第 53 卷 第 3 期 2004 年 3 月
1000-3290/2004/53(03)/0666-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.3,March,2004
©2004 Chin. Phys. Soc.

非完整力学系统的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量*

罗绍凯[1)2)] 梅凤翔[3)]

1)(浙江工程学院数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)

2)(长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

3)(北京理工大学理学院,北京 100081)

(2003 年 9 月 26 日收到;2003 年 10 月 30 日收到修改稿)

研究非完整力学系统的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量. 在时间不变的特殊 Lie 对称变换下,给出非完整力学系统的 Lie 对称性确定方程、约束限制方程和附加限制方程,得到相应完整系统的 Hojman 守恒量以及非完整系统的弱 Hojman 守恒量和强 Hojman 守恒量. 给出一个例子说明本文结果的应用.

关键词:分析力学,非完整系统,Lie 对称性,非 Noether 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

力学系统守恒量的研究具有重要的理论意义和实际意义. 历史上寻找守恒量的方法主要有[1]:牛顿力学的传统方法、分析力学的传统方法和近代的对称性方法. 牛顿力学的传统方法仅能找到动量守恒、动量矩守恒和机械能守恒. 分析力学的传统方法也仅能找到极少数的守恒量,如广义动量守恒、广义能量守恒等. 近代出现的利用对称性寻求守恒量的方法主要有:Noether 对称性[2—5]、Lie 对称性[4—6]和形式不变性[7—9]. Noether 对称性是利用系统的 Hamilton 作用量泛函在无限小变换下的不变性寻找系统的守恒量,被称为 Noether 守恒量. Lie 对称性是利用系统的运动微分方程在无限小变换下的不变性寻找系统的守恒量. 形式不变性是利用系统的动力学函数在无限小变换下使得动力学方程的形式保持不变,来寻找系统的守恒量. 这三种对称性在满足 Noether 等式或 Killing 方程的条件下都可以导致 Noether 守恒量.

1992 年,Hojman 既不用 Lagrange 函数,也不用 Hamilton 函数,从微分方程出发,直接由时间不变的特殊 Lie 对称变换导出了一类新的守恒量[10],被称为 Hojman 守恒量. Pillay 和 Leach 证明了 Hojman 守恒量是非 Noether 守恒量[11]. 近年来,这类新型守恒量的研究引起人们的重视. 文献[12—22]分别给出几类不同动力学系统的非 Noether 守恒量. 但是,关于非 Noether 守恒量的研究均局限于完整力学系统.

本文研究非完整力学系统的 Hojman 守恒量. 在时间不变的特殊 Lie 对称性变换下,定义相应完整系统的特殊 Lie 对称性以及非完整系统的特殊弱 Lie 对称性和特殊强 Lie 对称性,给出非完整力学系统的 Lie 对称性确定方程、约束限制方程和附加限制方程,得到相应完整系统的 Hojman 守恒量以及非完整系统的弱 Hojman 守恒量和强 Hojman 守恒量.

2. 系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,\cdots,n)$来确定. 系统的运动受有 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,q,\dot{q})=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g), \tag{1}$$

约束(1)对虚位移的限制为

* 国家自然科学基金(批准号:10372053 和 10272021)、湖南省自然科学基金(批准号:03JJY3005)和湖南省教育厅科研基金(批准号:02C033)资助的课题.

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0. \tag{2}$$

系统的运动微分方程表为 Routh 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 L 为 Lagrange 函数，Q_s 为非势广义力，λ_β 为 Lagrange 乘子. 假设系统非奇异，在运动微分方程积分之前，可由方程(1)和(3)先求出乘子 λ_β 作为 t，$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}$的函数. 于是方程(3)可表为相应完整系统的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{4}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{5}$$

如果运动的初始条件满足非完整约束方程(1)，那么方程(4)的解就给出非完整系统的运动. 展开方程(4)，可求出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s = h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{6}$$

3. 特殊 Lie 对称性的确定方程、约束限制方程和附加限制方程

取时间不变的、群的无限小变换

$$t^* = t,\quad q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{7}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_s 为无限小生成元. 根据微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 理论，方程(6)在无限小变换(7)下，Lie 对称性的确定方程可表为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s = \frac{\partial h_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial h_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k, \tag{8}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s} + h_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{9}$$

方程(4)在无限小变换(7)下，Lie 对称性的确定方程可表为

$$X^{(2)}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right\} = X^{(1)}(Q_s) + X^{(1)}(\Lambda_s), \tag{10}$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s},$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{11}$$

定义 1 如果方程(6)在无限小变换(7)下的生成元 ξ_s 满足确定方程(8)，则相应对称性称为与非完整系统(1)和(3)相应的完整系统(6)的特殊 Lie 对称性.

非完整约束(1)在无限小变换(7)下的不变性归结为如下约束限制方程：

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g). \tag{12}$$

定义 2 如果方程(6)在无限小变换(7)下的生成元 ξ_s 满足确定方程(8)和约束限制方程(12)，则相应对称性称为非完整系统的特殊弱 Lie 对称性.

Appell-Chetaev 条件(2)对虚位移 δq_s 的限制归结为附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\xi_s = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g;\ s = 1,\cdots,n). \tag{13}$$

定义 3 如果方程(6)在无限小变换(7)下的生成元 ξ_s 满足确定方程(8)、约束限制方程(12)和附加限制方程(13)，则相应对称性称为非完整系统的特殊强 Lie 对称性.

4. 非完整力学系统的 Hojman 守恒量

由非完整力学系统的特殊 Lie 对称性寻求 Hojman 守恒量的方法，由下列定理给出.

定理 1 对于满足确定方程(8)的无限小生成元 ξ_s，如果存在某函数 $\mu = \mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，使得

$$\frac{\partial h_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{14}$$

则与非完整系统相应的完整系统(6)存在 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s) + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right) = \mathrm{const}. \tag{15}$$

证明 利用定义 1、确定方程(8)和条件(14)式，可以得到$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_{\mathrm{H}} = 0$.

如果令 $\mu = \mu(\boldsymbol{q})$，且系统不受给定约束的作用，则定理 1 退化为 Hojman 的原始结论[10].

利用定义 2 和定理 1，可以得到

定理 2 对于满足确定方程(8)和约束限制方程(12)的无限小生成元 ξ_s，如果存在某函数 $\mu =$

$\mu(t,q,\dot{q})$，使得条件(14)式成立，则非完整力学系统存在形如(15)式的弱 Hojman 守恒量.

利用定义 3 和定理 1，可以得到

定理 3 对于满足确定方程(8)、约束限制方程(12)和附加限制方程(13)的无限小生成元 ξ_s，如果存在某函数 $\mu=\mu(t,q,\dot{q})$，使得条件(14)式成立，则非完整力学系统存在形如(15)式的强 Hojman 守恒量.

利用定理 1—3，可由系统的特殊 Lie 对称性找到 Hojman 守恒量. 值得注意的是，应该适当选取生成元 ξ_s 和函数 μ，使得守恒量(15)式是有实际意义的非平凡守恒量.

5. 算 例

一单位质量的质点在某固定平面上运动，其 Lagrange 函数和广义力为[23]

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2), \tag{16}$$

$$Q_1=Q_2=0,$$

质点所受约束使其轨道斜率与时间成正比，即

$$f=-t\dot{q}_1+\dot{q}_2=0, \tag{17}$$

试研究该非完整系统的 Lie 对称性导致的 Hojman 守恒量.

非完整系统的 Routh 方程(3)为

$$\ddot{q}_1=-\lambda t,\quad \ddot{q}_2=\lambda, \tag{18}$$

由方程(17)，(18)解得

$$\lambda=\frac{\dot{q}_1}{1+t^2}, \tag{19}$$

于是得

$$\ddot{q}_1=-\frac{t}{1+t^2}\dot{q}_1=h_1,$$

$$\ddot{q}_2=\frac{1}{1+t^2}\dot{q}_1=h_2. \tag{20}$$

特殊 Lie 对称性的确定方程(8)给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1=-\frac{t}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1,$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=-\frac{1}{1+t^2}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2. \tag{21}$$

方程(21)有如下解：

$$\xi_1=\xi_2=1, \tag{22}$$

$$\xi_1=0,\quad \xi_2=\dot{q}_1(1+t^2)^{1/2}(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2), \tag{23}$$

$$\xi_1=0,\quad \xi_2=(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)^2. \tag{24}$$

这些生成元对应方程(20)的特殊 Lie 对称性，即与非完整系统相应的完整系统的特殊 Lie 对称性.

约束限制方程(12)给出

$$-t\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1+\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2=0, \tag{25}$$

附加限制方程(13)给出

$$-t\xi_1+\xi_2=0. \tag{26}$$

生成元(22)，(23)和(24)分别满足约束限制方程(25)，不满足附加限制方程(26)，它们均为非完整系统的特殊弱 Lie 对称性.

条件(14)式给出

$$-\frac{t}{1+t^2}+\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu=0, \tag{27}$$

它有如下解：

$$\mu=(1+t^2)^{1/2}, \tag{28}$$

$$\mu=(1+t^2)^{1/2}(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2), \tag{29}$$

利用定理 1 或定理 2，由(22)，(23)，(24)式与(28)，(29)式组合，可找到 Hojman 守恒量. 由(22)，(28)式得

$$I_H=0. \tag{30}$$

由(22)，(29)式得

$$I_H=-(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)^{-1}=\text{const}. \tag{31}$$

由(23)，(28)式得

$$I_H=-\dot{q}_1(1+t^2)^{1/2}=\text{const}. \tag{32}$$

由(23)，(29)式得

$$I_H=-2\dot{q}_1(1+t^2)^{1/2}=\text{const}. \tag{33}$$

由(24)，(28)式得

$$I_H=-2(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)=\text{const}. \tag{34}$$

由(24)，(29)式得

$$I_H=-3(\dot{q}_1+t\dot{q}_2-q_2)=\text{const}. \tag{35}$$

由定理 1 可知，守恒量(30)—(35)式都是与非完整系统相应的完整系统的 Hojman 守恒量. 由定理 2 可知，这些守恒量也都是非完整系统的弱 Hojman 守恒量. 由于生成元(22)，(23)和(24)不满足附加限制方程(26)，由定理 3 可知，这些守恒量都不是非完整系统的强 Hojman 守恒量.

值得注意，生成元(22)—(24)都不是 Noether 对称性的，不能由此利用 Noether 定理找到 Noether 守恒量.

6. 结　语

非完整力学系统除有按 Noether 对称性导出著名的 Noether 守恒量之外，在一定条件下，还有异于 Noether 的 Hojman 守恒量．本文提供了由非完整系统的特殊 Lie 对称性导出新守恒量的方法．对于一般完整力学系统，约束对虚位移的限制自行消失，使得 $\Lambda_s=0$，寻找一般完整系统的 Hojman 守恒量的方法是本文工作自然的推论．对于 $\Lambda_s = Q_s = 0$ 的 Lagrange 系统，本文工作也自然适用．

[1] Mei F X 2002 *J. Beijing Inst. Technol.* **22** 133 (in Chinese) [梅凤翔 2002 北京理工大学学报 22 133]

[2] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[3] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质（北京 北京工业大学出版社）]

[4] Mei F X 1999 *Application of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用（北京 科学出版社）]

[5] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量（北京 科学出版社）]

[6] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105

[7] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[8] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[9] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[10] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[11] Pillay T and Leach P G L 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 6999

[12] Lutzky M 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** L637

[13] Lutzky M 1998 *Int. J. Non-Linear Mech.* **33** 393

[14] Lutzky M 1999 *Int. J. Non-Linear mech.* **34** 387

[15] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 2049

[16] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 52 1048]

[17] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 51 461]

[18] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese) [许志新 2002 物理学报 51 2423]

[19] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[20] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 841

[21] Luo S K 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 597

[22] Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1039 (in Chinese) [张 毅 2003 物理学报 52 1039]

[23] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p70 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础（北京 北京工业学院出版社）第 70 页]

A non-Noether conserved quantity, i.e. Hojman conserved quantity, for nonholonomic mechanical systems*

Luo Shao-Kai[1)2)] Mei Feng-Xiang[3)]

[1)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang Institute of Science and Technology, Hangzhou* 310018, *China*)

[2)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha* 410003, *China*)

[3)] (*School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 26 September 2003; revised manuscript received 30 October 2003)

Abstract

A non-Noether conserved quantity, i.e. Hojman conserved quantity, of the nonholonomic mechanical systems is presented. Using the special Lie symmetry under infinitesimal transformations in which the time is not variable, the determining equations, the constrained restriction equations and the additional restriction equations of the nonholonomic mechanical systems are given. The Hojman conserved quantity of the corresponding holonomic systems, the weakly Hojman conserved quantity and the strongly Hojman conserved quantity of the nonholonomic systems are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, nonholonomic system, Lie symmetry, non-Noether conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10372053 and 10272021), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 03JJY3005), and the Scientific Research Foundation from the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 02C033).