界温度不仅依赖于势场强度 ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ), 也依赖于势场的形状 (参数  $p, l, q, a, b, c$ ). 对于二维简谐势阱  $U(r) = \varepsilon_1 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + \varepsilon_2 \left( \frac{y}{b} \right)^2$ , 有效体积为  $V^* =$

$\pi abL$ . 临界温度和凝聚在动量为零状态上的粒子数与总原子数之比分别为

$$T_c = 1.305 T_c^* \left( \frac{\varepsilon_1}{kT_c^*} \right)^{1/2} \left( \frac{\varepsilon_2}{kT_c^*} \right)^{1/2}, \quad (22)$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{5/2}. \quad (23)$$

## 4. 分析与讨论

玻色粒子气体原则上可以在任何状态上凝聚. 没有势场存在时, 粒子动量和能量具有共同的本征态, 最低能量态即为最低动量状态. 存在势场时, 动量和能量一般不具有共同的本征态. 势场中的玻色粒子气体被充分冷却时, 它的实际热运动速度很低, 动能可能比势能小得多, 接近于零动量状态, 但具有一定势能, 因此玻色粒子气体具有一定能量. 实际上, 除了外加势场对原子施加的作用力外, 光学冷却原子的过程等效于对原子施加了另外一个相当大的作用力, 这个作用力强迫原子处于接近零动量状态. 严格的理论应在哈密顿算符中同时包括冷却过程的等效作用算符和外加势场, 求出原子在势阱中的可能量子态, 再根据量子统计理论求系统的临界温度和其他参数. 在方程 (10) 中, 能量积分下限保证了所考虑的凝聚状态为零动量状态. 文献 [12] 的处理中, 零能量积分下限决定了所考虑的凝聚状态为零能量状态, 但被积函数中的状态密度函数  $\rho$  是确定在动量绝对值不小于零的相空间中. 当能量为零时, 出现状态密度函数  $\rho < 0$  的问题, 所以文献 [12] 定义了一个有效空间. 在所定义的有效空间中, 状态密度函数  $\rho \geq 0$ . 求总粒子数时, 积分是在有效空间中进行的. 但并没有限制势场的有效范围, 所以有效空间的定义有一定的人为因素.

由于势场一般是空间变化的, 方程 (15) 表明了归一化临界温度也与空间位置有关. 在势阱中凝聚的粒子密度也在空间有一个相应的分布. 方程 (16) 表明临界温度与不加势场时临界温度成正比, 势场越大临界温度越高. 势场的大小是用  $kT_c^0$  来度量的. 当势场远小于  $kT_c^0$  时所加势场是没有意义的, 只有当势场大小接近或大于  $kT_c^0$  时临界温度才会有效增加. 所以, 势场的有效性判据为

$$|U| \geq kT_c^0. \quad (24)$$

对于确定的粒子总数和容器体积, 不加势场时临界温度是一个常数. 假如确定了系统的体积, 势阱中所

装载的原子数越多,  $T_c^0$  越高, 所需要的势场强度越大; 反之, 如果势场强度确定, 系统的有效体积确定, (24) 式表明了势阱中所装载的原子数不应该超过的数目

$$N_i = 2.612 V \left( \frac{2\pi M |U|}{h^2} \right)^{3/2}. \quad (25)$$

所装载的原子数超过此数时, 势阱的作用减弱, 超过太多时, 势阱是无效的.

$$\text{对于势 } U(r) = \epsilon_1 \left| \frac{x}{a} \right|^p + \epsilon_2 \left| \frac{y}{b} \right|^l + \epsilon_3 \left| \frac{z}{c} \right|^l,$$

方程 (20) 表明了势场强度  $\epsilon \approx kT_c^*$  或  $\epsilon > kT_c^*$  时, 势场临界温度得到有效提高; 玻色凝聚气体被势场约束的范围可以用有效体积估算. 本文和文献 [12] 所给出的临界温度公式对势场强度  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  的依赖关系是相同的, 差别是一个常数因子. 两种情况下的临界温度之比为

$$\frac{T_{(\text{zero-momentum})}}{T_{(\text{zero-energy})}} = \left( \frac{plq \Gamma(p) \Gamma(l) \Gamma(q) \Gamma(\eta)}{4 \Gamma(1/p) \Gamma(1/l) \Gamma(1/q) \pi^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1-\eta}} \right)^{\frac{1}{1+\eta}}. \quad (26)$$

当  $p = l = q = 2$  (三维简谐势场) 时,  $T_{(\text{zero-momentum})} / T_{(\text{zero-energy})} = 1.306$ , 表明零动量状态凝聚的临界温度比零能量状态凝聚的临界温度高. 对于二维简谐势场, 文献 [12] 没有直接给出临界温度的表达式. 本文和文献 [7, 12] 及其他一些相关文献所采用的处理方法是 Thomas-Fermi 模型下的局域密度近似. 文献 [13] 最早用这个近似处理 BEC, 文献 [14, 15] 对局域密度近似进行了讨论.

感谢孙久勋博士的有益讨论.

- [1] David E P 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 1336
- [2] Wolfgang K, Davis K B, Michanel A J *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 2253
- [3] Yu K, Shlyapnikov G V, Walraven J M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2670
- [4] Dos Santos F P J, Léonard J W, Barrelet C J *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3459
- [5] Zhang S M, Ye F 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 997 (in Chinese) [张思溟、叶飞 1999 物理学报 **48** 997]
- [6] Wang D Z, Lu X H, Huang H *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 997 (in Chinese) [王德重、陆兴华、黄湖等 1999 物理学报 **48** 997]
- [7] Yi X X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 995 (in Chinese) [衣学喜 1999 物理学报 **48** 995]
- [8] Doyle D M, Sandberg J C, Yu U A *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 603
- [9] Bradley C C, Sackett C A, Tolett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687
- [10] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [11] Ensher J R, Jin D S, Matthews M R *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 498
- [12] Bangato V, Pritchard D E, Kleppner D 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4254
- [13] Oliva J 1989 *Phys. Rev. B* **39** 4197
- [14] Chou T T, Yang C N, Yu L H 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4257
- [15] Chou T T, Yang C N, Yu L H 1997 *Phys. Rev. A* **55** 1179

# Critical temperature of Bose-Einstein condensation in an external potential

Yu Xue-Cai Mo Ying

*College of Opto-electronic Information ,University of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 ,China )*

( Received 13 June 2003 ; revised manuscript received 8 July 2004 )

## Abstract

Expressions for critical temperature of Bose-Einstein condensation ( BEC ) in an external potential , which are different from published results in the literature , are presented. The results reveal the relation between the critical temperature of BEC gas and the external potential , and demonstrates proportionality of critical temperature in external potential to the value  $T_c^0$  at which the potential is absent. In addition , a criterion for the validity of potential is also presented , which is based on the comparison between the potential and the product  $kT_c^0$ . This comparison shows that only when the external potential is nearly equal to or larger than  $kT_c^0$  , the increase of critical temperature is significant. As the potential is much smaller than  $kT_c^0$  , the potential has no effects on the BEC gas.

**Keywords** : Bose-Einstein condensation , critical temperature , potential well

**PACC** : 0530J , 6500 , 7430E