第 53 卷 第 2 期 2004 年 2 月
1000-3290/2004/53(02)/0337-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.2, February, 2004

圆柱体相对转动动力学方程的积分解*

董全林[1)2)†] 王 坤[2)] 张春熹[1)] 刘 彬[2)]

[1)](北京航空航天大学光电技术研究所,北京 100083)

[2)](燕山大学仪器科学与工程系,秦皇岛 066004)

(2003 年 3 月 7 日收到;2003 年 4 月 28 日收到修改稿)

针对圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学方程,运用解耦方法获得方程的解析解,由于方程的特殊性,利用 Jordan 标准形求得可逆矩阵.从而得到了圆柱体相对转动动力学方程的积分形式的解.根据工程应用,给出了冲击性和周期性两类典型载荷作用下的解析解.

关键词:相对转动,相似模拟,动力学方程,解析解

PACC:0340D,0313,0316

1. 引 言

在研究转动运动和转动力学过程中.1979 年,Bengtsson 和 Frauendorf[1] 通过对 14 种核子自旋转速的测量,发现各核子的自旋转速均有一最大值,且各不相同.1985 年,Carmeli[2,3] 提出了转动相对论力学理论,1996 年罗绍凯建立了转动相对论分析力学理论[4,5].近年来相对论分析力学[6—8] 和转动相对论分析力学[4,5,9—11] 的研究发展了相对论力学.人们还研究了转动的非线性、变质量、Birkhoff 系统动力学及代数与几何结构等[12—24].文献[25]基于相对性原理,建立了圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学方程

$$\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_1+\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_2+C\dot{\theta}_1-C\dot{\theta}_2+K\theta_1-K\theta_2=T_1,$$
$$\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_1+\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_2-C\dot{\theta}_1+C\dot{\theta}_2-K\theta_1+K\theta_2=T_2, \tag{1}$$

其中 J 为圆柱体任意两个横截面间的转动惯量,C 为阻尼系数,K 为扭转刚度,θ_1 和 θ_2 分别为两个横截面的转角,T_1 和 T_2 分别是两个横截面处的外加力矩.

这是工程中描述转动动力传输性态的基本方程,是相似工程学、转动能量信息测试与获取、仪器标定等的理论基础.考虑弹性和阻尼[26] 的圆柱体是机械传动中一类最广泛的组成零件和力学抽象.圆柱体一般通过两个端面建立与其他零件的联接关系,其力学、位移条件也是通过两个端面给定和需要测出的.建立圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学方程便得到了圆柱体相对转动的基本方程,它为进一步确定转动系统的动力学方程奠定基础.得到它的解析解是非常重要的.本文运用解耦方法给出一般的积分形式的解析解,并针对实际工程中的冲击性和周期性两类典型载荷给出了具体解析解.

2. 圆柱体相对转动动力学方程组变换

将方程组(1)写成矩阵形式

$$M\ddot{\theta}+C\dot{\theta}+K\theta=T, \tag{2}$$

其中

$$\theta=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}J,$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}C, K=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}K,$$

$$T=\begin{pmatrix}T_1\\ T_2\end{pmatrix}.$$

增加 $M\dot{\theta}-M\dot{\theta}=0$ 恒等式,将方程(2)降阶改写为

$$\hat{M}\dot{X}+\hat{K}X=\hat{T}, \tag{3}$$

---

* 河北省科技攻关项目(批准号:02212106D)、河北省自然科学基金(批准号:603334)和河北省教育厅自然科学研究基金(批准号:2003115)资助的课题.

† E-mail:dongquanlin@88mail.ysu.edu.cn

其中

$$X = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix}, \hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}, \hat{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$$

为分块矩阵.通过求 $\hat{M}$ 的逆矩阵,将方程(3)化成标准的一阶线性微分方程组.令

$$A = -\hat{M}^{-1}\hat{K} = -\begin{pmatrix} M^{-1}C & M^{-1}K \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$A = -\begin{pmatrix} \frac{6C}{J} & -\frac{6C}{J} & \frac{6K}{J} & -\frac{6K}{J} \\ -\frac{6C}{J} & \frac{6C}{J} & -\frac{6K}{J} & \frac{6K}{J} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

再令

$$F(t) = \hat{M}^{-1}\hat{T}(t) = \begin{pmatrix} M^{-1}T \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{J}\begin{pmatrix} 2T_1 - T_2 \\ -T_1 + 2T_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

经整理得

$$\dot{X} = AX + F(t). \tag{6}$$

设方程(6)的初始条件为

$$X(t_0) = (\dot{\theta}_1(t_0)\ \dot{\theta}_2(t_0)\ \theta_1(t_0)\ \theta_2(t_0))' = \eta, \tag{7}$$

则得

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + F(t), \\ X(t_0) &= \eta. \end{aligned} \tag{8}$$

3. 圆柱体相对转动动力学方程组解耦变换

求 A 的特征值与特征向量.A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\frac{6C}{J} + \left(\frac{6}{J}\sqrt{\frac{KJ}{3} - C^2}\right)i,$$

$$\lambda_4 = -\frac{6C}{J} - \left(\frac{6}{J}\sqrt{\frac{KJ}{3} - C^2}\right)i, \tag{9}$$

解得属于 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的特征向量为 α_1,属于 λ_3,λ_4 的特征向量为 α_3,α_4,

$$\alpha_1 = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 1)', \alpha_3 = (-\lambda_3\ \ \lambda_3\ \ -1\ \ 1)'$$

$$\alpha_4 = (-\lambda_4\ \ \lambda_4\ \ -1\ \ 1)'. \tag{10}$$

由于矩阵 A 只有三个线性无关的特征向量,所以矩阵 A 不相似于对角矩阵.采用 Jordan 块对角化.对于 A 存在可逆矩阵 P 使

$$P^{-1}AP = \hat{J}. \tag{11}$$

计算得 A 的 Jordan 标准形为

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

可逆矩阵 P 为

$$P = (\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

运用矩阵初等变换求得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & -\frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & -\frac{\lambda_4}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_4}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ -\frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_3}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & -\frac{\lambda_3}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

由

$$\mathrm{e}^{\hat{J}t} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_4 t} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

得

$$e^{At} = P\left(e^{\hat{J}t}\right)P^{-1},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{-\lambda_3 e^{\lambda_3 t} + \lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{1}{2} + \frac{\lambda_3 e^{\lambda_3 t} - \lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_3\lambda_4\left(e^{\lambda_3 t} - e^{\lambda_4 t}\right)}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_3\lambda_4\left(-e^{\lambda_3 t} + e^{\lambda_4 t}\right)}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ \frac{1}{2} + \frac{\lambda_3 e^{\lambda_3 t} - \lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{1}{2} + \frac{-\lambda_3 e^{\lambda_3 t} + \lambda_4 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_3\lambda_4\left(-e^{\lambda_3 t} + e^{\lambda_4 t}\right)}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_3\lambda_4\left(e^{\lambda_3 t} - e^{\lambda_4 t}\right)}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ \frac{t}{2} + \frac{-e^{\lambda_3 t} + e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{t}{2} + \frac{e^{\lambda_3 t} - e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_4 e^{\lambda_3 t} - \lambda_3 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{-\lambda_4 e^{\lambda_3 t} + \lambda_3 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ \frac{t}{2} + \frac{e^{\lambda_3 t} - e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{t}{2} + \frac{-e^{\lambda_3 t} + e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{-\lambda_4 e^{\lambda_3 t} + \lambda_3 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_4 e^{\lambda_3 t} - \lambda_3 e^{\lambda_4 t}}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

注意到 λ_3 与 λ_4 为共轭复数，则 $e^{\lambda_3 t}$ 与 $e^{\lambda_4 t}$ 也为共轭复数，将(9)式代入(16)式，得到方程组(1)矩阵形式解的积分表达式

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}\eta + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}F(s)\,ds, \tag{17}$$

经整理得分列的转角的积分表达式

$$\begin{aligned} \theta_1(t) = & \frac{1}{2}(t-t_0)[\dot\theta_1(t_0)+\dot\theta_2(t_0)] + \frac{1}{2a}[\dot\theta_1(t_0)-\dot\theta_2(t_0)]e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\sin a(t-t_0) \\ & + \frac{1}{2a}[\theta_1(t_0)-\theta_2(t_0)]\left[a\cos a(t-t_0)+\frac{6C}{J}\sin a(t-t_0)\right]e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)} \\ & + \frac{1}{Ja}\int_{t_0}^{t}\{a(t-s)[T_1(s)+T_2(s)] - 3[T_2(s)-T_1(s)]e^{-\frac{6C}{J}(t-s)}\sin a(t-s)\}ds, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) = & \frac{1}{2}(t-t_0)[\dot\theta_1(t_0)+\dot\theta_2(t_0)] - \frac{1}{2a}[\dot\theta_1(t_0)-\dot\theta_2(t_0)]e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\sin a(t-t_0) \\ & - \frac{1}{2a}[\theta_1(t_0)-\theta_2(t_0)]\left[a\cos a(t-t_0)+\frac{6C}{J}\sin a(t-t_0)\right]e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)} \\ & + \frac{1}{Ja}\int_{t_0}^{t}\{a(t-s)[T_1(s)+T_2(s)] + 3[T_2(s)-T_1(s)]e^{-\frac{6C}{J}(t-s)}\sin a(t-s)\}ds. \end{aligned} \tag{19}$$

在工程中最关心转角的变化，故(19)式减(18)式得

$$\begin{aligned} \theta_2(t)-\theta_1(t) = & -\frac{1}{a}[\dot\theta_1(t_0)-\dot\theta_2(t_0)]e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\sin a(t-t_0) \\ & - \frac{1}{a}[\theta_1(t_0)-\theta_2(t_0)]\left[a\cos a(t-t_0)+\frac{6C}{J}\sin a(t-t_0)\right]e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)} \\ & + \frac{6}{Ja}\int_{t_0}^{t}\{[T_2(s)-T_1(s)]e^{-\frac{6C}{J}(t-s)}\sin a(t-s)\}ds, \end{aligned} \tag{20}$$

其中，右边第一项是由于存在初始角速度引起的相对角位移，它的大小随着时间的增加而振荡着减小至无穷小. 右边第二项是由于存在初始角位移引起的相对角位移，它的大小也随着时间的增加而振荡着减小至无穷小. 右边第三项是由于存在强迫扭矩作用引起的相对角位移，它的性质与强迫扭矩的性质有关，是无初始扰动的积分形式解析解，由于是积分项，还需根据强迫扭矩的不同特点进一步分析.

若初始角速度和初始转角均为零，即 $\dot\theta_1(t_0) = \dot\theta_2(t_0) = 0$ 和 $\theta_1(t_0) = \theta_2(t_0) = 0$，则

$$\theta_2(t)-\theta_1(t) = \frac{6}{Ja}\int_{t_0}^{t}\left\{[T_2(s)-T_1(s)]e^{-\frac{6C}{J}(t-s)}\sin a(t-s)\right\}ds. \tag{21}$$

(23)式就是在初始条件为零条件下的相对转角的积分解. 也是在能量传递信息提取中用到的方程.

4. 两类典型工程载荷的解析解

在工程中，设备的启动、制动、停机以及运转中

的不稳定都可能造成设备的损坏和性能的降低.而方程(1)的建立正是解决运转过渡过程的理论基础.这类过程都可以抽象为突变载荷和周期载荷.对于这两类载荷我们给出具体解析解.

4.1. 突变工程载荷的解析解

4.1.1. 阶跃工程载荷的解析解

阶跃载荷为

$$T = T_2(t) - T_1(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0, \\ A & t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{22}$$

令

$$b = -\frac{6C}{J}, a = \frac{6}{J}\sqrt{\frac{KJ}{3} - C^2},$$

将(22)式及 b 值带入(21)式后得

$$\begin{aligned}\theta_2(t) - \theta_1(t) &= \frac{6A}{Ja}\left\{\frac{a}{a^2+b^2}\left[1 - e^{b(t-t_0)}\cos a(t-t_0)\right]\right.\\ &\quad \left. + \frac{b}{a^2+b^2}e^{b(t-t_0)}\sin a(t-t_0)\right\}\\ &= \frac{A}{2K}\left[1 - e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\cos a(t-t_0)\right]\\ &\quad - \frac{3AC}{JaK}e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\sin a(t-t_0). \end{aligned} \tag{23}$$

式中 a 为圆柱体两截面相对转角振动的角频率,b 为衰减振动时间常数.由于指数为负值,固右端第二项趋于零.右端第一项趋于固定值

$$\theta_2(t) - \theta_1(t) = \frac{A}{2K}. \tag{24}$$

这就是弹性圆柱体在阶跃扭矩扰动作用下,相对转角响应的极限值.并以衰减振动方式趋近固定值,这是响应的特殊之处.是设备启动、制动、停机的描述.加大阻尼 C 和增大 a 有利于降低不平稳性.

4.1.2. 矩形脉冲工程载荷的解析解

矩形脉冲载荷为

$$T = T_2(t) - T_1(t) = \begin{cases} A & t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} \tag{25}$$

其中 $t_0 < t_1$.实际上(25)式是两个阶跃函数(22)的叠加,即

$$T = T_3 + T_4, \tag{26}$$

其中

$$T_3 = \begin{cases} 0 & t < t_0, \\ A & t \geqslant t_0, \end{cases}$$

$$T_4 = \begin{cases} 0 & t < t_1, \\ -A & t \geqslant t_1. \end{cases}$$

将(26)式代入(21)式得

$$\theta_2(t) - \theta_1(t) = \begin{cases} \frac{A}{2K}\left[1 - e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\cos a(t-t_0)\right] - \frac{3AC}{JaK}e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\sin a(t-t_0) & t_0 \leqslant t < t_1, \\ \left\{\frac{A}{2K}\left[1 - e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\cos a(t-t_0)\right] - \frac{3AC}{JaK}e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\sin a(t-t_0)\right\} & \\ -\left\{\frac{A}{2K}\left[1 - e^{-\frac{6C}{J}(t-t_1)}\cos a(t-t_1)\right] - \frac{3AC}{JaK}e^{-\frac{6C}{J}(t-t_1)}\sin a(t-t_1)\right\} & t \geqslant t_1. \end{cases} \tag{27}$$

这种情况与上节情况相当,是弹性圆柱体在不连续载荷和偶然载荷作用下的相对转角响应.响应以衰减振动方式趋近某固定值

$$\begin{aligned}&\frac{A}{2K}\left[1 - e^{-\frac{6C}{J}(t_1-t_0)}\cos a(t_1-t_0)\right]\\ &- \frac{3AC}{JaK}e^{-\frac{6C}{J}(t_1-t_0)}\sin a(t_1-t_0). \end{aligned} \tag{28}$$

然后再以衰减振动方式趋近零,是设备在不连续载荷作用下运行和出现故障的描述.同样加大阻尼 C 和增大 a 有利于降低不平稳性.

4.2. 周期工程载荷的解析解

由于傅里叶变换对于函数展开的普遍性,这里选用余弦周期载荷

$$T = T_2(s) - T_1(s) = A\cos\omega t. \tag{29}$$

将(29)式代入(21)式,整理得

$$\theta_2(t) - \theta_1(t) = -\frac{18AC}{J^2a}e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\left\{\frac{1}{(\omega+a)^2 + \left(\frac{6C}{J}\right)^2}\sin\left[at - (\omega+a)t_0\right]\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{(\omega-a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}\sin[at+(\omega-a)t_1]\Big\}\\
&+\frac{3A}{Ja}e^{-\frac{6C}{J}(t-t_0)}\Big\{\frac{\omega+a}{(\omega+a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}\cos[at-(\omega+a)t_0]\\
&+\frac{\omega-a}{(\omega-a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}\cos[at+(\omega-a)t_0]\Big\}\\
&+\frac{18AC}{J^2a}\left[-\frac{1}{(\omega+a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}+\frac{1}{(\omega-a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}\right]\sin(\omega t)\\
&-\frac{3A}{Ja}\left[\frac{\omega+a}{(\omega+a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}+\frac{\omega-a}{(\omega-a)^2+\left(\frac{6C}{J}\right)^2}\right]\cos(\omega t),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

上式第一项和第二项随着时间增加逐渐振荡消逝.第三项和第四项是永久振动项,振动频率与激振频率相同.这两项相位相差 90°.对于小阻尼情况,当激振频率 ω 与结构频率 a 相同时正弦永久振动项的系数急剧增大,出现共振现象.共振频率为

$$
\omega=a=6\sqrt{\frac{K}{3J}-\frac{C^2}{J^2}}\approx 2\sqrt{\frac{3K}{J}}. \tag{31}
$$

这种情况是弹性圆柱体在任意载荷(傅里叶分解的单一频率分量)作用下的相对转角响应.是设备在任意载荷作用下运行的基本描述.按照(31)式优化结构参数,避免在工作频率范围内共振是我们要着重考虑的问题.

5. 结　论

本文针对建立的圆柱体相对转动动力学方程组,进行了求解,得到了积分形式的解析解.在应用中可以根据施加在圆柱体上的扭矩的类型和特点的不同,解得相应的具体的解析解,来为工程设计、信息获取、仪器标定等服务.本文针对实际工程中的冲击性和周期性两类典型载荷给出了具体解析解及其分析.

[1] Bengtsson R, Frauendorf S 1979 *Nuclear Physics* A**327** 139

[2] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 175

[3] Carmeli M 1986 *International Journal of Theoretical Physics* **15** 89

[4] Luo S K 1996 *Journal of Beijing Institute of Technology* **16**(S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]

[5] Luo S K 1998 *Applied Mathematics and Mechanics* **19** 45

[6] Luo S K 1987 *Tech. Mater. Commun.* **5** 31(in Chinese) [罗绍凯 1987 教材通讯 **5** 31]

[7] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12** 67 (in Chinese) [罗绍凯 1991 上海力学 **12** 67]

[8] Luo S K 1996 *Applied Mathematics and Mechanics* **17** 683

[9] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1043(in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1043]

[10] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712(in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[11] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416(in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]

[12] Luo S K, Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383(in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]

[13] Luo S K, Guo Y X, Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049(in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]

[14] Luo S K, Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]

[15] Luo S K, Chen X W and Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[16] Zhang Y L, Qiao Y F, Ma Y P 1999 *Acta Mechanica Solida Sinica* **20** 356(in Chinese) [张耀良、乔永芬、马云鹏 1999 固体力学学报 **20** 356]

[17] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]

[18] Fu J L, Chen X W and Luo S K 1999 *Applied Mathematics and Mechanics* **20** 1175(in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1999 应用数学和力学 **20** 1175]

[19] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390(in Chinese) [方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]

[20] Qiao Y F, Li R J and Meng J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1000 (in Chinese) [乔永芬、李仁杰、孟 军 2001 物理学报 **50** 1000]

[21] Fu J L, Chen L Q, Xue Y and Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭、罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683]

[22] Fu J L, Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民 2002 物理学报 **49** 1023]

[23] Fu J L, Chen L Q, Luo S K, Chen X W and Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]

[24] Fu J L, Chen L Q and Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]

[25] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]

[26] Ge T S (T. S. Ke) 1999 *Physica* **28** 529 (in Chinese) [葛庭燧 1999 物理 **28** 529]

An integral solution for the relative-rotation dynamic equation of a cylinder*

Dong Quan-Lin[1)2)]† Wang Kun[2)] Zhang Chun-Xi[1)] Liu Bin[2)]

[1)] (*Institute of Opto-electronics Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083, *China*)

[2)] (*Department of Instrument Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 7 March 2003; revised manuscript received 28 April 2003)

Abstract

For the relative rotation dynamic equation of the cylinder between random twain cross sections, we gain an analytic solution for the equation by using the coupling method. Due to the particularity of the equation, we gain an invertible matrix by utilizing the Jordan canonical. Thereby, we obtain an integral solution for the relative rotation dynamic equation of the cylinder. According to the reguirements in engineering applications, we give some analytic solutions of two types of load action, i.e. the impact and periodic types.

Keywords: relatively rotation, similarity analog, dynamics equation, analytic solution

PACC: 0340D, 0313, 0316

* Project supported by the Technological Tackle Key Problems of Hebei Province, China (Grant No. 02212106D), by the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. 603334) and by the Natural Science Research Foundation of Hebei Province Education Office, China (Grant No. 2003115).

† E-mail: dongquanlin@88mail.ysu.edu.cn