

# 二次采样随机共振频谱研究与应用初探\*

冷永刚<sup>1,2)</sup> 王太勇<sup>1)</sup> 秦旭达<sup>1)</sup> 李瑞欣<sup>1)</sup> 郭焱<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 天津大学机械工程学院, 天津 300072)

<sup>2)</sup> 中国煤炭经济学院计算机系, 烟台 264005)

(2003 年 4 月 15 日收到, 2003 年 5 月 26 日收到修改稿)

研究了双稳系统随机共振频谱的洛伦兹分布特征, 得出在谱分布能量较集中的低频区才能产生可辨识的随机共振谱峰. 探讨了大参数信号双稳系统的二次采样随机共振的频谱特性. 以强噪声中弱信号的检测为实例, 阐述了二次采样随机共振技术的具体应用.

关键词: 随机共振, 二次采样随机共振, 双稳系统, 频谱

PACC: 0630F, 0650

## 1. 引 言

噪声作用于系统, 通常系统输出的品质会恶化. 然而, 在某些非线性条件下, 噪声起着与人们直觉相反的作用, 一定量的噪声输入不仅不会降低系统输出的品质, 反而会改善系统响应的质量. 这就是所谓的随机共振(SR)现象<sup>[1-4]</sup>. 随机共振机理表明, 合适的噪声强度可以使得弱输入信号驱动下的非线性系统的输出信噪比达到某一最佳值, 其本质是部分噪声能量转化为信号能量的结果, 是输入信号与噪声的协作效应. 只有在非线性系统中这种能量转移机理才能得以实现. 随机共振已有的绝热近似(或绝热消去)和线性响应理论, 在一定程度上揭示了非线性条件下噪声产生的各种效应<sup>[5,6]</sup>. 然而这些理论仅适用于小参数信号<sup>[7,8]</sup>(小幅度、小频率、小噪声), 而实际工作中信号参数可能较大. 本文在分析了小信号双稳系统随机共振的频率特性基础上, 探讨了大参数信号二次采样随机共振(TSSR)<sup>[9]</sup>的频谱特性, 为随机共振理论在实际中的应用提供了一定的依据和手段.

## 2. 小信号双稳系统的随机共振<sup>[1,5]</sup>

产生随机共振不可缺少的三个要素是双稳或多

稳非线性系统、输入信号和噪声. 本文以双稳系统  $dx/dt = \mu x - x^3$  ( $\mu > 0$ ) 单频正弦信号  $a \sin(2\pi f_0 t)$  和白噪声  $n(t)$  为研究对象, 其朗之万(Langevin)方程模型为

$$dx/dt = \mu x - x^3 + a \sin(2\pi f_0 t) + n(t). \quad (1)$$

在小参数信号(简称小信号)条件下, 根据绝热近似理论, 系统输出的功率谱  $S(f)$  中包含两部分内容, 一部分是由输入正弦信号引起的  $S_1(f)$ , 它与输入信号同频, 另一部分是由噪声引起的  $S_2(f)$ , 它具有洛伦兹分布形式.

$$S(f) = S_1(f) + S_2(f), \quad (2a)$$

$$S_1(f) = \frac{2\mu^4 a^2 \exp(-\mu^2/2D) (\pi D^2)}{(2\mu^2 \exp(-\mu^2/2D) / \pi^2) + 2\pi f_0} \times \delta(f_0 - f), \quad (2b)$$

$$S_2(f) = \left[ 1 - \frac{\mu^3 a^2 \exp(-\mu^2/2D) (\pi^2 D^2)}{(2\mu^2 \exp(-\mu^2/2D) / \pi^2) + (2\pi f_0)^2} \right] \times \left[ \frac{4\sqrt{2}\mu^2 \exp(-\mu^2/4D) \pi}{(2\mu^2 \exp(-\mu^2/2D) / \pi^2) + (2\pi f)^2} \right]. \quad (2c)$$

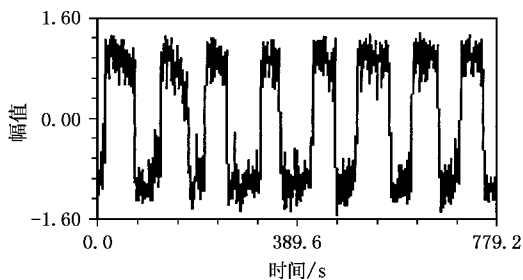
需要指出的是, 由于洛伦兹分布的功率谱可理解为其噪声谱能量向低频区集中的特性, 因此, 能够产生随机共振谱峰的频带, 将局限在系统输出功率谱的低频段. 因为只有有一定噪声能量的驱动下, 布朗粒子才能越过势垒在双稳系统的两势阱之间以信号频率作切换的跃迁运动, 形成随机共振现象.

\* 国家自然科学基金(批准号 50175081)和国家高技术研究发展计划(批准号 2002AA414420)资助的课题.

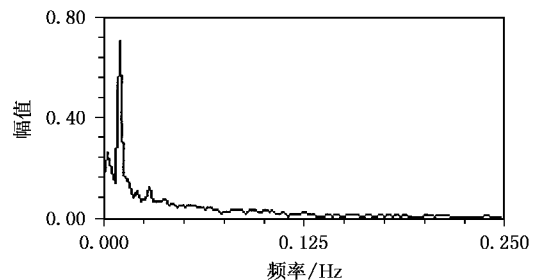
† 通讯联系人. E-mail: zeyangang@yt-public.sd.cninfo.net

换言之,洛伦兹分布的输出功率谱表明,频谱能量均匀分布的白噪声,经过非线性双稳系统作用后,谱结构发生变化,不再是均匀分布,能量向低频区域集中.图1是一个具体实例,对应朗之万方程(1)中各参数<sup>[8]</sup>取为

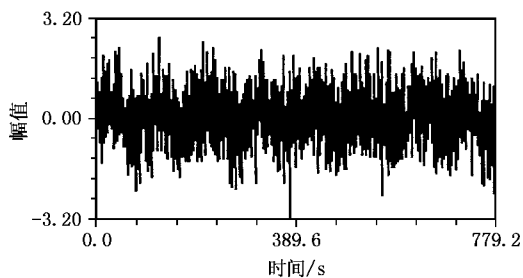
$$\mu = 1, \quad a = 0.3, \quad D = 0.31,$$



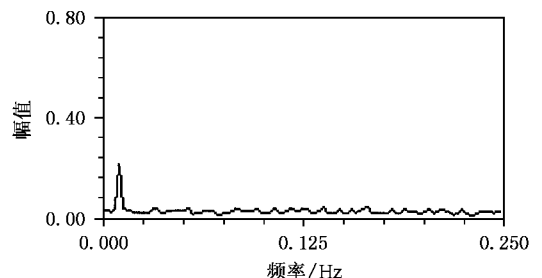
(a) 系统输出波形



(b) 系统输出频谱



(c) 系统输入波形



(d) 系统输入频谱

图1 小信号双稳系统的随机共振

由图1可以明显地看出,在 $f_s = 500f_0$ 时,信号频率 $f_0$ 处的随机共振谱峰处于噪声能量的集中区域,是典型的随机共振现象.为观察不同频率 $f_0$ 或 $f_s$ 的随机共振频谱情况,保持(3)式中 $\mu, a, f_0$ 不变,图2给出不同 $f_s$ 及其相适应 $D$ 的一组随机共振响应谱.从图2可以看出,随着 $f_s$ 的减小(或看成 $f_0$ 的增大), $f_0$ 处的随机共振谱峰逐渐离开噪声能量集中的低频区,且谱峰幅度的趋势变小,取而代之的是洛伦兹分布的噪声低频谱峰,随机共振现象逐渐弱化消失.

### 3. 大信号双稳系统的二次采样随机共振

在实际工作中,所遇到的信号参数往往超出小参数的限制条件,如大频率、强噪声等.称这种信号为大参数信号(简称大信号).大信号处理的一个有意义的实际应用是从强噪声中检测弱信号.若对大

$$f_0 = 0.01\text{Hz}, \quad f_s = 5\text{Hz}, \quad n(t) = \sqrt{2D}g(t), \quad (3)$$

其中 $f_s$ 为采样频率, $g(t)$ 为均值为0方差为1的纯白噪声, $D$ 为噪声强度.方程(1)采用四阶Runge-Kutta法数值计算,其结果如图1所示.

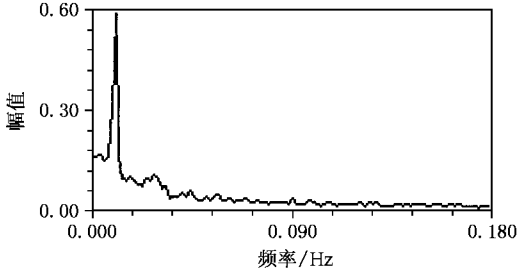
信号按朗之万方程(1)直接进行双稳系统的响应谱分析,则根据文献[9],显然由于不满足小参数条件,在双稳系统输出响应的频谱图中看不到 $f_0$ 频率处的谱峰特征,不存在随机共振现象.而在系统输入端,由于噪声强度比信号幅度大得多,自然在 $f_0$ 处也得不到像图1(d)那样的谱峰.图3是朗之万方程(1)取大参数(4)式的数值分析结果(注:为看清频谱结构,谱图的幅值取了对数.本文其他谱图均为线性频谱),系统输入输出谱在 $f_0 = 40\text{Hz}$ 处均看不到谱峰.

$$\mu = 1, \quad a = 0.3, \quad D = 9.1, \quad f_0 = 40\text{Hz}, \quad f_s = 2000\text{Hz}, \quad n(t) = \sqrt{2D}g(t). \quad (4)$$

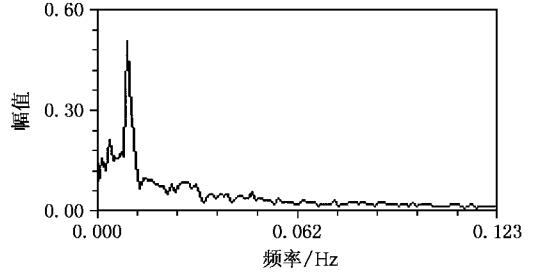
为实现大信号的随机共振,文献[9]提出了二次采样随机共振(TSSR)方法,即首先将较高采样频率信号变换为一个符合小参数条件的较低的二次采样频率信号,然后经过双稳系统进行随机共振输出,并分析其频谱特征,最后再按照二次采样频率的变换比恢复较高采样频率信号.以(4)式为实例,定义 $\frac{f_s}{f_{sr}}$

$= \frac{f_0}{f_s}$  则  $f_r = \frac{f_0}{f_s} \times f_{sr}$ , 取二次采样频率  $f_{sr} = 8\text{Hz}$ , 并对其所构成的朗之万方程(1)重新进行数值计算, 得到图 4 的结果. 图 4 中频率  $f_r = 0.16\text{Hz}$  处有一突出

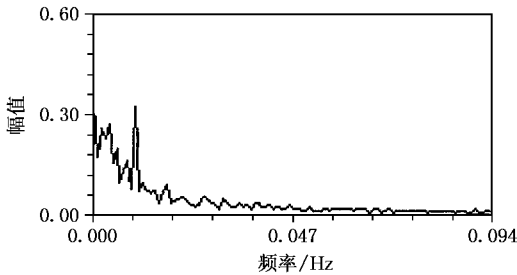
的谱峰, 经频率还原有  $f_r \times (f_s/f_{sr}) = 40\text{Hz}$ , 正好是信号频率  $f_0$ , 显然二次采样随机共振方法实现了大信号的随机共振.



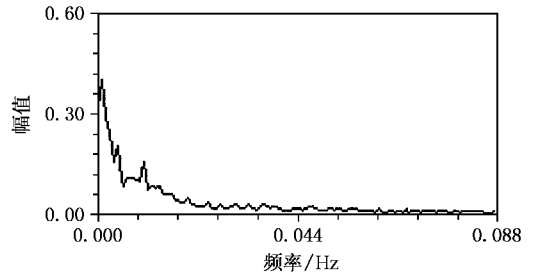
(a)  $f_s = 360 f_0, D = 0.27$



(b)  $f_s = 245 f_0, D = 0.13$

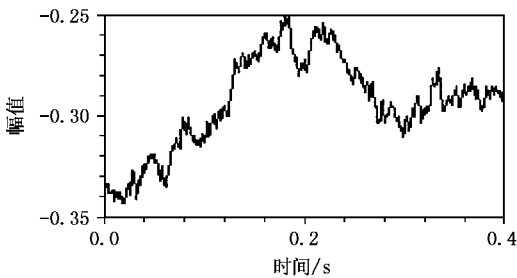


(c)  $f_s = 187 f_0, D = 0.044$

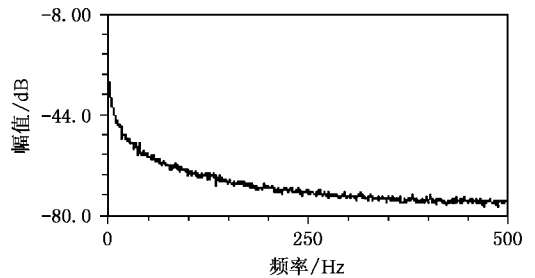


(d)  $f_s = 175 f_0, D = 0.028$

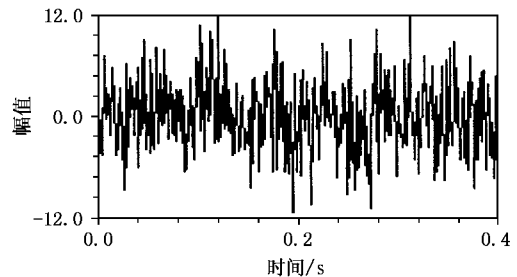
图 2 小信号下不同采样频率及其对应噪声强度双稳系统的随机共振响应谱



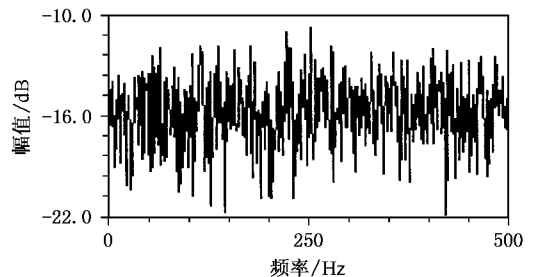
(a) 输出时域波形



(b) 输出频谱 Bode 图



(c) 输入时域波形



(d) 输入频谱 Bode 图

图 3 大信号双稳系统输入、输出的时频图

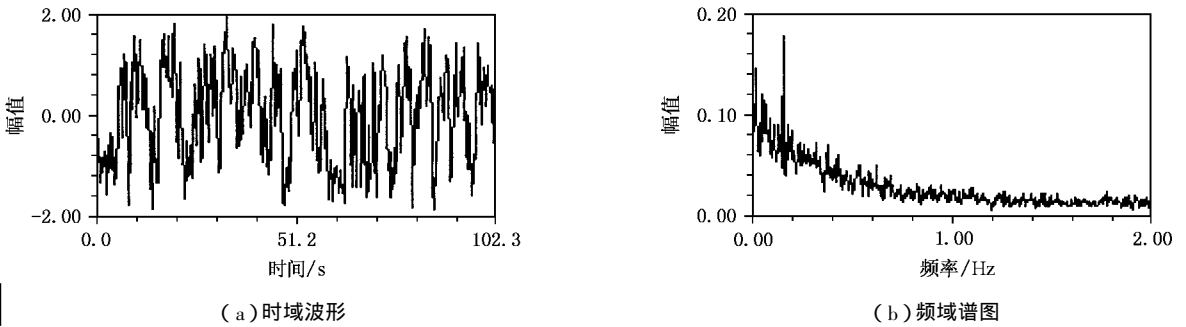


图4  $f_{sr} = 8\text{Hz}$  ,大信号参数(4)式的双稳系统二次采样随机共振响应的时频图

#### 4. 双稳系统二次采样随机共振的频谱特性

从大信号的随机共振频谱图4可明显地看出,整个谱图分布有类似洛伦兹形式,谱能量主要集中在低频区域,而且位于此低频段的信号谱峰被共振突出.当信号频率逐渐增大(或采样频率降低)而离

开低频区域时,由于噪声驱动能量逐渐减小,因此其共振谱峰趋势必然也就逐渐减小弱化而消失,如图5所示.这些都符合随机共振的特点.这种性质实际上反映出噪声的选择特性<sup>[10,11]</sup>,它表明即使在大信号条件下,只要经过二次采样随机共振,那么不同的噪声强度同样有利于不同频率信号的增强,大信号的随机共振同样具有多重随机共振性质.

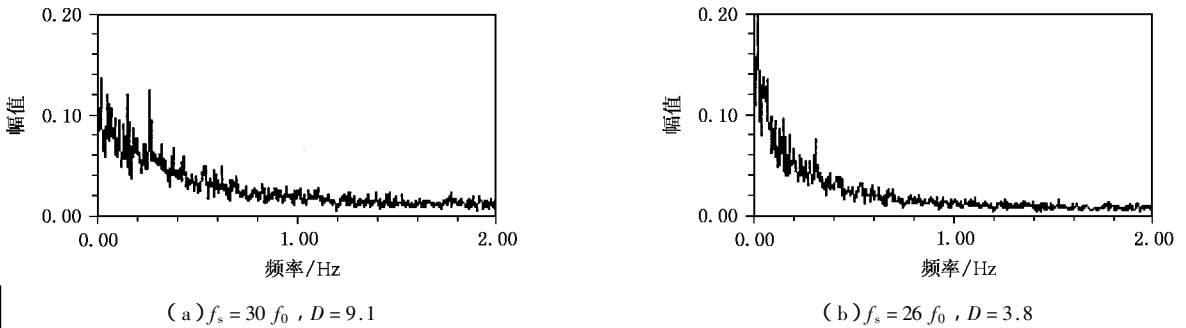


图5 保持参数(4)式中  $\mu$  ,  $a$  ,  $f_0$  和  $f_{sr} = 8\text{Hz}$  不变,不同采样频率及其对应噪声强度的大信号双稳系统二次采样随机共振响应谱

在工程实际应用中,一个有意义的问题是:当噪声强度一定不变时,大信号的随机共振谱能否在多个频率点处产生可辨识的随机共振谱峰.这一问题根据噪声的选择特性可以毫无疑问地得到肯定的回答,即相同的噪声强度可以选择并增强多个频率点处的信号峰值,只是增强的幅度大小不同而已.以(4)式为例,保持  $\mu$  ,  $a$  ,  $D$  ,  $f_0$  和二次采样频率  $f_{sr} = 8\text{Hz}$  不变,并令  $f_s = kf_0$  ,取  $k$  在5—100范围内变化(即取不同的信号频率或采样频率),对朗之万方程(1)进行数值计算,得到不同  $k$  值的随机共振谱图.在每一谱图中度量  $f_0$  处的谱峰高度  $h$  ,可得到  $h-k$  关系曲线,如图6所示.由  $h-k$  的关系可知,对于不同的采样频率  $f_s$  或信号频率  $f_0$  ,相同的噪声强度  $D$

$= 9.1$  所选择的信号峰值相差很大.从图6可看出,  $k = 50$  是一个明显的分界线,当  $k \geq 50$  时,谱高  $h$  变化趋势比较平稳,而当  $k < 50$  后,  $h$  值呈迅速下降变化趋势,如图6中虚线.这一点与谱图能量的分布形式相符合,因为  $k \geq 50$  对应谱图能量集中的低频区域,而这一区域容易形成可辨识的共振谱峰,参见图4.对于  $k < 50$  离开能量集中的低频区域,虽然在  $k = 30$  等处也有较高的  $h$  值,但因该值低于洛伦兹分布的噪声幅值,容易引起干扰,所以不易识别,参见图5.因此,从可辨识的角度考虑,信号频率  $f_0$  处的共振谱峰最好像图4那样为整个谱图的最大峰值,而满足这一条件的  $k$  值只能从  $k \geq 50$  中寻找,正如文献9提到的若干  $k$  值.

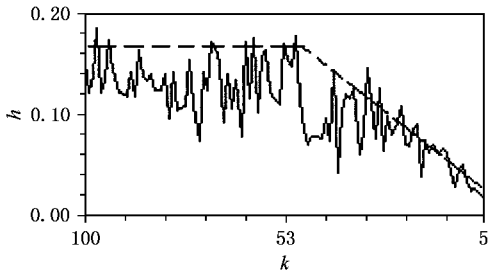


图6  $D=9.1, f_s = k f_0$  时,  $h-k$  曲线

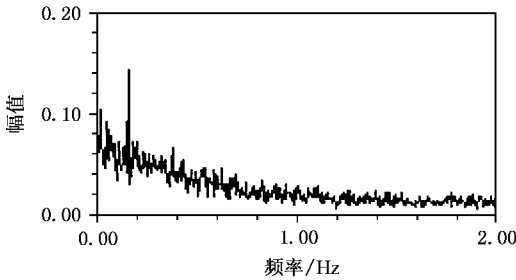


图7  $\mu = 0.1$  大信号二次采样随机共振响应谱

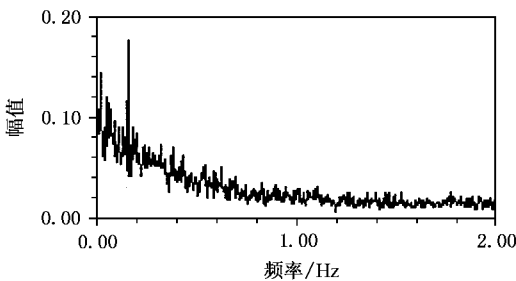
如果噪声强度一定,且  $k$  值也不变,那么通过减小参数  $\mu$  可相对突出  $f_0$  处的随机共振谱峰,如图7并比较图4所示。 $\mu$  的变化反映了双稳系统势函数  $U(x) = -1/2\mu x^2 + 1/4x^4$  的势垒<sup>[1]</sup>  $\Delta U = \mu^2/4$  的高度变化。 $\mu$  减小则势垒  $\Delta U$  降低,于是布朗粒子在一定噪声强度的驱动下,可轻易越过势垒形成明显的随机共振现象。事实上,减小  $\mu$  而相对突出随机共振谱峰也可理解为势垒  $\Delta U$  相对于信号幅值  $a$  降低,从而信号幅值  $a$  超过阈下输入信号<sup>[12]</sup>,于是

布朗粒子轻易越过势垒形成较明显的随机共振谱峰。

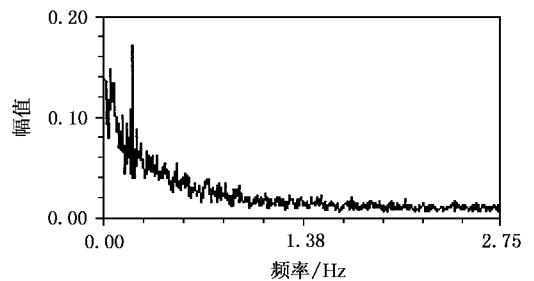
噪声强度除了对信号频率具有选择性外,它对二次采样频率也有选择性。不同的  $D$  值都可以选择一段连续合适的  $f_{sr}$  实数区间  $[f_{sr \max}, f_{sr \min}]$  在  $f_0$  处产生可辨识的随机共振谱峰,而且  $f_{sr \min}$  的随机共振效果要比  $f_{sr \max}$  的好。其中之所以存在最小值  $f_{sr \min}$ ,是因为对于某个  $D$  值,当  $f_{sr} < f_{sr \min}$  后,数值计算将溢出,最大值  $f_{sr \max}$  的存在表示当  $f_{sr} > f_{sr \max}$  后  $f_0$  处的随机共振谱峰不再是整个谱图的最大值,取而代之的是噪声极低频的谱峰,如图8所示。值得注意的是,区间  $[f_{sr \max}, f_{sr \min}]$  随着  $D$  的增大将逐渐缩小,直至最后存在最大的噪声强度  $D_{\max}$ ,使得  $f_{sr \max} = f_{sr \min}$ 。这表明噪声强度是在一定有限的范围  $D \leq D_{\max}$  内使二次采样的随机共振在  $f_0$  处达到最佳状态——整个谱图最大可辨识谱峰的状态。以(4)式为例,表1列出能在  $f_0$  处产生可辨识共振谱峰的噪声强度  $D$  与其对应二次采样频率  $f_{sr}$  区间(保留一位小数)的关系。

表1  $\mu = 1, a = 0.3, f_s = 50f_0, f_0 = 40\text{Hz}, D$  与  $f_{sr}$

$D$	$f_{sr \min}$	$f_{sr \max}$	$D$	$f_{sr \min}$	$f_{sr \max}$
25.0	11.1	11.3	6.4	7.0	9.0
18.5	10.0	10.8	4.0	6.0	8.0
13.5	9.0	10.5	2.3	5.0	7.4
9.5	8.0	9.7	1.2	4.0	5.9



(a)  $D=9.5, f_{sr} = 8$



(b)  $D=9.5, f_{sr} = 11$

图8 以(4)式为例,  $D$  对  $f_{sr}$  的选择性(a)  $f_{sr} \approx f_{sr \min}$ , (b)  $f_{sr} > f_{sr \max}$

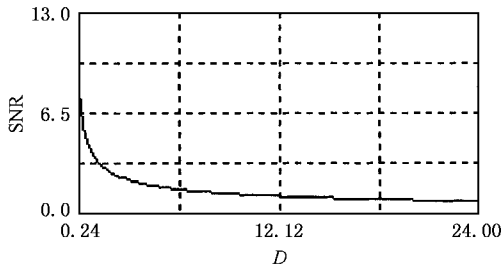
如果以信噪比 SNR 和噪声强度  $D$  的关系来进一步描述二次采样的随机共振特性,那么由于二次采样频率的存在,则应有两种分析方式。一种是  $f_{sr}$  不变,考察 SNR 随  $D$  的变化情况,如图9所示。其

中仍以(4)式为例,且取表1整数极限情况  $D_{\max} = 24$  及其对应的  $f_{sr} = f_{sr \min} = f_{sr \max} = 11$ 。同时给出双稳系统输入、输出端信噪比,SNR 定义<sup>[7,13]</sup>为:在功率谱中信号的峰(幅)值与同频率噪声(背底)之比。由图

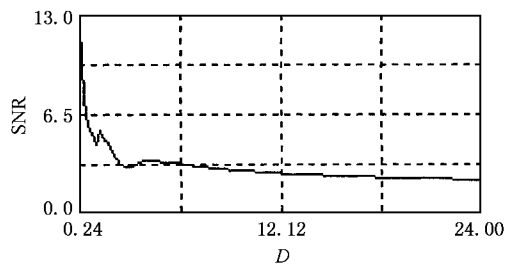
9 看出,随着  $D$  的增大,系统输入输出的 SNR 均是递减趋势,但通过比较两端谱图和它们的 SNR 值可知,在噪声强度  $D > 4$  后,系统输入端的 SNR  $< 2$ ,信号几乎完全被噪声淹没,无法识别,而在输出端,由于随机共振效应,SNR 始终大于 2.2,信号却逐渐突出,直到成为整个谱图最大可辨识的谱峰。

另一种考察 SNR 与  $D$  的关系是,对于表 1 中不同的  $D$  取其对应的  $f_{sr\ min}$ ,它将反映出在最佳二次采样随机共振状态下 SNR 随  $D$  的变化规律,如图 10 所示,其中仍取参数(4)和表 1 的数据进行计算。从图 10 看出,在系统输出端,当  $D > 6$  后,随着噪声强

度的增大,SNR 变化开始缓慢下降,并趋于平稳,而且 SNR 始终大于 2.2。而在系统输入端,虽然当  $D > 6$  后 SNR 随  $D$  的变化也较平缓,但 SNR 已小于 1.5 并逐渐趋于 0.8 小于 1。这就说明为什么在系统的输出端,二次采样的随机共振能够选择适当的  $f_{sr}$  使  $f_0$  处的弱信号从很强的噪声背景中共振突出,而在系统的输入端,  $f_0$  处的弱信号却只能淹没在强烈的噪声风暴中的原因。当  $D < 6$  时,由于噪声变弱,自然在系统输入输出端的频谱中均能看到  $f_0$  处的谱峰。

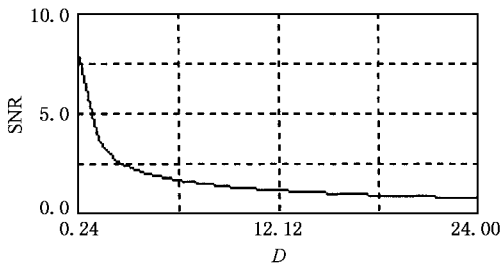


(a) 输入端 SNR- $D$  曲线

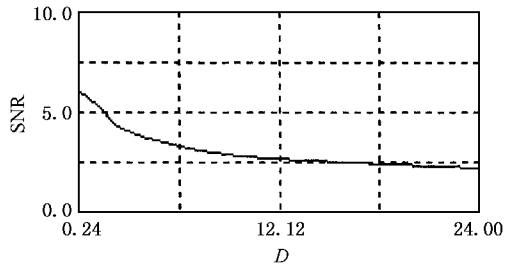


(b) 输出端 SNR- $D$  曲线

图 9 以(4)式为例,  $f_{sr} = 11$ , 大参数双稳系统的输入、输出 SNR



(a) 输入端 SNR- $D$  曲线



(b) 输出端 SNR- $D$  曲线

图 10 表 1 最佳二次采样随机共振状态下,大参数双稳系统的输入、输出 SNR

### 5. 基于二次采样随机共振应用的考虑

本节将简述如何应用二次采样随机共振技术来识别强噪声中弱信号的方法。在实际工程信号处理时,所采集数据中的噪声和信号往往混合在一起,其噪声强度和信号的幅值与频率并不知道,反映到朗之万方程(1)中就是不知道  $D, a, f_0$ 。而要想利用朗之万方程在双稳系统的输出频谱中识别频率为  $f_0$  的信号,只靠两个可调节的参数  $\mu$  和  $f_{sr}$  无能为力。

然而根据前面的分析可知,噪声强度在二次采样随机共振的频谱中扮演着重要的角色,它对信号频率和二次采样频率都具有选择性。如果能得到噪声强度  $D$  并设法事先确定信号频率  $f_0$ ,那么问题就简单。为此采用下列方法,即首先通过调整实际采样频率  $f_s$ ,使感兴趣的信号频率点  $f_0$  位于  $f_s$  的低频区,如令  $k = 50$ 。这意味着在数据采集前应该先确定要观察分析的信号频率  $f_0$ ,然后再利用相关性粗略地估计出实测数据的噪声强度  $D$ ,并参照表 1 选择对应的  $f_{sr}$ 。如果表 1 中没有相应的数值,可按第 3 部分二次采样随机共振方法绘制类似的表 1。最

后对  $f_{sr}$  和  $\mu$  进行适当调整,直到在信号频率  $f_0$  处产生可辨识的随机共振谱峰为止.

## 6. 结 论

本文分析了双稳系统随机共振频谱具有洛伦兹分布形式,频谱能量向低频区域集中,以及只有在能量集中的低频区域才能产生可辨识的随机共振谱峰

等特点,针对大参数信号双稳系统的二次采样随机共振频谱特性,从噪声强度对信号频率和二次采样频率的选择性以及噪声强度与 SNR 的关系等方面,进行了详实的论述.以强噪声中弱信号的识别为实例,说明了实际信号处理时应如何使用二次采样随机共振技术.数据分析表明,本文的研究有着深刻的物理意义和实际的应用价值.

- [ 1 ] Gammaitoni L *et al* 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 23
- [ 2 ] Bulsara A R and Gammaitoni L 1996 *Phys. Today* **49** 39
- [ 3 ] Godivier X and Chapeau-Blondeau F 1997 *Signal Proc.* **56** 293
- [ 4 ] Yang H B *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 508 ( in Chinese ) [ 杨洪波 等 2000 物理学报 **49** 508 ]
- [ 5 ] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* ( Shanghai : Shanghai Science & Technology Education Press ) ( in Chinese ) [ 胡岗 1994 随机力与非线性系统 ( 上海 : 上海科技教育出版社 ) ]
- [ 6 ] Nicolis G and Prigogine I 1997 *Self-Organization in Nonequilibrium System* ( New York : Wiley )
- [ 7 ] Qin G R , Gong D C , Hu G and Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 ( in Chinese ) [ 秦光戎、龚德纯、胡岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360 ]
- [ 8 ] Lu Z H , Lin J H and Hu G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1556 ( in Chinese ) [ 卢志恒、林建恒、胡岗 1993 物理学报 **42** 1556 ]
- [ 9 ] Leng Y G and Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 ( in Chinese ) [ 冷永刚、王太勇 2003 物理学报 **52** 2432 ]
- [ 10 ] Chapeau-Blondeau F 2000 *Phys. Rev. E* **61** 940
- [ 11 ] Vilar J M G and Rubi J M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2882
- [ 12 ] Wang J F , Liu F , Wang J Y , Chen G and Wang W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2305 ( in Chinese ) [ 王嘉赋、刘锋、王均义、陈光、王炜 1997 物理学报 **46** 2305 ]
- [ 13 ] Gingl Z , Vajtai R and Kiss L B 2000 *Chaos Solitons Fractals* **11** 1929

# Power spectrum research of twice sampling stochastic resonance response in a bistable system \*

Leng Yong-Gang<sup>1,2†</sup> Wang Tai-Yong<sup>1)</sup> Qin Xu-Da<sup>1)</sup> Li Rui-Xin<sup>1)</sup> Guo Yan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> School of Mechanical Engineering , Tianjin University , Tianjin 300072 , China )

<sup>2)</sup> Department of Computation , China Coal Economic College , Yantai 264005 , China )

( Received 15 April 2003 ; revised manuscript received 26 May 2003 )

## Abstract

The characteristics of Lorentzian distribution in the power spectrum of a stochastic resonance ( SR ) from a bistable system have been investigated , and then the viewpoint of producing an identifiable SR peak only at the lower frequency area where the power energy being concentrated has been proposed. With big values of parameters , the spectral properties of a twice sampling stochastic resonance ( TSSR ) from a bistable system is probed in detail. Take the detection of a weak signal overwhelmed in heavy noise as an example , the application of the TSSR technique is shown finally.

**Keywords :** stochastic resonance , twice sampling stochastic resonance , bistable system , frequency spectrum

**PACC :** 0630F , 0650

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 50175081 ) , and the National High Technology Development Program of China ( Grant No. 2002AA414420 ).

† Author to whom correspondence should be addressed. E-mail : zeyangang@yt-public.sd.cninfo.net