

基于径向基函数神经网络的 Lorenz 混沌系统滑模控制

郭会军 刘君华

(西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

(2003 年 12 月 17 日收到, 2004 年 6 月 2 日收到修改稿)

针对受参数不确定和外扰影响的混沌 Lorenz 系统, 提出一种基于径向基函数(RBF)神经网络的滑模控制方法. 基于被控系统在不稳定平衡点处状态误差的可控规范形, 设计滑模切换面并将其作为神经网络的唯一输入. 单入单出形式的 RBF 控制器隐层只需 7 个径向基函数, 网络的权值则依滑模趋近条件在线确定. 仿真表明该控制器对系统参数突变和外部干扰具有鲁棒性, 同时抑制了抖振.

关键词: 混沌控制, 滑模, 径向基函数神经网络, Lorenz 系统

PACC: 0545

1. 引言

近年来, 混沌控制迅速成为非线性动力学领域的研究热点, 迄今已提出许多不同的方法^[1-11]. 在混沌系统分析与控制领域, Lorenz 系统是基准性的研究对象之一, 但是大多数控制方法都是在假设模型参数确定不变和没有外扰的情况下给出的, 即使考虑到外界扰动的影响, 通常也仅考虑满足匹配条件的扰动影响. 实际情况中参数可能是未知的或时变的, 还可能受到不满足匹配条件的外扰影响, 此时很多过于依赖模型的控制方法就会遇到困难^[9]. 因此, 寻找能够在参数不确定和扰动的情况下控制 Lorenz 系统的方法就显得尤为重要.

神经网络控制作为一种不依赖模型的控制方法, 在非线性控制研究领域得到了大量应用^[3, 5]. 但是多数与其有关的方法都需要对网络进行大数据量的离线训练, 训练时间长且收敛慢, 这类网络在自适应能力和鲁棒性方面常难以满足控制混沌的要求. 滑模控制技术, 对于满足匹配条件的模型参数扰动和外扰具有很强的鲁棒性, 因而被用于控制混沌. 但是常规滑模伴随的抖振会产生稳态误差, 限制其在混沌控制中的深入应用^[4, 11, 12].

本文借助于滑模控制理论与径向基函数(RBF)神经网络, 研究了对具有参数不确定和外扰的 Lorenz 系统混沌控制问题. 首先推导得到被控系统在其不稳定平衡点处状态误差的可控规范形, 然后根据滑模原理设计出基于 RBF 神经网络的控制器,

按照滑模趋近条件推导出网络权值的在线学习调整算法, 通过构造 Lyapunov 函数对控制算法的收敛性进行了证明. 最后通过仿真例子对该控制方法进行了验证.

2. 滑模 RBF 网络控制下的 Lorenz 系统

2.1. RBF 神经网络

RBF 神经网络是一种两层局部收敛的网络, 比起前向多层神经网络具有更快的收敛速度^[13, 14]. 第一层为非线性输入层, 输出为

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

第二层为线性输出层, 即

$$y_j = f(x) = \sum_{i=1}^n w_{ji} \phi_i(\mathbf{x}) = W_j^T \phi,$$
$$j = 1, 2, \dots, m,$$

其中 $\mathbf{x} \in R^n$ 为网络的输入向量, $y \in R^m$ 为网络的输出, $\phi = [\phi_1, \dots, \phi_n]^T$ 为隐层的输出向量, n 为隐层单元的个数, $W_j = [w_{j1}, \dots, w_{jn}]^T$ 为网络的权值向量, \mathbf{c}_i 和 σ_i 分别为第 i 个隐元的中心和宽度. 对 RBF 网络而言, 可供调节的参数有 W , \mathbf{c}_i 和 σ_i . 其中 W 常采用最小二乘类方法加以估计, 而对于隐元参数 \mathbf{c}_i 和 σ_i 则多采用梯度下降法加以学习优化.

2.2. Lorenz 系统的可控规范形

考虑受到干扰的受控 Lorenz 系统

$$\dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma x_2, \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1 x_3 + d + u, \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3, \quad (3)$$

式中 $|d| \leq \delta$ 表示系统受到的干扰, δ 是限制干扰大小的常数, u 为镇定混沌系统所外加控制输入. 可以证明, 在 Lorenz 系统不受干扰的情况下即 $d = 0$, 设常量 x_{1r} 表示状态变量 x_1 要达到的期望平衡点, 在 u 的作用下系统状态轨迹最终将稳定在点 $X_r = (x_{1r}, x_{2r}, x_{3r})^T$, $x_{2r} = x_{1r}$, $x_{3r} = x_{1r}^2/b$, 上标 T 表示转置^[9].

为了确定控制输入 u , 需要将系统的状态方程转换为推广后的可控规范形. 令 $u = u_1 + u_2$, $u_1 = x_1 x_3$, 根据 (1)(2) 和 (3) 式整理得到

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad (4)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3. \quad (5)$$

显然 (4) 式所表示的子系统能控. 引入如下的线性非奇异变换:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$P = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ \sigma & 1 \end{bmatrix},$$

即可导出其能控规范形为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha(r-1) & -(\sigma+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2. \quad (7)$$

已知 $X_r = (x_{1r}, x_{2r}, x_{3r})^T$ 表示变换前期望的不稳定平衡点, 由 (7) 式可知

$$\bar{x}_{1r} = x_{1r}/\sigma,$$

$$\bar{x}_{2r} = -x_{1r} + x_{2r} = 0.$$

令

$$e_1 = \bar{x}_{1r} - \bar{x}_1,$$

$$e_2 = \bar{x}_{2r} - \bar{x}_2 = -\bar{x}_2,$$

$$\bar{e} = x_{3r} - x_3(t),$$

则关于系统状态在不稳定的平衡点处误差的可控状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{\bar{x}}_{1r} - \dot{\bar{x}}_1 = -\dot{\bar{x}}_2 = e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\dot{\bar{x}}_2 = \alpha(r-1)e_1 - (\sigma+1)e_2 \\ &\quad - \alpha(r-1)\bar{x}_{1r} - d - u_2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}} &= -b\bar{e} + bx_{3r} - \sigma e_1 e_2 \\ &\quad + \sigma e_2 \bar{x}_{1r} - \sigma^2(\bar{x}_{1r} - e_1)^2 \\ &= -b\bar{e} - f(e_1, e_2), \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $f(e_1, e_2) = -b\bar{x}_{3r} + \sigma e_1 e_2 - \sigma e_2 \bar{x}_{1r} + \sigma^2(\bar{x}_{1r} - e_1)^2$. (8) 式表示关于状态误差的可控规范形, (9) 式表示系统内部动力学特性^[9].

2.3. RBF 滑模控制器

对于 (8) 式所表示的系统, 根据滑模变结构控制理论, 定义如下形式简单的滑模切换面^[12]:

$$s(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right) e_1(t) = \dot{e}_2(t) + \lambda e_1(t). \quad (10)$$

在本文中, 滑动变量 s 被定为 RBF 控制器的输入, 即根据滑模变量 s 求取相应的控制输入 u_2 . 这样, RBF 网络控制器的输出为

$$u_2 = \sum_{i=1}^n w_i \exp\left(-\frac{\|s - c_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right) = \hat{W}^T \phi, \quad (11)$$

式中 $\hat{W} = [w_1, \dots, w_n]^T$, 则总的控制量为

$$u = u_1 + u_2 = x_1 x_3 + \hat{W}^T \phi. \quad (12)$$

采用滑模控制时, 根据 Lyapunov 稳定性定理, 只有当满足滑模可达条件 $\dot{s} < 0$ 时, 在 u 的作用下被控系统状态才将收敛到原点^[12]. 本文采用 RBF 网络来逼近滑动变量 s 与 u_2 之间的关系, 必须在确保满足滑模可达条件这一前提下对网络的权值进行在线修正. 修正目的是寻找最优的权值以获得稳定的收敛特性, 修正方法采用梯度下降方式,

$$\dot{w}_i = -\gamma \frac{\partial s(t) \dot{s}(t)}{\partial w_i(t)}.$$

由 (10) 和 (8) 式可知

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{e}_2 + \lambda e_1 = \dot{e}_2 + \lambda e_2 \\ &= \lambda e_2 + \alpha(r-1)e_1 - (\sigma+1)e_2 \\ &\quad - \alpha(r-1)\bar{x}_{1r} - d - u_2. \end{aligned}$$

根据链式求导规则, 可得

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= -\gamma \frac{\partial s(t) \dot{s}(t)}{\partial w_i(t)} = -\gamma \frac{\partial s(t) \dot{s}(t)}{\partial u_2(t)} \frac{\partial u_2(t)}{\partial w_i(t)} \\ &= \gamma s(t) \frac{\partial u_2(t)}{\partial w_i(t)} = \gamma s(t) \exp\left(-\frac{\|s - c_i\|^2}{2\sigma_i^2}\right) \\ &= \gamma s(t) \phi_i(s), \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $\gamma > 0$ 表示学习速率.

2.4. 稳定性分析

由滑模控制理论和 (7) 式, 可定义如下的等效控制:

$$u_{\text{eq}} = \dot{\bar{x}}_2 - \alpha(r-1)\bar{x}_1 + (\sigma+1)\bar{x}_2 - d + \dot{s} + \lambda s. \quad (14)$$

同时由(7)式可得

$$\dot{\bar{x}}_2 = \alpha(r-1)\bar{x}_1 - (\sigma+1)\bar{x}_2 + d + u_2. \quad (15)$$

将(15)式中的 u_2 用 u_{eq} 替换, 可得 $\dot{s}(t) + \lambda s(t) = 0$. 已知参量 λ 为正, 可知 s 将逐渐收敛到零. 根据(10)式关于滑动曲面变量 s 的定义, 系统状态误差 (e_1, e_2) 也将收敛到零, \bar{e} 也将随之收敛, 系统状态最终稳定在 X_r .

但是 u_2 不可能以完全无误差的方式逼近 u_{eq} , 将(14)和(15)式相加并化简之后结果如下:

$$\dot{s}(t) = -\lambda s(t) + (u_{\text{eq}} - u_2). \quad (16)$$

文献[14]给出的一个引理是: 给定任意常数 ξ 和一个连续函数 $f: X \rightarrow R^n$, 存在一个权值矩阵 $W = W^*$, 使得具有 n 个隐元的 RBF 网络的输出满足

$$\max_{x \in X} \|\hat{f}(x, W^*) - f(x)\| \leq \xi,$$

其中 $\hat{f}(\cdot)$ 为 RBF 神经网络模型.

根据文献[14]的这一引理, 就本文所用的神经网络控制器而言, 必定存在这样一组最优权值 \bar{W} , 使得 u_2 和 u_{eq} 之间的误差小于 ξ , 即

$$\max | \bar{u}(x, \bar{W}) - u_{\text{eq}}(x) | < \xi,$$

其中 $\bar{u}(x, \bar{W}) = \sum_{k=1}^n \bar{w}_k \phi_k = \bar{W}^T \phi$, ξ 为一任意小的正数, 则 $u_{\text{eq}}(x) = \bar{W}^T \phi + \xi$.

定义 $\tilde{W} = \bar{W} - \hat{W}$ 为当前权值和最优权值之间的差异, 则(16)式可重写成

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= -\lambda s(t) + \bar{W}^T \phi + \xi - \hat{W}^T \phi \\ &= -\lambda s(t) + (\tilde{W}^T \phi + \xi). \end{aligned} \quad (17)$$

定义 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{W}^T \tilde{W}. \quad (18)$$

V 关于时间的一阶导数为

$$\dot{V} = s\dot{s} + \frac{1}{\gamma} \tilde{W}^T \dot{\tilde{W}}. \quad (19)$$

根据(13)式, 可得

$$\tilde{W} \dot{\tilde{W}} - \dot{\tilde{W}} = -\dot{\tilde{W}} = \gamma s \phi. \quad (20)$$

将(17)(20)式代入(19)式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s(-\lambda s + \tilde{W}^T \phi + \xi) + \frac{1}{\gamma} \tilde{W}^T (-\gamma s \phi) \\ &= -\lambda s^2 + s\xi \\ &\leq |s|(-\lambda |s| + \xi). \end{aligned} \quad (21)$$

显然, 如果 $|s| \geq \xi/\lambda$, 则 $\dot{V} \leq 0$. 这样就证明状态空

间中的任意点必将向切换线 $s=0$ 靠近(和无限地靠近)的趋势, 同时满足了广义滑模存在性及可达性条件. 滑模变量 s 将收敛到曲线 $s=0$ 附近 $\pm \xi/\lambda$ 的范围内, 并且当 RBF 网络逼近精度进一步提高时, 系统输出误差也将随之下降. 进一步, 在 $s=0$ 的邻域内, V 正定, \dot{V} 负半定. 根据 Lyapunov 稳定性定理, 可知闭环系统是稳定的. 此时状态误差 e_1 和 e_2 均为有界收敛, 就必然可找到一个函数 $h(t)$, 使其满足 $|f(e_1, e_2)| \leq h(t)$, 进而可推出 \bar{e} 也必有界.

3. 仿真分析

仿真时, Lorenz 系统参数取值 $(\sigma, b, r) = (10, 8/3, 28)$, 初始状态 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (1, 0, -1)$, 取不稳定的平衡点 X_e 为目标点 X_r ,

$$\begin{aligned} X_r &= (x_{1r}, x_{2r}, x_{3r})^T = X_e \\ &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)^T \\ &= (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)^T. \end{aligned}$$

RBF 网络的权值学习速率参数 $\gamma = 2$, 隐层神经元个数为 7, 中心值分别为 $\{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, 宽度值固定为 0.7, 滑动切换面参数 λ 取为 0.3. 这样(12)式和(1)(2)(3)式构成 Lorenz 系统闭环控制的仿真模型. 仿真过程中, $0 \leq t < 5$ s 使系统处于混沌运动状态, $t = 5$ s 时加入控制.

3.1. 稳定到不动点

期望将系统状态轨迹稳定在目标点 X_r , 整个过程中不考虑干扰影响. 图 1(a)为 $t = 5$ s 加入滑模控制器后各个状态的变化情况, 可见混沌现象迅速消失. 随着 x_1, x_2 稳定到 x_{1r} , 系统内部状态变量 x_3 也迅速收敛到 x_{3r} , 滑模切换面和控制输出分别如图 1(b)和(c)所示.

3.2. 抗干扰能力

首先考虑系统受到匹配干扰影响, $d = 0.5 \times \cos(5\pi t)$. 匹配噪声干扰下的闭环系统响应如图 2(a)(b)和(c)所示, 可见在外加控制输入的作用下, 系统准确锁定在 X_r . 其次考虑系统受到不匹配干扰影响, 即干扰分别作用在第一个和第三个状态方程上, 分别用 $d_1 = 0.5 \cos(5\pi t)$ 和 $d_3 = 0.5 \cos(5\pi t)$ 表示. 不匹配干扰作用下闭环系统的响应如图 3 和图 4

所示,可见在外加控制输入的作用下系统仍准确镇定在 X_r .图 3(b)显示,当 d_1 作用时切换面 s 出现了轻微的波动,但是仍然被吸引在 $s = 0$ 上.图 3(c)则显示,控制输入也出现小幅波动.而当 d_3 作用时,镇

定系统所需的控制输入亦出现小幅波动,如图 4(c)所示.从图 2、图 3 和图 4 可以看出,困扰滑模技术应用的抖振现象得到抑制,这得益于控制输入的连续性.

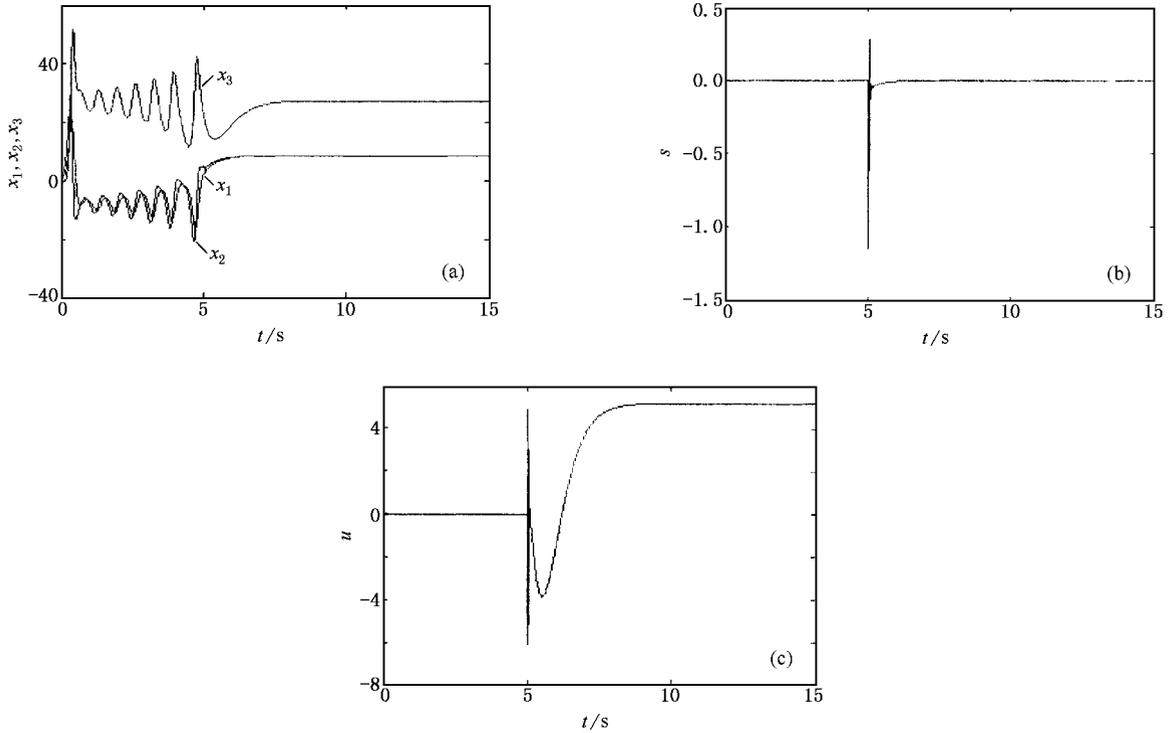


图 1 稳定到目标点 (a) 状态响应 (b) 滑模切换面 (c) 滑模控制输出

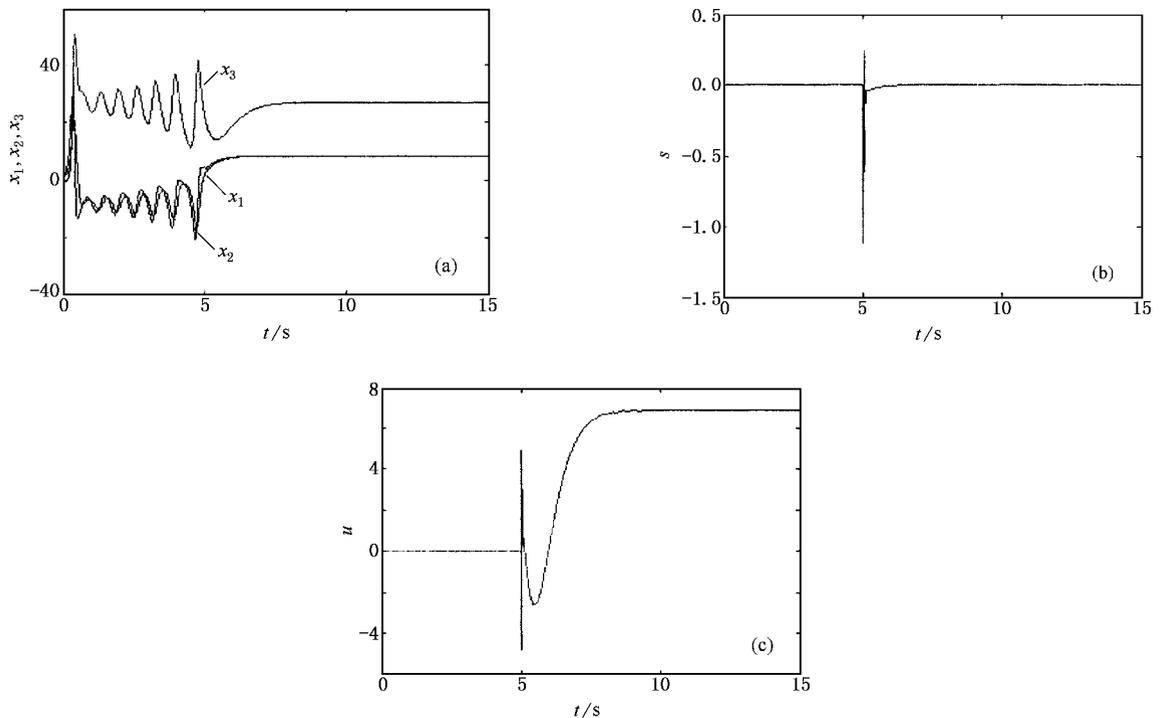


图 2 匹配干扰 (a) 状态响应 (b) 滑模切换面 (c) 滑模控制输出

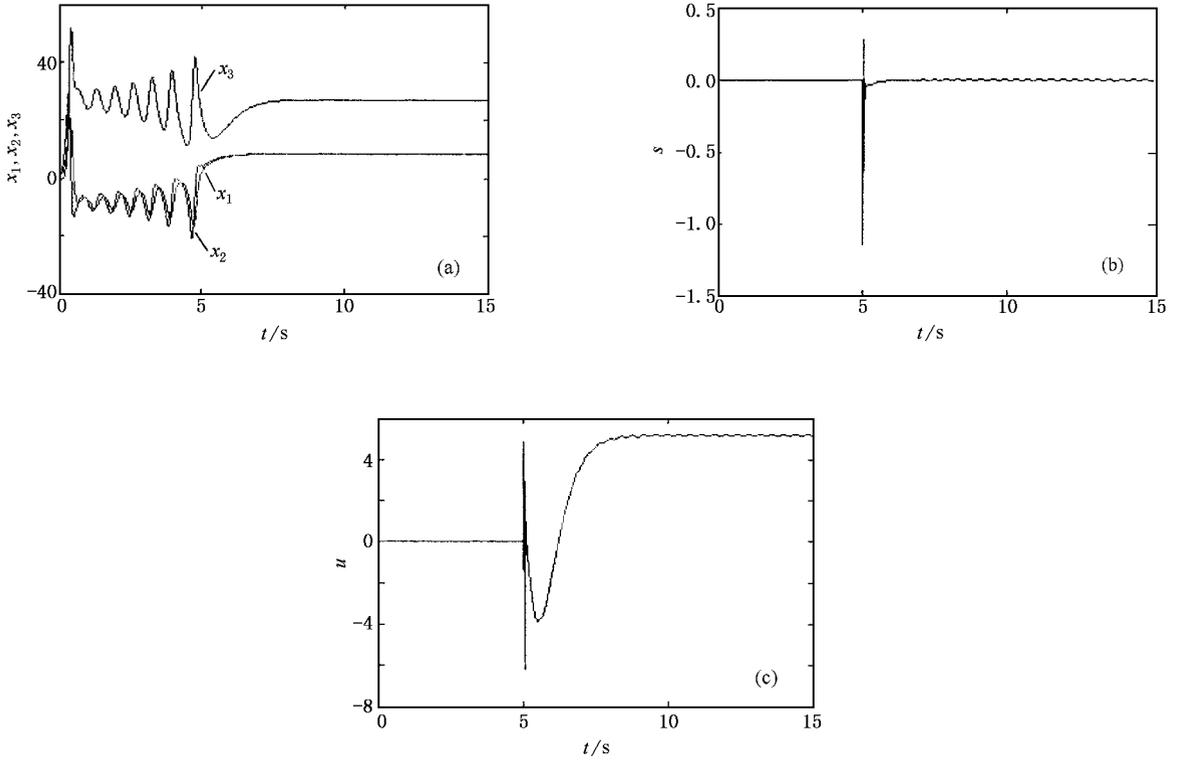


图 3 不匹配干扰 d_1 (a) 状态响应 (b) 滑模切换面 (c) 滑模控制输出

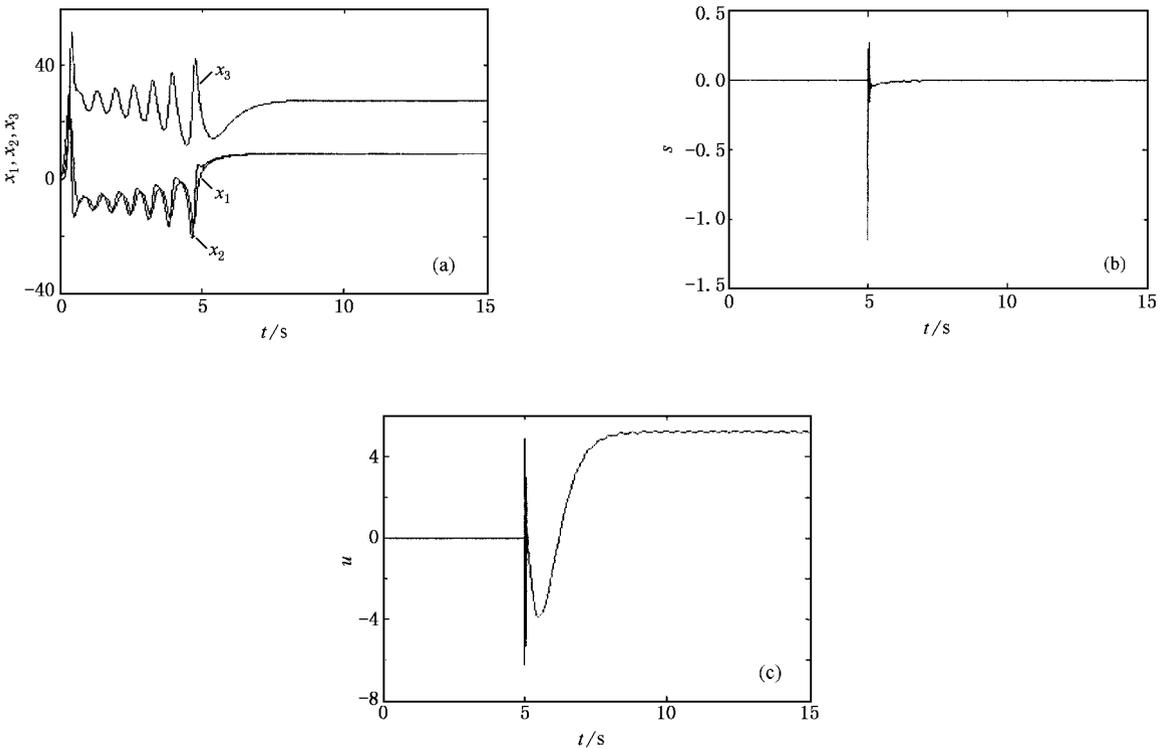


图 4 不匹配干扰 d_3 (a) 状态响应 (b) 滑模切换面 (c) 滑模控制输出

3.3. 参数扰动

从 $t = 5\text{ s}$ 开始施加控制, $t = 12\text{ s}$ 时将系统参数突然改为 $(\sigma_2, b_2, r_2) = (15, 12/3, 35)$ 稳定的目标点始终为 X_r , 不考虑干扰的影响. 图 5(a) 表明从 $t = 5\text{ s}$ 之后混沌特性消失, 系统状态首先被调节到 X_r , 然后随着 $t = 12\text{ s}$ 时的系统参数突变, 重新稳定到 $(x_{1r}, x_{2r}, x_{3r}')$. 经历参数的突变引起的瞬态过

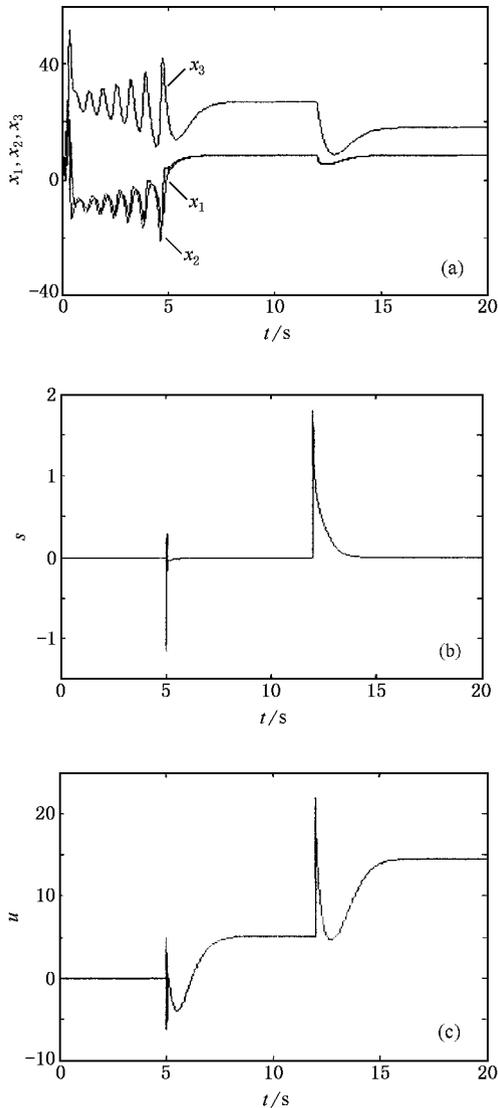


图5 参数突变 (a) 状态响应 (b) 滑模切换面 (c) 滑模控制输出

程, 系统很快稳定在新的目标点. 同时可以看出, 尽管状态 x_1 和 x_2 仍然稳定在 x_{1r} , 但是 x_3 因其与参数 b 相关, 故稳定在 $x_{3r}' = x_{1r}^2/b_2 = 18.1$. 滑模切换面如图 5(b) 所示, $t = 12\text{ s}$ 时的参数突变引起切换面 s 显著的变化, 但是很快就趋于稳定. 与上述过程所对应的控制输入如图 5(c) 所示, 可见控制输入是连续的. 同时可以发现, 在整个控制过程中由于控制作用是连续的, 所以没有发生抖振现象.

3.4. 分析与讨论

仿真结果表明控制器能将混沌系统准确镇定, 并具有较强的抗干扰能力. 图 5 的结果还表明在系统参数发生摄动时, 本文方法仍然能够将系统加以镇定, 只是系统稳态值发生了变化. 系统参数发生摄动意味着系统模型的改变, 常规的基于系统精确数学模型的控制方法, 往往不能继续对系统加以镇定. 该 RBF 控制器的突出特点是对被控对象模型的依赖程度低, 而且自身构造简单, 隐层仅含 7 个径向基单元. 整个网络需要调节的权值也仅为 7 个, 控制器的参数 (即权值) 采用在线训练方式加以确定, 而不需要预先通过离线方式学习. 从仿真结果也可看出, 镇定系统所需的控制量相对而言比较大, 可能会超出实际物理系统的限制. 所以, 实际应用时应根据具体场合定义合适的滑模切换面函数, 以确保控制器输出不超出系统允许范围.

4. 结 论

研究了混沌 Lorenz 系统的镇定问题. 通过整合自适应控制、神经网络和滑模控制技术, 设计出基于 RBF 神经网络的自适应滑模控制器. 控制器的权值则按照滑模控制可达性条件要求在线学习和修正. 仿真结果证明控制器在有参数扰动和外界干扰的情况下, 仍能准确镇定混沌 Lorenz 系统. 尽管本文是针对 Lorenz 系统提出的, 但是其思路也可推广到其他连续混沌系统中去.

- [1] Chen G, Dong X 1993 *Int. J. Bifur. Chaos*. **3** 1363
 [2] Tao C H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 281 (in Chinese) [陶朝海、陆君安 2003 物理学报 **52** 281]
 [3] Tan W, Wang Y N 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 795 (in Chinese) [谭

- 文、王耀南 2003 物理学报 **52** 795]
 [4] Liu F C, Wang J, Shi M *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2707 (in Chinese) [刘福才、王娟、石森等 2002 物理学报 **51** 2707]
 [5] Liu D, Kong Z Q, Ren H P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in

- Chinese)[刘 丁、孔志强、任海鹏 2003 物理学报 **52** 531]
- [6] Yin X H , Ren Y , Shan X M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1949 (in Chinese) [尹逊和、任 勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1949]
- [7] Guan X P , Peng H P , Li L X *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 (in Chinese) [关新平、彭海朋、立丽香等 2001 物理学报 **50** 26]
- [8] Yu J Z , Shu N , Vincent T L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 397 (in Chinese) [余建祖、苏 楠、Vincent T L 1998 物理学报 **47** 397]
- [9] Yang S K , Chen S L , Yau H T 2002 *Chaos , Solitons and Fractals* **13** 767
- [10] Tian Y C , Tade M O , Levy D 2002 *Phys. Lett. A* **296** 87
- [11] Konishi K , Hirai M , Kokame H 1998 *Phys. Lett. A* **245** 511
- [12] Gao W B 1998 *Theory of Variable Structure Control Systems and Its Designing* (Beijing : Science Press) (in Chinese) [高为炳 1998 变结构控制的理论及设计方法 (北京 科学出版社)]
- [13] Powell M J D 1992 *Advances in Numerical Analysis* (Oxford : Oxford University Press)
- [14] Park J , Sandberg J W 1990 *Neural Comput.* **2** 246

Chaos control of Lorenz system via RBF neural network sliding mode controller

Guo Hui-Jun Liu Jun-Hua

(School of Electrical Engineering , Xi'an Jiaotong University , Xi'an 710049 , China)

(Received 17 December 2003 ; revised manuscript received 2 June 2004)

Abstract

A novel adaptive radial basis function (RBF) neural network sliding mode strategy is developed to control Lorenz chaos with parametric uncertainties and external disturbances. Based on the controllable canonical form of system state error at its unstable equilibrium , a sliding surface is defined as the only input to the RBF controller. Only seven RBFs are required for the controller and their weights are trained on-line based on the sliding surface approaching condition. The simulation results show that this method is feasible and effective , and the robustness to parametric uncertainties and external disturbance is provided.

Keywords : chaos control , sliding mode , RBF neural network , Lorenz system

PACC : 0545