第 53 卷 第 4 期 2004 年 4 月
1000-3290/2004/53(04)/0984-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.4, April, 2004

弱相互作用费米气体的热力学性质*

苏国珍 陈丽璇

(厦门大学物理系，厦门 361005)

(2003 年 3 月 14 日收到；2003 年 4 月 22 日收到修改稿)

根据赝势法导出无外势时弱相互作用费米气体的化学势、内能和定容热容的解析表达式. 在此基础上，采用局域密度近似研究谐振势中弱相互作用费米气体的热力学性质，探讨粒子间相互作用对系统性质的影响.

关键词：费米气体，相互作用，赝势法，局域密度近似，热力学性质

PACC：0520，1230，3120J

1. 引 言

自 1995 年以来，囚禁超冷玻色气体实验的成功[1—6]以及囚禁超冷费米气体实验的进展[7—9]，极大刺激了人们对超冷量子气体进行理论研究的兴趣. 相比而言，对稀薄玻色气体的理论研究是大量的[10—17]，而对费米气体的研究就较少[18—20]. 费米气体虽然不能像玻色气体那样在低温下发生玻色-爱因斯坦凝聚现象，然而简并的费米气体系统的低温行为也值得关注，何况在适当的条件下费米子还能形成库柏对，有玻色系统所具有的一些宏观量子效应，如超导、超流等等[21].

量子气体粒子间都存在弱相互作用，这种相互作用对系统的性质产生重要的影响. 20 世纪 50，60 年代，著名的美籍华人物理学家黄克逊、杨振宁和李政道等首次将 1936 年费米提出的‘赝势法’应用于研究弱相互作用玻色气体，解析地求解了非理想玻色气体的热力学性质[22—25]. 他们的研究成果对其后非理想玻色气体的理论研究产生重要的影响. 不论是求解非线性薛定谔方程(Gross-Pitaevskii 方程)或是作数值运算，都是在黄、杨、李等人研究的基础上考虑相互作用项的影响. 然而，有关粒子间相互作用对费米气体性质的影响，研究还相对较少. 这大概与费米系统本身所具有的特性有关. 由于描述费米子的波函数具有反对称性，处在同一自旋态的两个费米子不可能有 s 波散射，因而通常反映其相互作用的 s 波散射振幅为零，而下一级的 p 波散射在低能情况下又非常弱，所以常将费米系统看作理想的系统. 然而，对于那些具有超精细能态结构的费米子系统，情况就大不相同. 此时，处在两个不同超精细能态上的费米子，由 s 波散射将产生较强的相互作用. 例如^{6}Li原子有 6 个超精细能态，原子间由于存在 s 波散射而产生吸引相互作用，其 s 波散射长度 $a \approx -2160 a_B$[19,26] (其中 a_B 为玻尔半径). 对于这类费米系统，由 s 波散射产生的相互作用显然不能忽略，从而研究系统性质时进一步考虑粒子间相互作用的影响是有必要的.

本文运用赝势法和局域密度近似研究弱相互作用费米气体的热力学性质. 主要内容有：(1) 根据由赝势法求出的非理想费米系统的能谱，导出无外势时弱相互作用费米气体的化学势、总能和定容热容的解析表达式. (2) 在此基础上，进一步采用局域密度近似研究谐振势中弱相互作用费米气体的热力学性质. (3) 对所得结果作进一步讨论，着重探讨各热力学量随温度的变化规律以及粒子间相互作用对系统性质的影响.

2. 原理与计算

2.1. 无外势的情况

考虑一限定在体积 V 中的 N 个弱相互作用，自旋 1/2 的费米子组成的系统. 通过赝势法可导出系

* 国家自然科学基金(批准号：10275051)和厦门大学校级自选课题基金(批准号：Y07008)资助的课题.

统的能谱为[27,28]

$$E = \sum_{p} (n_p^+ + n_p^-) \frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi a\hbar^2}{mV} N^+ N^-, \quad (1)$$

式中 n_p^+ (n_p^-) 表示处于动量为 p 的量子态且自旋向上(向下)的粒子数, N^+ (N^-) 表示自旋向上(向下)的总粒子数, m 为单粒子质量, $\hbar = h/(2\pi)$, h 为普朗克常量, a 为粒子间二体相互作用的 s 波散射长度,满足弱相互作用条件

$$|a|/\lambda \ll 1, \qquad |a| n^{1/3} \ll 1, \quad (2)$$

其中 $\lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T}$ (k_B 为玻尔兹曼常数, T 为温度)为热波长, $n = N/V$ 为粒子数密度.

根据(1)式可得系统的配分函数

$$Q = \sum_{\{n_p^+, n_p^-\}} \exp\left\{ -\beta\left[\sum_p (n_p^+ + n_p^-) \frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi a\hbar^2}{mV} N^+ N^- \right]\right\} = \sum_{N^+=0}^{N} \exp\left\{ -\beta\left[A_0(N^+) + A_0(N - N^+) + \frac{4\pi a\hbar^2}{mV} N^+ (N - N^+) \right]\right\}, \quad (3)$$

式中 $\beta = 1/(k_B T)$, $\sum_{\{n_p^+, n_p^-\}}$ 为对所有满足 $\sum_p (n_p^+ + n_p^-) = N$ 的分布 $\{n_p^+, n_p^-\}$ 求和,仿照黄克逊、杨振宁等处理非理想玻色气体的方法,我们引进 $A_0(\xi) = -(1/\beta)\ln\sum_{\{\xi_p\}}\exp(-\beta\sum_p \xi_p p^2/2m)$ 表示限定在体积 V 中的 ξ 个"无自旋的"、无相互作用的费米子所组成的一个"虚构系统"的自由能[27,28],其中 $\sum_{\{\xi_p\}}$ 为对所有满足 $\sum_P \xi_p = \xi$ 的分布 $\{\xi_p\}$ 求和.

由(3)式得系统的自由能

$$A = -\frac{1}{\beta}\ln\sum_{N^+=0}^{N} \exp\left\{ -\beta\left[A_0(N^+) + A_0(N - N^+) + \frac{4\pi a\hbar^2}{mV} N^+ (N - N^+) \right]\right\}. \quad (4)$$

对于含有大量粒子的宏观系统,(4)式中和式的对数可近似等于和式中最大项的对数,并可以证明在满足 $k_{F0} a < \pi/2$(其中 $k_{F0} = (3\pi^2 n)^{1/3} = \sqrt{2mE_{F0}}/\hbar$ 为对应于费米能级 E_{F0} 的波数)的条件下, $N^+ = N/2$ 时(4)式求和项最大[27,28].对弱相互作用系统,总有 $k_{F0} a < \pi/2$,所以(4)式可表示为

$$A = 2A_0(N/2) + \frac{\pi a\hbar^2 N^2}{mV}. \quad (5)$$

对于 $N/2$ 个"无自旋(自旋简并度 $g = 1$)"、无相互作用的费米子组成的'虚构系统",其自由能[27,28]

$$A_0(N/2) = \frac{N}{2} k_B T\left[\ln z_0 - \frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} \right], \quad (6)$$

式中费米积分

$$f_l(x) = \frac{1}{\Gamma(l)}\int_0^\infty \frac{t^{l-1}\mathrm{d}t}{x^{-1}e^t + 1} \xrightarrow{x \leqslant 1} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i^l}, \quad (7)$$

且具有性质

$$x\frac{\mathrm{d}f_l(x)}{\mathrm{d}x} = f_{l-1}(x). \quad (8)$$

这里 z_0 表示该"虚构系统"的逸度,满足以下关系[27,28]:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{2}{\lambda^3} f_{3/2}(z_0). \quad (9)$$

比较(9)式和理想费米系统(自旋简并度为 g)的基本方程[27,28]

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}(z_0) \quad (10)$$

可知, z_0 既可表示 $N/2$ 个"无自旋($g = 1$)"、无相互作用的费米子组成的'虚构系统'的逸度,也可表示 N 个自旋 1/2($g = 2$)的费米子组成的理想费米系统的逸度.综合(5),(6)和(9)式,可得弱相互作用费米气体的自由能

$$A = Nk_B T\left[-\frac{2}{\lambda^3 n} f_{5/2}(z_0) + \ln z_0 + \frac{1}{2} a\lambda^2 n \right]. \quad (11)$$

根据(9)和(11)式可求出系统的化学势、内能和定容热容分别为

$$\mu = k_B T[\ln z_0 + a\lambda^2 n], \quad (12)$$

$$U = Nk_B T\left[\frac{3}{n\lambda^3} f_{5/2}(z_0) + \frac{1}{2} a\lambda^2 n \right], \quad (13)$$

$$C_V = Nk_B\left[\frac{15}{4}\frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} - \frac{9}{4}\frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)} \right], \quad (14)$$

式中 z_0 由(9)式决定.

当温度较高时, $z_0 \leqslant 1$,(9)和(12)—(14)式中的费米积分可以按(7)式展开成级数形式.而当系统的温度很低时, z_0 可能变得很大,这时可应用 Sommerfeld 引理将费米积分对大宗量 $\ln z_0$ 作渐近展开[27],

$$f_l(z_0) = \frac{(\ln z_0)^l}{\Gamma(l+1)}\left[1 + l(l-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\ln z_0)^2} + \cdots \right]. \quad (15)$$

将(15)式代入(9)和(12)—(14)式,可将低温极限下

系统的化学势、总能和定容热容表示为温度的显函数,其结果分别为

$$\mu = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_{F0}}\right)^2 + \frac{8}{3\pi^{1/2}}\frac{a}{\lambda_{F0}}\right], \tag{16}$$

$$U = \frac{3}{5}NE_{F0}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_{F0}}\right)^2 + \frac{20}{9\pi^{1/2}}\frac{a}{\lambda_{F0}}\right], \tag{17}$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{2}Nk_B\left(\frac{T}{T_{F0}}\right), \tag{18}$$

式中 $E_{F0} = (\hbar^2/2m)(3\pi^2 n)^{2/3}$ 为理想费米系统的费米能[27], $T_{F0} = E_{F0}/k_B$ 为费米温度, $\lambda_{F0} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_B T_{F0}}$.以上推导过程中只保留到小量 T/T_{F0} 的二次项.由(16)和(17)式可得非理想费米系统的费米能和基态能分别为

$$E_F = E_{F0}\left(1 + \frac{8}{3\pi^{1/2}}\frac{a}{\lambda_{F0}}\right), \tag{19}$$

$$U_0 = \frac{3}{5}NE_{F0}\left(1 + \frac{20}{9\pi^{1/2}}\frac{a}{\lambda_{F0}}\right). \tag{20}$$

从以上诸式可明显地看到相互作用对系统热力学性质带来的修正.

2.2. 谐振势约束的情况

现考虑一约束在谐振外势

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2) \tag{21}$$

中的弱相互作用费米气体,式中 x, y 和 z 为粒子的位置坐标, ω_x, ω_y 和 ω_z 为谐振势沿三个坐标轴的角频率.

当有外势存在时,粒子在空间的分布是不均匀的,粒子数密度 n 是空间位置 $\boldsymbol{r}$ 的函数.若系统的粒子数足够大,粒子的能级间隔远小于粒子的动能,我们可以将空间分成许多小格.同一格中外势可看作常数,因而每个小格可视为一个含有大量粒子数的均匀子系统,在 $\boldsymbol{r}$ 处小格内的粒子数密度 $n(\boldsymbol{r})$ 也为常数,称为局域密度.这样的理论处理方法称为局域密度近似.从已有的实验数据发现,对于粒子数足够大的宏观系统,局域密度近似是一种很好的近似方法[29,30].

由统计物理知识可知,处于外势中的非均匀系统达到平衡时,系统的化学势应该处处相等[29],且可表示为

$$\mu = \mu^{in}[n(\boldsymbol{r})] + V(\boldsymbol{r}), \tag{22}$$

式中 $\mu^{in}[n(\boldsymbol{r})]$ 为 $\boldsymbol{r}$ 处的"内化学势",在局域密度近似下它等于无外势时密度为 $n(\boldsymbol{r})$ 的均匀费米系统的化学势.由(12)和(22)式可得

$$\mu = k_B T[\ln z_0^{in}(\boldsymbol{r}) + a\lambda^2 n(\boldsymbol{r})] + V(\boldsymbol{r}), \tag{23}$$

式中 $z_0^{in}(\boldsymbol{r})$ 满足

$$n(\boldsymbol{r}) = \frac{2}{\lambda^3}f_{3/2}[z_0^{in}(\boldsymbol{r})]. \tag{24}$$

根据(23)和(24)式,若保留到小量 a/λ 的一次项, $z_0^{in}(\boldsymbol{r})$ 和 $n(\boldsymbol{r})$ 可分别表示为

$$z^{in}(\boldsymbol{r}) \approx z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})] \times \left\{1 - \frac{2a}{\lambda}f_{3/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\}\right\}, \tag{25}$$

$$n(\boldsymbol{r}) \approx \frac{2}{\lambda^3}f_{3/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\} \times \left\{1 - \frac{2a}{\lambda}f_{1/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\}\right\}, \tag{26}$$

式中 $z = \exp(\beta\mu)$ 为系统的逸度.

类似地,非均匀系统空间 $\boldsymbol{r}$ 处的能量密度 $u(\boldsymbol{r})$ 可表示为

$$u(\boldsymbol{r}) = u^{in}[n(\boldsymbol{r})] + n(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r}), \tag{27}$$

式中 $u^{in}[n(\boldsymbol{r})]$ 为"内能量密度",在局域密度近似下它等于无外势时密度为 $n(\boldsymbol{r})$ 的均匀费米系统的能量密度.根据(13),(25),(26)和(27)式可得

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) &= k_B T\left\{\frac{3}{\lambda^3}f_{5/2}[z_0^{in}(\boldsymbol{r})] + \frac{1}{2}a\lambda^2 n^2(\boldsymbol{r})\right\} + n(\boldsymbol{r})V(\boldsymbol{r}) \\ &\approx \frac{k_B T}{\lambda^3}\Big\{3f_{5/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\} + 2\beta V(\boldsymbol{r})f_{3/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\} \\ &\quad - \frac{4a}{\lambda}[f_{3/2}^2\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\} + \beta V(\boldsymbol{r})f_{3/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\}f_{1/2}\{z\exp[-\beta V(\boldsymbol{r})]\}]\Big\}. \end{aligned} \tag{28}$$

(26)和(28)式分别给出了外势中弱相互作用费米系统的粒子数密度和能量密度在空间的分布.将外势的表达式(21)代入(26)和(28)式,并对空间积分可得系统的总粒子数和总能的表达式

$$N = \int n(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3\left[2f_3(z) - \frac{4a}{\lambda}F_{3/2,1/2,3/2}(z)\right], \tag{29}$$

$$U = \int u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = k_B T\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^3\left[6f_4(z) - \frac{14a}{\lambda}F_{3/2,1/2,5/2}(z)\right], \tag{30}$$

式中

$$\omega \equiv (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3},$$

$$F_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty f_\alpha(xe^{-t})f_\beta(xe^{-t})t^{\gamma-1}\mathrm{d}t \xrightarrow{x\leqslant 1} \sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}x^{i+j}}{i^\alpha j^\beta(i+j)^\gamma}, \quad (31)$$

且具有性质

$$x\frac{\mathrm{d}F_{\alpha,\beta,\gamma}(x)}{\mathrm{d}x} = F_{\alpha,\beta,\gamma-1}(x). \quad (32)$$

(30)式以系统的逸度 z 作为中间变量给出系统总能的解析表示,其中逸度 z 由总粒子数的表达式(29)确定.从(29)式可看出,系统的逸度 z 与相互作用有关.为了使我们的结果能更明显地反映出由于相互作用而带来的修正,我们引进系统的'无相互作用逸度"z_0.根据(29)式可知,z_0 满足

$$N = 2\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega}\right)^3 f_3(z_0). \quad (33)$$

由(29)和(33)式可得

$$z \approx z_0\left[1+\frac{2a}{\lambda}\frac{F_{3/2,1/2,3/2}(z_0)}{f_2(z_0)}\right]. \quad (34)$$

将(34)式代入(30)式和 $\mu = k_\mathrm{B}T\ln z$,同时结合(33)式,可将 μ 和 U 表示为 z_0 的函数,其结果为

$$\mu = k_\mathrm{B}T\left[\ln z_0 + \frac{2a}{\lambda}\frac{F_{3/2,1/2,3/2}(z_0)}{f_2(z_0)}\right], \quad (35)$$

$$U = Nk_\mathrm{B}T\left\{\frac{3f_4(z_0)}{f_3(z_0)} + \frac{a}{\lambda}\left[\frac{6F_{3/2,1/2,3/2}(z_0)}{f_2(z_0)} - \frac{7F_{3/2,1/2,5/2}(z_0)}{f_3(z_0)}\right]\right\}. \quad (36)$$

给定外势和总粒子数下系统的热容可由下式计算:

$$C = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{z_0} + \left(\frac{\partial U}{\partial z_0}\right)_T\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}T}. \quad (37)$$

根据(33),(36)和(37)式可求得

$$C = Nk_\mathrm{B}\left\{\frac{12f_4(z_0)}{f_3(z_0)} - \frac{9f_3(z_0)}{f_2(z_0)} + \frac{a}{\lambda}\left\{\frac{30F_{3/2,1/2,3/2}(z_0)}{f_2(z_0)} - \frac{63}{2}\frac{F_{3/2,1/2,5/2}(z_0)}{f_3(z_0)} - \frac{18f_1(z_0)f_3(z_0)}{f_2^2(z_0)}\left[\frac{F_{3/2,1/2,1/2}(z_0)}{f_1(z_0)} - \frac{F_{3/2,1/2,3/2}(z_0)}{f_2(z_0)}\right]\right\}\right\}. \quad (38)$$

与无外势时的处理方法类似,当系统温度极低,使得 $z_0\gg 1$ 时,以上表达式中的费米积分 $f_l(z_0)$ 可按(15)式对大宗量 $\ln z_0$ 作渐近展开.相应地,函数 $F_{\alpha,\beta,\gamma}(z_0)$ 可表示为

$$\begin{aligned}F_{\alpha,\beta,\gamma}(z_0) &\approx \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma)}\int_0^{\ln z_0}(\ln z_0 - t)^{\alpha+\beta}\\&\quad\times\left[1+\alpha(\alpha-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\ln z_0 - t)^2}+\cdots\right]\\&\quad\times\left[1+\beta(\beta-1)\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\ln z_0 - t)^2}+\cdots\right]t^{\gamma-1}\mathrm{d}t\\&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)(\ln z_0)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}\\&\quad\times\left\{1+\frac{[\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)](\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}\right.\\&\quad\left.\times\frac{\pi^2}{6}\frac{1}{(\ln z_0)^2}+\cdots\right\}.\end{aligned} \quad (39)$$

将(15)和(39)式代入(33),(35),(36)和(38)式,可得约束在谐振势中弱相互作用费米气体的化学势、总能和热容在低温极限下的解析表示,其结果分别为

$$\mu = E_{\mathrm{F}0}\left\{1-\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}0}}\right)^2+\frac{1024}{315\pi^{3/2}}\frac{a}{\lambda_{\mathrm{F}0}}\left[1-\frac{15\pi^2}{32}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}0}}\right)^2\right]\right\}, \quad (40)$$

$$U = \frac{3}{4}NE_{\mathrm{F}0}\left\{1+\frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}0}}\right)^2+\frac{8192}{2835\pi^{3/2}}\frac{a}{\lambda_{\mathrm{F}0}}\left[1+\frac{27\pi^2}{32}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{F}0}}\right)^2\right]\right\}, \quad (41)$$

$$C = Nk_\mathrm{B}\left(\pi^2+\frac{128\pi^{1/2}}{35}\frac{a}{\lambda_{\mathrm{F}0}}\right)\frac{T}{T_{\mathrm{F}0}}, \quad (42)$$

式中 $E_{\mathrm{F}0} = \hbar\omega(3N)^{1/3}$ 为谐振势约束下理想费米系统的费米能[18],$T_{\mathrm{F}0} = E_{\mathrm{F}0}/k_\mathrm{B}$ 为费米温度,$\lambda_{\mathrm{F}0} = \sqrt{2\pi\hbar^2/mk_\mathrm{B}T_{\mathrm{F}0}}$.由(40)和(41)式可得系统的费米能和基态能分别为

$$E_\mathrm{F} = E_{\mathrm{F}0}\left(1+\frac{1024}{315\pi^{3/2}}\frac{a}{\lambda_{\mathrm{F}0}}\right), \quad (43)$$

$$U_0 = \frac{3}{4}NE_{\mathrm{F}0}\left(1+\frac{8192}{2835\pi^{3/2}}\frac{a}{\lambda_{\mathrm{F}0}}\right). \quad (44)$$

从以上诸式可明显地看到相互作用对谐振势约束费米系统热力学性质带来的修正.

3. 结果与讨论

根据(9),(12)—(14)及(33),(35),(36)和(38)式可分别得到无外势及谐振势约束两种情况下系统的化学势、总能和热容与温度的关系,相应曲线如图1—图3所示,其中嵌入图给出因粒子间相互作用所引起各热力学量的变化量与温度的关系.从图中可

以看出，在无外势的情况下，若只计及二体相互作用的 s 波散射，相互作用使得系统的化学势和内能发生变化，但不影响定容热容. 粒子间的相互作用仿佛使得每个粒子本身浮在一均匀势的平台上，它所引起的化学势和内能的变化量与温度无关. 这一结果不难理解，因为相互作用对系统影响的大小主要取决于粒子数密度和散射长度. 对于处在一定体积中通过刚球势发生相互作用的费米子气体，这两者随温度的变化都很小. 对于约束在谐振势中的费米系统，情况则有所不同. 此时粒子间的相互作用不但影响化学势和总能，还使得系统的热容发生变化. 相互作用对各热力学量的影响与温度有关，且在低温区的影响较高温区显著. 这一结果的物理意义也是明显的. 从(26)式可知，对于约束在谐振势中的费米子，温度的变化将直接影响粒子数密度在空间的分布. 在低温区，粒子热运动的动能较小，外势的作用使得粒子较集中地分布在外势中心 $r=0$ 附近，从而使得相互作用所带来的影响较大；在高温区，粒子热运动加剧，其在空间的分布趋于分散，因而使得相互作用的影响较小. 从图中还可看出，在任何温度下，排斥相互作用($a>0$)总是使得系统的化学势和内能增大，而吸引相互作用($a<0$)总是使得化学势和内能减小. 然而相互作用对热容的影响则在不同温区呈现不同的特征. 在低温区，排斥(吸引)作用使得热容增大(减小)；而在高温区，排斥(吸引)作用使得热容减小(增大). 这一结果与文献[19]的结论相符.

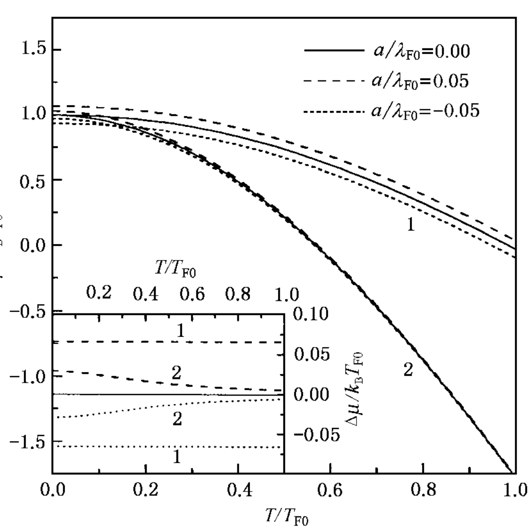

图 1　不同散射长度下化学势与温度的关系曲线　曲线 1 为无外势，曲线 2 为谐振势

虽然本文研究的是弱相互作用费米系统的热力

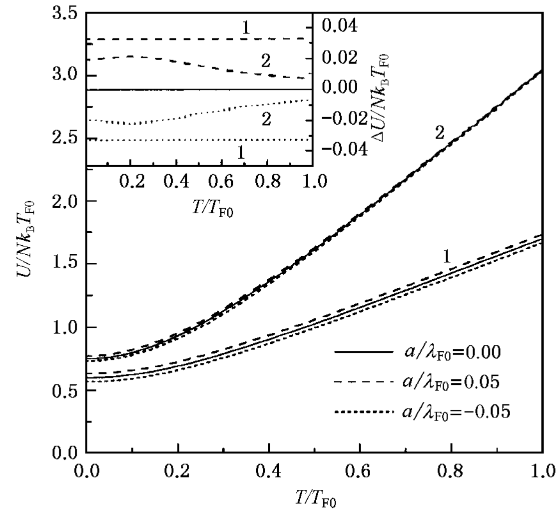

图 2　不同散射长度下总能与温度的关系曲线　曲线 1 为无外势，曲线 2 为谐振势

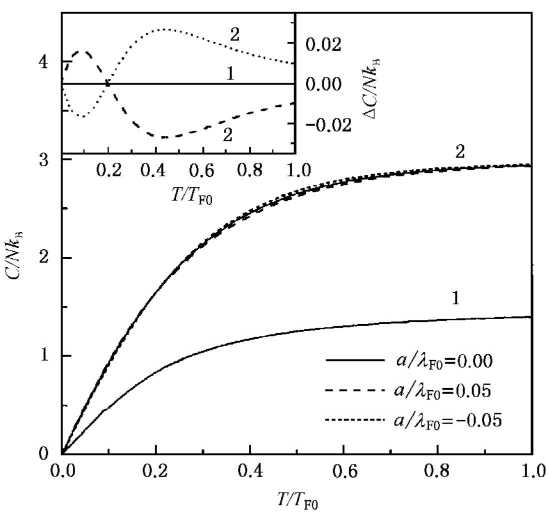

图 3　不同散射长度下热容与温度的关系曲线　曲线 1 为无外势，曲线 2 为谐振势

学性质，其结果也适用于无相互作用的理想费米系统. 只要令 $a=0$，则(12)—(14)和(16)—(20)式分别简化为

$$\mu = k_B T \ln z_0 , \tag{45}$$

$$U = \frac{3Nk_BT}{n\lambda^3} f_{5/2}(z_0) = \frac{3}{2}Nk_BT\frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)}, \tag{46}$$

$$C_V = Nk_B\left[\frac{15}{4}\frac{f_{5/2}(z_0)}{f_{3/2}(z_0)} - \frac{9}{4}\frac{f_{3/2}(z_0)}{f_{1/2}(z_0)}\right] \tag{47}$$

和

$$\mu = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_{F0}}\right)^2\right], \tag{48}$$

$$U = \frac{3}{5}NE_{F0}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_{F0}}\right)^2\right], \tag{49}$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{2}Nk_B\left(\frac{T}{T_{F0}}\right), \tag{50}$$

$$E_F = E_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}, \tag{51}$$

$$U_0 = \frac{3}{5}NE_{F0}. \tag{52}$$

(45)—(52)式正是许多教科书上得到的结果[27,28]. 而只要在(35),(36),(38)和(40)—(44)式中令 $a = 0$,则可得

$$\mu = k_B T \ln z_0, \tag{53}$$

$$U = 3Nk_B T\frac{f_4(z_0)}{f_3(z_0)}, \tag{54}$$

$$C = Nk_B\left[\frac{12f_4(z_0)}{f_3(z)} - \frac{9f_3(z)}{f_2(z_0)}\right] \tag{55}$$

和

$$\mu = E_{F0}\left[1 - \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_{F0}}\right)^2\right], \tag{56}$$

$$U = \frac{3}{4}NE_{F0}\left[1 + \frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_{F0}}\right)^2\right], \tag{57}$$

$$C = \pi^2 Nk_B\left(\frac{T}{T_{F0}}\right), \tag{58}$$

$$E_F = E_{F0} = \hbar\omega(3N)^{1/3}, \tag{59}$$

$$U_0 = \frac{3}{4}NE_{F0}. \tag{60}$$

(53)—(60)式与文献[18]在空间维数 $n = 3$,外势为谐振势时的结果也完全相同.

4. 结　论

本文研究了无外势和谐振势约束两种情况下弱相互作用费米气体的热力学性质,导出系统的化学势、总能和热容的解析表达式,并讨论了外势和粒子间相互作用对系统性质的影响.研究结果表明,无外势情况下粒子间的相互作用在各温度下统一地提高($a > 0$ 时)或降低($a < 0$ 时)系统的化学势和总能,但不影响定容热容.而在谐振势约束的情况下,相互作用使得费米系统的化学势、总能和热容都发生变化,且改变量与温度有关.虽然本文所讨论的是弱相互作用费米系统,其结果在特定条件下也适用于无相互作用的费米系统,这表明本文的结果更具普遍性.

[1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R *et al* 1995 *Science* **269** 198

[2] Bradley C C, Sackett C A, Tollett J J *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1687

[3] Davis K B, Mewes M O, Andrew M R *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969

[4] Fried D G, Killian T C, Willmann L *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3811

[5] Yin J P, Gao W J, Liu N C *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 660 (in Chinese) [印建平、高伟建、刘南春等 2001 物理学报 **50** 660]

[6] Tiecke T G, Kemmann M, Buggle C *et al* 2003 *J. Opt.* B **269** S119

[7] McAlexander W I, Abraham E R I, Ritchie N W M *et al* 1995 *Phys. Rev.* A **51** R871

[8] Cataliotti F S, Cornell E A, Fort C *et al* 1998 *Phys. Rev.* A **57** 1136

[9] DeMarco B, Jin D S 1999 *Science* **285** 1703

[10] Bagnato V, Pritchard D E, Kleppner D 1987 *Phys. Rev.* A **35** 4354

[11] Shi H L, Zheng W M 1998 *Physica* A **258** 303

[12] Zhang S M, Ye F 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 977 (in Chinese) [张思溟、叶　飞 1999 物理学报 **48** 977]

[13] Yi X X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 995 (in Chinese) [衣学喜 1999 物理学报 **48** 995]

[14] Adhikari S K 2000 *Phys. Lett.* A **265** 91

[15] Chen L X, Yan Z J, Li M Z *et al* 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 8289

[16] Yan K Z, Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 (in Chinese) [闫珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909]

[17] Xiong H, Su G Z, Chen L X 2002 *Journal of Xiamen University* (Natural Science) **41** 177 (in Chinese) [熊　辉、苏国珍、陈丽璇 2002 厦门大学学报(自然科学版) **41** 177]

[18] Li M Z, Yan Z J, Chen J C *et al* 1998 *Phys. Rev.* A **58** 1445

[19] Bruun G M, Burnrtt K 1998 *Phys. Rev.* A **58** 2427

[20] Noronha J M B, Toms D J 2000 *Phys. Lett.* A **267** 276

[21] Stoof H T C, Houbiers M, Sackett C A *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 10

[22] Huang K, Yang C N 1956 *Phys. Rev.* **105** 767

[23] Huang K, Yang C N, Luttinger J M 1956 *Phys. Rev.* **105** 776

[24] Lee T D, Huang K, Yang C N 1957 *Phys. Rev.* **106** 1135

[25] Lee T D, Yang C N 1958 *Phys. Rev.* **112** 1419

[26] Abraham E R I, McAlexander W I, Gerton J M *et al* 1997 *Phys. Rev.* A **55** R3299

[27] Pathria R K 1972 *Statistical Mechanics* (Oxford, New York, Yoronto, Sydney, Braunschweig: Pergamon Press) p215, 300

[28] Huang K 1987 *Statistical Mechanics* (New York: Wiley) p224, 274
[29] Chou T T, Yang C N, Yu L W 1996 *Phys. Rev.* A **53** 4257
[30] Oliva J 1989 *Phys. Rev.* B **39** 4197

Thermodynamic properties of a weakly interacting Fermi gas*

Su Guo-Zhen Chen Li-Xuan
(*Department of Physics, Xiamen University, Xiamen* 361005, *China*)
(Received 14 March 2003; revised manuscript received 22 April 2003)

Abstract

The analytical expressions of chemical potential, total energy and heat capacity at a constant volume for a weakly interacting Fermi gas in the absence of external potential are derived by using "pseudopotential" method. Based on the derived expressions, the thermodynamic properties of a weakly interacting Fermi gas trapped in a harmonic potential are studied under the local-density approximation. The effects of interparticle interactions on the properties of the systems are discussed.

Keywords: Fermi gas, interaction, pseudopotential, local-density approximation, thermodynamic property
PACC: 0520, 1230, 3120J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10275051) and the Foundation of Self-selected Subject of Xiamen University, China (Grant No. Y07008).