第 53 卷 第 4 期 2004 年 4 月
1000-3290/2004/53(04)/0999-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.4,April,2004

基于观测器的混沌广义同步解析设计*

李国辉

(上海大学通信与信息工程学院,上海 200072)

(2003 年 6 月 13 日收到;2003 年 7 月 22 日收到修改稿)

提出用改进的状态观测器研究混沌广义同步问题.采用解析法求得了混沌广义同步的响应系统.从状态观测器理论,得到驱动和响应系统全局渐进线性广义同步的充分条件.以超混沌 Rössler 系统为例,数值研究了该同步方法.结果表明了它的有效性.

关键词:混沌,广义同步,状态观测器,Rössler 系统

PACC:0545

1.引 言

近来,混沌同步及其在保密通信中的应用已成为非线性科学中的一个热点,并先后提出了多种混沌同步的方法[1—4],大多讨论的是两个参数相同的非线性系统的完全同步,即 IS(identical synchronization).由于在实际中难以产生出两个完全相同的混沌系统,混沌系统之间常存在着参数摄动、传输信道失真等原因引起的不同步.1995 年,Rulkov 等[5]推广了混沌同步的概念,称之为广义同步,即 GS(generalized synchronization).所谓广义同步,是指响应系统的状态变量与驱动系统的状态变量的函数同步.因此,IS 可看作是 GS 的特例.由于 IS 发射的加密信号是变量信号,而 GS 发射的加密信号是函数信号,因此 GS 保密通信要比一般意义下的混沌同步保密通信具有更强的抗破译能力.GS 比 IS 的应用领域更为广泛,如文献[6]利用混沌 GS 设计了一种与信道无关的混沌保密通信系统.

文献[7]利用线性变换方法,研究了混沌线性 GS 问题,但该方法必须保证混沌系统的线性部分稳定,因此,它不适合混沌系统线性部分不稳定的情形.在分析混沌 GS 的稳定性时,人们通常采取条件 Lyapunov 指数或本征值的分析方法,但这些方法都不同程度地依赖于数值计算.本文将对状态观测器进一步扩展,通过人为配置同步速度,由预先确定的响应系统的状态变量与驱动系统状态变量的函数关系,完全采用解析的方法求得了混沌 GS 的响应系统.最后,本文把该方法应用于超混沌系统,通过数值模拟实现了四维超混沌系统 GS.

2.理论设计

考虑以下两个动力系统

$$\dot{x} = f(x), \tag{1a}$$

$$\dot{y} = g(x, y), \tag{1b}$$

式中,f,g 可以是不同的函数,$x \in R^n$,$y \in R^m$,(1a)式为驱动系统,(1b)式为响应系统.当 $t \to \infty$,如果 x 和 y 之间存在着稳定的、不随时间变化的函数关系 $y(t) = \varphi(x(t))$,即 $y(t)$ 的轨道由驱动信号 $x(t)$ 唯一决定,在 $y(t)$ 的邻域任意改变初值,响应系统都会趋于与初值无关的解 $y(t)$,则认为此时系统实现了 GS.如果 φ 为恒等映射,GS 即为 IS.

由状态观测器理论,设驱动系统(1a)为

$$\dot{x} = Ax + B \cdot F(x) + C, \tag{2}$$

其中 $A \in R^{n \times n}$,$B \in R^{n \times m}$,$C \in R^n$,$x \in R^n$,$F: R^n \to R^m$ $(m \leq n)$ 为非线性映射,Ax 为线性部分,$BF(x)$ 为非线性部分,C 为常值.

令(2)式的输出

$$h(x) = Kx + F(x), \tag{3}$$

其中 K 为待定增益常向量.本文将考虑线性广义同步,即设

* 上海市重点学科建设项目(批准号:2001-44)和上海市教育委员会青年基金(批准号:03AQ87)资助的课题.

$$\lim_{t\to\infty}\|x-Py-Q\|=0,\tag{4}$$

式中，$P\in R^{n\times n}$，$Q\in R^n$ 均为常数矩阵，且 P 满秩．以下将用解析法求响应系统（1b），并使之符合（4）式．

定理 1　设响应系统（1b）的输出

$$s(y)=K(Q+Py),\tag{5}$$

如果 $\{A,B\}$ 可控，且 $\mathrm{Re}(\lambda_i(A-BK))<0$，$i=1,2,\cdots,n$，则当响应系统（1b）满足

$$\dot{y}=P^{-1}A(Py+Q)+P^{-1}C+P^{-1}B(h(x)-s(y)),\tag{6}$$

由（1）式构成的驱动-响应系统满足线性广义同步（4）式，即 $\lim_{t\to\infty}\|x-Py-Q\|=0$．

证　设 $e=Py+Q-x$，由（2），（6）式得

$$\begin{aligned}\dot{e}&=P\dot{y}-\dot{x}\\&=A(Py+Q)+C+B(h(x)-s(y))\\&\quad-(Ax+BF(x)+C).\end{aligned}$$

将（3），（5）式代入上式，则

$$\dot{e}=(A-BK)e,\tag{7}$$

式中 $A-BK$ 为时不变矩阵．由于 $\mathrm{Re}(\lambda_i(A-BK))<0$，$i=1,2,\cdots,n$，因此，$\lim_{t\to\infty}\|x-Py-Q\|=0$，即由（1）式构成的驱动-响应系统满足线性广义同步（4）式．证毕．

注意：由以上定理可知，根据极点配置法，适当选择常数 K 使得 $A-BK$ 的特征根实部全负，则 $e\to 0$，得到两者实现 GS，由此，称（6）式为（2）式改进的状态观测器．

3．数值应用

考虑如下超混沌 Rössler 系统：

$$\dot{x}=Ax+x_1x_3(0,0,1,0)^{\mathrm{T}}+(0,0,3,0)^{\mathrm{T}},\tag{8}$$

其中

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in R^4,$$

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&-1&0\\1&0.25&0&1\\0&0&0&0\\0&0&-0.5&0.05\end{bmatrix},$$

$$B=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$C=(0,0,3,0)^{\mathrm{T}},$$

$$F(x)=[x_1x_3],$$

$$h(x)=x_1x_3+\sum_{i=1}^{4}k_ix_i.$$

可见，$\{A,B\}$ 可控，预先令

$$\begin{aligned}&\lambda_i(A-BK)\\&=[-2+2i,-2-2i,-2+i,-2-i],\end{aligned}$$

并设

$$P=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$Q=[1\quad 1\quad 1\quad 1].$$

由极点配置可知，存在一个增益向量 $K=[7.821,-33.92,8.3,-76.6]$ 使得系统（6）成为系统（8）的一个改进的观测器．任取初值 $x(0)=[0.01,0.011,5,20]$，$y(0)=[0.1,0.015,0.2,1.5]$，得到的结果如图 1 所示，它表示各个对应变量关系，在经过短暂时间后，它们均成线性关系，但它们不位于正向对角线上，可见不属于 IS．

为了进一步验证广义同步，复制一个与响应系统（6）完全相同的辅助系统，

$$\begin{aligned}\dot{z}&=P^{-1}A(Pz+Q)+P^{-1}C\\&\quad+P^{-1}B(h(x)-s(z)),\end{aligned}\tag{9}$$

则 $y(t)$ 与 $x(t)$ 实现稳定广义同步的充要条件为 $\lim_{t\to\infty}\|z(t)-y(t)\|=0$[3]．图 2 即为同步误差 $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{4}(z_i-y_i)^2}$ 与时间的关系图．可见，系统（6）与系统（9）达到 IS，因此，系统（8）与系统（6）属于 GS．由于 $A-BK$ 的特征值表示收剑速度，因此，为了加快收敛速度，还可以通过改变特征值来配置增益向量 K．

4．结　　论

GS 可以应用于保密通讯．由于 IS 发射的加密信号是变量信号，接收者可以近似重构出驱动系统的动力学模型，保密性不够强．而 GS 发射和接收的加密信号是函数信号，因此 GS 保密通信比 IS 保密通信具有更强的抗破译能力．本文扩展了状态观测器的概念，从已知响应系统的状态变量与驱动系统状态变量的函数关系出发，在不改变驱动系统的内部参数的条件下，采用解析的方法得到在单向耦合情况下的混沌 GS 的响应系统．该方法还可以事先配置同步速度．最后，通过数值模拟实现了四维超混沌系统 GS．

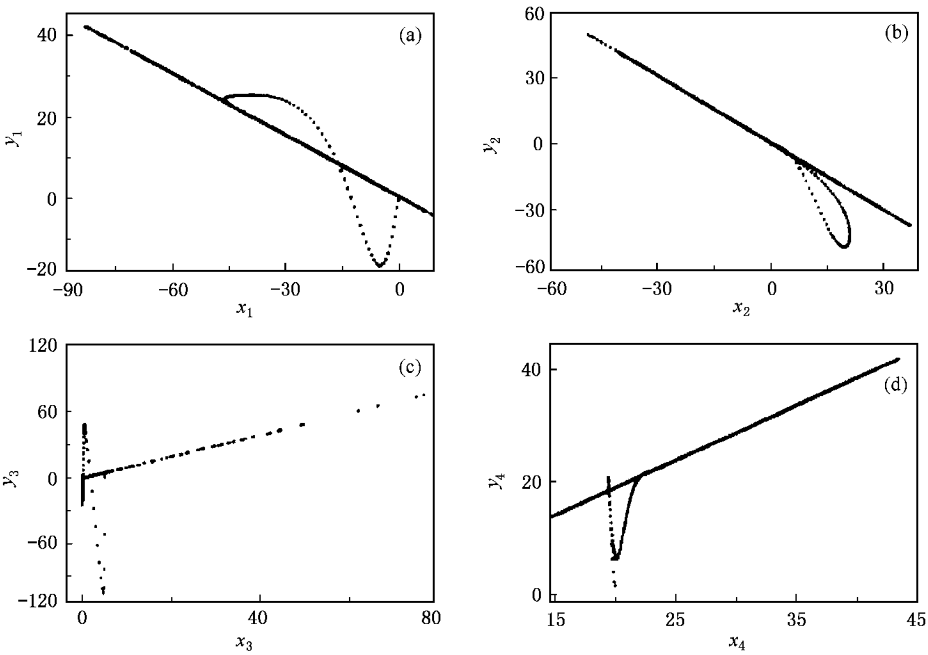

图 1　线性广义同步对应变量关系　(a) x_1-y_1 , (b) x_2-y_2 , (c) x_3-y_3 , (d) x_4-y_4

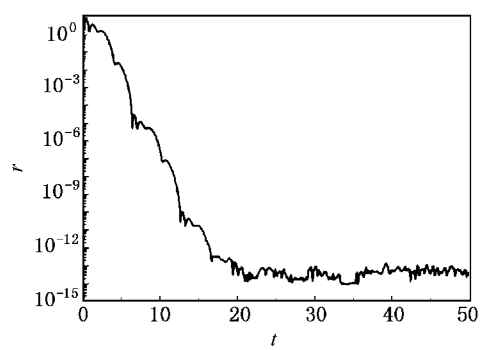

图 2　线性广义同步误差 r 的时序图

[1] Kocarev L, Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028

[2] Dai D, Ma X K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1237(in Chinese) [戴栋、马西奎 2001 物理学报 **50** 1237]

[3] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497(in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]

[4] Li J F, Li N 2002 *Chin. Phys.* **11** 9

[5] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S *et al* 1995 *Phys. Rev.* E **51** 980

[6] Yang T, Chua L O 1996 *Int. J. Bifurc. Chaos* **6** 2653

[7] Yang T, Chua L O 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 215

Analytical design of the observer-based chaotic generalized synchronization*

Li Guo-Hui

(*School of Communication and Information Engineering*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200072, *China*)

(Received 13 June 2003; revised manuscript received 22 July 2003)

Abstract

This paper develops a modified state observer for chaotic generalized synchronization. An analytic approach is proposed for constructing a response system to implement generalized chaos synchronization with drive system. From the state observer theory, some sufficient conditions of global asymptotic linear-generalized synchronization between the drive system and response system are obtained. Finally, a hyperchaotic Rössler system is given to illustrate the effectiveness of the proposed synchronization method.

Keywords: chaos, generalized synchronization, state observer, Rössler system

PACC: 0545

* Project supported by the Key Disciplinary Development Program of Shanghai, China (Grant No. 2001-44).