

外加磁场、电流及弧柱半径对电弧螺旋不稳定性的影响*

邹 秀 宫 野 刘金远 宫继全

(大连理工大学三束材料改性国家重点实验室, 大连 116024)

(2002 年 12 月 31 日收到 2003 年 3 月 5 日收到修改稿)

采用与时间有关的线性微扰理论, 研究了存在气流作用下, 外加磁场、弧电流以及弧柱半径对电弧螺旋不稳定性影响, 给出了稳定性条件和不稳定性增长率等定量结果.

关键词: 电弧, 稳定性, 轴向磁场, 弧柱半径

PACC: 5280, 5230, 5265

1. 引 言

电弧等离子体技术应用比较广泛, 研究电弧的螺旋不稳定性更是对高压断路器的开断能力、高压光源中电弧放电的功率输入, 以及聚变反应堆中防止等离子体被污染等问题具有重要意义. 迄今已有部分工作^[1-7], 从通道模型出发, 用磁流体动力学理论进行研究. 文献[8]在此基础上, 分析了在外加气流作用后, 等离子体平衡流的旋转分量、轴向分量对电弧等离子体螺旋不稳定性作用, 得出结论: 轴向分量对电弧稳定性起重要作用. 但是在存在外加气流作用的情况下, 文献[8]没有讨论外加磁场、弧电流以及弧柱半径对电弧螺旋不稳定性影响. 本文对此进行讨论, 并给出稳定性条件和不稳定性增长率等定量结果.

2. 方程简化与模型

与以前的工作^[1-7]相同, 采用静电磁流体力学 (MHD) 方程组来描述电弧等离子体, 并且对方程进行简化^[3] (所采用的符号和各物理量的意义也一样). 基本方程如下^[1]:

$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P - \eta \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} + \frac{4}{3} \eta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho_m \frac{dh}{dt} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (8)$$

引进热势 $\mathcal{S}(T)$ 代替温度:

$$\mathcal{S}(T) = \int_0^T \kappa(T) dT, \quad (9)$$

其中 η 为粘性系数, ρ_m 为质量密度, \mathbf{v} 为等离子体速度, p 为等离子体压强, $h \equiv e + p/\rho_m$ 为单位质量的焓, T 为温度, κ 为热传导系数, 算符 $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$.

设电弧柱产生一个螺旋型的小扰动, 边界方程为

$$r = r_c + \epsilon_c \exp(i\phi - ikz), \quad (10)$$

这时各物理量都可以展开为

$$A = A_0(r) + A_1, \quad (11)$$

其中 $A_0(r)$ 为未扰动时的平衡量, A_1 小扰动量取下面形式 (本文中带 \wedge 的量的意义都同下式中带 \wedge 的量的意义):

* 国家自然科学基金(批准号: 19875007)资助的课题.

$$A_1 = \hat{A}(r, k, t) \exp(i\phi - ikz), \quad (12)$$

采用双通道模型, 设稳态平衡时电弧是半径为 r_c 的无限长圆柱, 通道半径为 r_c , 管壁半径为 R , 考虑外部气流对等离子体径向作用很小, 等离子体平衡流取如下形式^[8]:

$$\mathbf{v}_0 = r\omega_0 \mathbf{e}_\varphi + v_0(r) \mathbf{e}_z, \quad (13)$$

其中 ω_0 为旋转流中一个恒定的角速度, 轴向分量 (z 方向) 取抛物线形式, 即

$$v_0(r) = ar^2 + b, \quad (14)$$

其中 a 和 b 为待选取的参数.

考虑到外加气流作用后, 一阶线性扰动磁流体力学方程组为

$$\Delta \hat{q}_1 - 2\mu_0 j_0(r) \hat{j}_{1z}(r) + (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{j})_1 = 0, \quad (15)$$

$$\Delta \hat{\omega}_{1z} + \eta^{-1} \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_{1z} = 0, \quad (16)$$

$$\Delta \hat{W}_1 + \eta^{-1} \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial z} - \alpha^{-1} \frac{\partial (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})_1}{\partial z} + \eta^{-1} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_{1z} = 0, \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0, \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{j}_1(r) = \sigma_0(r) \mathbf{E}_1(r) + \sigma_1(r) \mathbf{E}_0(z), \quad (20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} D_B \hat{S}_1^i - f^i(\rho) \mathcal{L} \hat{S}_1^i / d\rho + 4\alpha(\omega_0 - kv_0(r)) \mathcal{L} \\ (\sigma_0 E_0^2) f^i(\rho) \mathcal{L} (\zeta \rho^2 / \rho_c^2 - 2) \rho \hat{S}_1^i \\ = \alpha f^i(\rho) \mathcal{L} i \hat{\omega}_{1\varphi}^i / k + \text{id} \hat{W}_1^i / d\rho - \dot{\epsilon}_c \mathcal{L} k \\ - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})_1 / k^2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} D_B \hat{S}_1^e - f^e(\rho) \mathcal{L} \hat{S}_1^e / d\rho + 2\alpha(\omega_0 - kv_0(r)) \\ \times \rho f^e(\rho) \mathcal{L} (\sigma_0 E_0^2 \rho_c^2 (1 - \zeta/2)) \hat{S}_1^e \\ = \alpha f^e(\rho) \mathcal{L} i \hat{\omega}_{1\varphi}^e / k + \text{id} \hat{W}_1^e / d\rho - \dot{\epsilon}_c \mathcal{L} k, \end{aligned} \quad (24)$$

其中电导率 σ 选用抛物线形分布, 即柱内电导率 $\sigma = \sigma_0(r) = \sigma_0 \left(1 - \zeta \frac{r^2}{r_c^2}\right)$, σ_0 为常数, ζ 为形状因子, 上角标 i, e 分别为电弧内外的量.

3. 扰动方程求解

引入辅助量的无量纲形式^[1] (上角标“ $*$ ”表示无量纲形式):

$$\hat{q}_1^* = k^2 \hat{q}_1(\mu_0 j_0^2 \rho_c);$$

$$\hat{\omega}_1^* = k^2 \eta_1 (\hat{\omega}_{1r}, i \hat{\omega}_{1\varphi}, i \hat{\omega}_{1z}) (\mu_0 j_0^2 \rho_c);$$

$$\hat{W}_1^* = ik^3 \eta \hat{W}_1(\mu_0 j_0^2 \rho_c);$$

$$\hat{S}_1^* = \hat{S}_1 / IE_0. \quad (25)$$

动量扰动方程 (15) (16) (17) 的解分别为^[8]

$$\begin{aligned} \hat{q}_1^{*i} = & c_1 I_1(\rho) + M_2 A \zeta \rho I_1'(\rho) \mathcal{L} 2 \\ & + A \mathcal{L} (M_1 - 5/2 - \zeta / \rho_c) \zeta - \rho_c^2 \mathcal{L} \rho I_1'(\rho) \\ & + [\zeta/2 - 13 \zeta^2 \mathcal{L} (60 \rho_c^2)] \rho^2 I_1(\rho) \\ & + [\zeta + 43 \zeta^2 \mathcal{L} (60 \rho_c^2)] \rho^3 I_1(\rho) \\ & + [-3 \zeta^2 \mathcal{L} (20 \rho_c^2)] \rho^4 I_1(\rho) \\ & + [-3 \zeta^2 \mathcal{L} (10 \rho_c^2)] \rho^5 I_1(\rho) \mathcal{L} \rho, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\hat{q}_1^{*e} = c_7 I_1(\rho) + c_8 K_1(\rho), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1z}^{*i} = & c_2 I_1(\rho) + M_2 A \mathcal{L} (\rho_c^2/4 + \zeta/2) \rho I_1'(\rho) \\ & - \zeta \rho^2 I_1(\rho) \mathcal{L} 6 - \zeta \rho^3 I_1(\rho) \mathcal{L} 12 \mathcal{L} \\ & + A \mathcal{L} (M_1 - 1/2) \rho_c^2 / \mathcal{L} (M_1 - 2) \zeta - \zeta^2 / \rho_c^2 \mathcal{L} \\ & \times \rho I_1'(\rho) + A \mathcal{L} (3/8 - M_1/3) \zeta - 2 \zeta^2 \mathcal{L} (5 \rho_c^2) \mathcal{L} \\ & \times \rho^2 I_1(\rho) + A \mathcal{L} [-11 \zeta^2 \mathcal{L} (80 \rho_c^2)] \rho^4 I_1(\rho) \\ & + A \mathcal{L} (1/8 - M_1/6) \zeta + 2 \zeta^2 \mathcal{L} (5 \rho_c^2) \mathcal{L} \rho^3 I_1(\rho) \\ & + A \mathcal{L} [-\zeta^2 \mathcal{L} (40 \rho_c^2)] \rho^5 I_1(\rho), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\hat{\omega}_{1z}^{*e} = c_{11} I_1(\rho) + c_{12} K_1(\rho), \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_1^{*i} = & c_1 [-\rho I_1'(\rho) \mathcal{L} 2] + c_3 I_1(\rho) + M_2 A \mathcal{L} [\rho I_1'(\rho) \mathcal{L} 4 \\ & - \rho^2 I_1(\rho) \mathcal{L} 8] + M_3 A \mathcal{L} (-\rho_c^2 - \zeta) \rho I_1'(\rho) \\ & + \zeta \rho^2 I_1(\rho) \mathcal{L} 6 + \zeta \rho^3 I_1(\rho) \mathcal{L} 3] + A \mathcal{L} [-\rho_c^2/4 \\ & + (M_1/2 - 5/4) \zeta - \zeta^2 / \mathcal{L} \rho_c^2] \rho I_1'(\rho) \\ & + [-M_1 \zeta/4 + 5 \zeta/8 + \rho_c^2/8 - \zeta^2 \mathcal{L} (40 \rho_c^2)] \\ & \times \rho^2 I_1(\rho) + [11 \zeta^2 \mathcal{L} (40 \rho_c^2)] \rho^3 I_1(\rho) \\ & + [-\zeta/32 - 43 \zeta^2 \mathcal{L} (480 \rho_c^2)] \rho^4 I_1(\rho) \\ & + [\zeta^2 \mathcal{L} (240 \rho_c^2)] \rho^6 I_1(\rho) \mathcal{L} \rho, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_1^{*e} = & c_7 [-\rho I_1'(\rho) \mathcal{L} 2] + c_8 [-\rho K_1(\rho) \mathcal{L} 2] \\ & + c_9 I_1(\rho) + c_{10} K_1(\rho), \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$A = \epsilon_c \mathcal{L} [r_c \rho_c^2 (1 - \zeta/2)^2 I_1'], M_2 = (1 - \zeta/2) \rho_c FM(t), M = \pi \rho_c^2 (1 - \zeta/2) Mk, c_1, c_2, c_3, c_7, \dots, c_{12} \text{ 为待定积分常数.}$$

能量扰动方程 (23) 和 (24) 的解分别为^[8]

$$\begin{aligned} \hat{S}_1^{*i} = & \sum_{\gamma=1}^4 c_\gamma F_\gamma(\rho) + \epsilon_c Mk^{-1} F_5(\rho) \mathcal{L} r_c \\ & + \epsilon_c F_6(\rho) \mathcal{L} r_c + \epsilon_c FM(t) F_7(\rho) \mathcal{L} r_c \\ & + \dot{\epsilon}_c \tau Mk^{-1} F_8(\rho) \mathcal{L} r_c, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\hat{S}_1^{*e} = \sum_{\gamma=5}^{12} c_\gamma G_{\gamma-4}(\rho) + \dot{\epsilon}_c \tau Mk^{-1} G_9(\rho) \mathcal{L} r_c, \quad (33)$$

其中 $\tau = \pi r_c^2 \alpha / L$ 为特征时间常数, 而 $Mk = \alpha \mu_0 I / (\eta E_0)$ 为 Maecker 数. F_y, G_y 的表达式见文献 [9].

4. 边界条件

考虑了气流作用后, 边界条件如下:

$$\hat{S}_1^*(\rho_w) = 0, \tag{34}$$

$$\hat{\omega}_{1\varphi}^*(\rho_w) + \alpha \hat{W}_1^* + \pi^2 \rho_c^3 \hat{S}_1^* / Mk \Big|_{\rho=\rho_w} = 0$$

$$(\rho = \rho_w), \tag{35}$$

$$\hat{\omega}_{1r}^*(\rho_w) = 0, \tag{36}$$

$$\hat{W}_1^*(\rho_w) = 0, \tag{37}$$

$$\hat{S}_1^* = 0, \tag{38}$$

$$d\hat{q}_1^* / d\rho + ik(\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{B}})_\lambda \Big|_{\rho=\rho_c} (\mu_0 j_0^2 \rho_c)$$

$$- \epsilon_c \frac{\eta k^3 i}{\mu_0 j_0^2 \rho_c} \frac{\partial v_{0z}(r)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_c} = 0, \tag{39}$$

$$d\hat{\omega}_{1z}^* / d\rho - \hat{q}_1^* / \rho$$

$$+ ik(\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{B}})_\lambda \Big|_{\rho=\rho_c} (\mu_0 j_0^2 \rho_c) = 0, \tag{40}$$

$$\hat{q}_1^* + ik(\mathbf{j} \times \hat{\mathbf{B}})_z \Big|_{\rho=\rho_c} (\mu_0 j_0^2 \rho_c)$$

$$+ \epsilon_c \frac{\eta k^3 i}{\mu_0 j_0^2 \rho_c^2} \frac{\partial v_{0z}(r)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_c} = 0, \tag{41}$$

$$\hat{\omega}_{1z}^* = 0, \tag{42}$$

$$\hat{W}_1^* = 0, \tag{43}$$

$$d\hat{S}_1^* / d\rho = \frac{\epsilon_c}{\pi \rho_c r_c}, \tag{44}$$

$$d\hat{W}_1^* / d\rho + \pi^2 \rho_c^3 d\hat{S}_1^* / d\rho / Mk$$

$$- \epsilon_c \frac{\eta k^3 i}{\mu_0 j_0^2 \rho_c} \frac{\partial v_{0z}(r)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_c} = 0, \tag{45}$$

$$k\epsilon_c dS_0 / d\rho \Big|_{\rho=\rho_c} + \hat{S}_1(\rho_c) = 0. \tag{46}$$

5. 螺旋不稳定性分析, 计算结果与讨论

将扰动方程的解代入上述边界条件, 可得矩阵形式的方程组

$$MC_\epsilon = 0.$$

令相应矩阵 M 的行列式等于零, 可求得色散关系, 进而可求得不稳定性增长率等结果.

计算中, 部分参数取自文献 [2], 例如: $r_c / R = 0.11, R = 10\text{mm}, I = 18\text{A}$. 对于等离子体平衡流 (13) 和 (14) 式取 $a = -0.1, b = -0.05\text{m/s}, \omega_0 = 0.1\text{rad/s}$, 计算结果分析如下:

5.1. 外加磁场对电弧稳定性的影响

选取 $\xi = 0.005$. 从图 1 和图 2 可以看出, 存在气流作用下, 外加轴向磁场对电弧的稳定性影响显著, 而且正负轴向磁场对电弧的影响不同. 图 1 示出加正轴向磁场 ($FM > 0$) 时, 临界 Maecker 数 Mk_c 小于不加磁场的情况, 电弧稳定区域减小, 而加负轴向磁场 ($FM < 0$) 时, 临界 Maecker 数 Mk_c 在某个范围的值明显大于不加磁场的情况, 电弧稳定区域增大. 图 2 示出加正轴向磁场时, 电弧不稳定性增长率 Ω_0 增大, 不利于电弧的稳定; 而加负轴向磁场时, 电弧不稳定性增长率 Ω_0 在某个范围的值小于不加磁场的情况, 有利于电弧的稳定.

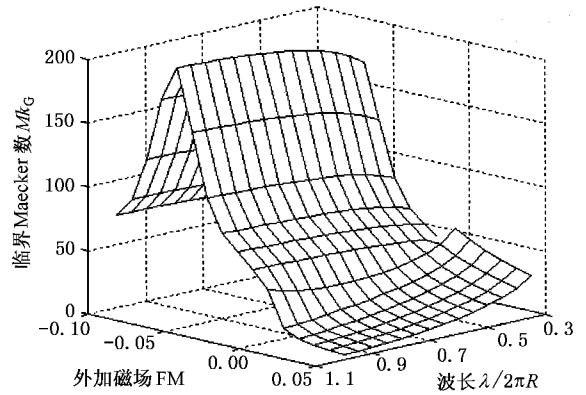


图 1 外加磁场 FM 取值 $-0.10 \sim 0.05$, 临界 Maecker 数 Mk_c 随波长 $\lambda/2\pi R$ 的变化曲线

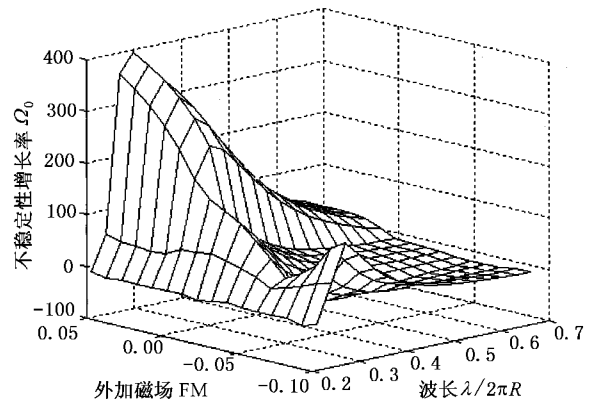


图 2 外加磁场 FM 取值 $-0.10 \sim 0.05$, 不稳定性增长率 Ω_0 随波长 $\lambda/2\pi R$ 的变化曲线

5.2. 弧柱半径对电弧稳定性的影响

选取 $\xi = 0.005, FM = 0$. 从图 3 可以看出, 存在

气流作用下,临界 Maecker 数 Mk_G 随着弧柱半径增大而增大,电弧的稳定区域增大.但是图 4 示出随着弧柱半径增大,电弧不稳定性 Ω_0 增长率也增大,不利于电弧的稳定.

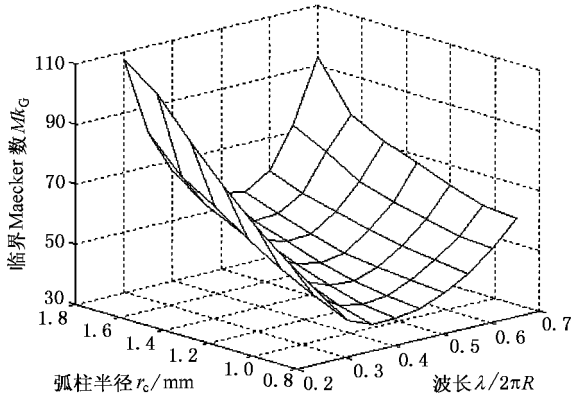


图 3 弧柱半径 r_c 取值 0.9—1.8mm, 临界 Maecker 数 Mk_G 随波长 $\lambda/2\pi R$ 变化的曲线

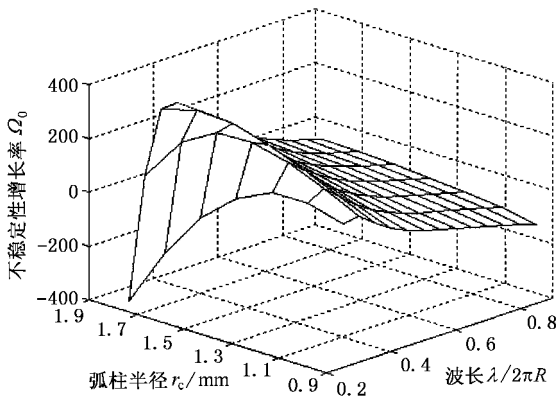


图 4 弧柱半径 r_c 取值 0.9—1.8mm, 不稳定性增长率 Ω_0 随波长 $\lambda/2\pi R$ 变化的曲线

5.3. 电导率对电弧稳定性的影响

选取 $FM = 0$. 从图 5 可以看出,存在气流作用下,电弧的不稳定性增长率 Ω_0 随着电导率增大而略有减小,对电弧的稳定性影响不大.

5.4. 电流对电弧稳定性的影响

选取 $\xi = 0.005$, $FM = 0$. 电流对电弧稳定作用的讨论只限于电流大小对电弧不稳定性的影响,从图 6 可以看出,存在气流作用下,电弧不稳定性增长

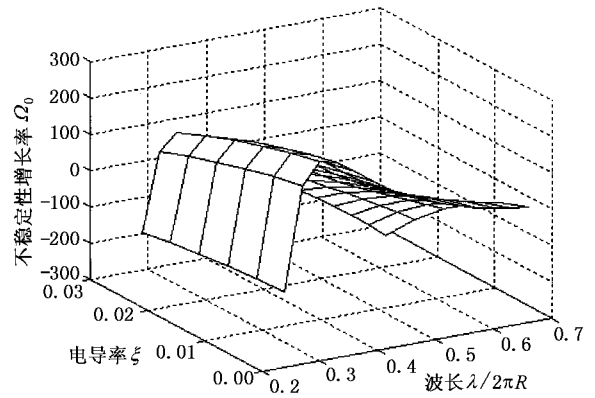


图 5 电导率 ξ 取值 0—0.025, 不稳定性增长率 Ω_0 随波长 $\lambda/2\pi R$ 变化的曲线

率 Ω_0 随着电流的增大而明显增大,电弧稳定性减弱,这与实际情况相符合.

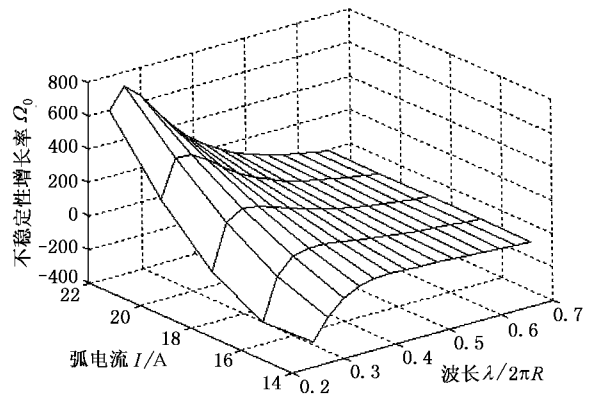


图 6 弧电流 I 取值 14—22A, 不稳定性增长率 Ω_0 随波长 $\lambda/2\pi R$ 变化的曲线

6. 结 论

存在气流作用下,本文得到以下结论:

1. 外加轴向磁场对电弧稳定性影响显著,这里负轴向磁场对电弧起稳定性作用;
2. 随着弧柱半径的增加,电弧的稳定区域增大,同时不稳定性增长率也增大,所以弧柱半径太大或太小都不利于电弧的稳定;
3. 电导率对电弧的稳定性影响不大;
4. 电弧的稳定性随着电流增大而减弱.

- [1] Huelsmann H G and Mentel J 1987 *Phys. Fluids* **30** 2266
- [2] Huelsmann H G and Mentel J 1987 *Phys. Fluids* **30** 2274
- [3] Liu J Y *et al* 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 608 (in Chinese) [刘金远等 1996 物理学报 **45** 608]
- [4] Liu J Y *et al* 1997 *J. Dalian Univ. Technol.* **37** 187 (in Chinese) [刘金远等 1997 大连理工大学学报 **37** 187]
- [5] Liu J Y *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 502 (in Chinese) [刘金远等 2000 物理学报 **49** 502]
- [6] Gong Y *et al* 2001 *Phys. Plasmas* **8** 3833
- [7] Zhang P Y *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1525 (in Chinese) [张鹏云等 1997 物理学报 **46** 1525]
- [8] Gong J Q *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 291 (in Chinese) [宫继全等 2002 物理学报 **51** 291]
- [9] Gong J Q 2001 *Thesis for Master Degree* Dalian University of Technology (in Chinese) [宫继全 2001 硕士学位论文 (大连理工大学)]

The effect of external magnetic field , current and arc column radius on the arc helical instability *

Zou Xiu Gong Ye Liu Jin-Yuan Gong Ji-Quan

(*State Key Laboratory of Materials Modification by Laser , Ion and Electron Beams , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China*)

(Received 31 December 2002 ; revised manuscript received 5 March 2003)

Abstract

The effect of external magnetic field , current and arc column radius on the helical instability is studied by using linear time perturbation theory in this paper. The arc has the effect of gas flow. The stability conditions and the growth rate of the helical instability are given.

Keywords : arc , stability , axial magnetic field , arc column radius

PACC : 5280 , 5230 , 5265

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19875007).