第 53 卷 第 5 期 2004 年 5 月
1000-3290/2004/53(05)/1271-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.5,May,2004

非完整系统的 Noether 对称性与 Hojman 守恒量*

罗绍凯[1)2)†]　郭永新[3)]　梅凤翔[4)]

[1)](浙江工程学院数学力学与数学物理研究所,杭州　310018)

[2)](长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙　410003)

[3)](辽宁大学物理系,沈阳　110036)

[4)](北京理工大学理学院,北京　100081)

(2003 年 6 月 30 日收到;2003 年 8 月 25 日收到修改稿)

研究非完整力学系统的 Noether 对称性导致的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量. 在时间不变的特殊无限小变换下,给出系统的特殊 Noether 对称性与守恒量,并给出特殊 Noether 对称性导致特殊 Lie 对称性的条件. 由系统的特殊 Noether 对称性,得到相应完整系统的 Hojman 守恒量以及非完整系统的弱 Hojman 守恒量和强 Hojman 守恒量. 给出一个例子说明本结果的应用.

关键词:分析力学,非完整系统,Noether 对称性,非 Noether 守恒量,Hojman 守恒量

PACC:0320

1. 引　言

由力学系统的对称性来寻找系统的守恒量是数学物理科学,特别是分析力学的一个近代发展方向. 1918 年,德国女科学家 Noether 首次揭示了对称性与守恒量之间的潜在关系[1],至 20 世纪 70 年代人们才真正认识到其重要科学意义,目前 Noether 对称性理论已日趋完善[2—4]. 20 世纪 70 年代末发展起来的 Lie 对称性理论也取得重要进展[3—6]. 近年出现的一种新的对称性——形式不变性也取得一些进展[7—9]. 这三种对称性都是赖于 Noether 等式或 Killing 方程得到 Noether 守恒量. 1992 年,Hojman 从微分方程出发,由 Lie 对称性直接给出不依赖于 Noether 等式或 Killing 方程的非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量[10]. 这一工作近年开始受到重视[11—17]. 文献[10—17]研究了几类完整力学系统由特殊 Lie 对称性导致的非 Noether 守恒量,本文研究非完整力学系统由特殊 Noether 对称性导致的 Hojman 守恒量,给出由动力学系统的 Noether 对称性得到非 Noether 守恒量的方法.

2. 系统的特殊 Noether 对称性与守恒量

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s=1,\cdots,n$)来确定. 系统的运动受有 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0,(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

约束(1)对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0.\tag{2}$$

系统的运动微分方程表为 Routh 形式

$$E_s(L)=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s},(s=1,\cdots,n),\tag{3}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 函数,$Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力,λ_β 为待定乘子,E_s 为 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}.\tag{4}$$

设系统(3)非奇异,在方程(3)积分之前,可由方程(1),(3)先求出乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数. 于是方程(3)可表为相应完整系统的形式

* 国家自然科学基金(批准号:10372053,10272021),湖南省自然科学基金(批准号:03JJY3005)和湖南省教育厅科研基金(批准号:02C033)资助的课题.

† E-mail:lskmmmp@yahoo.com.cn

$$E_s(L) = Q_s + \Lambda_s,(s = 1,\cdots,n), \tag{5}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \partial f_\beta / \partial \dot{q}_s .$$

展开方程(5)可解出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s = h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),(s = 1,\cdots,n). \tag{6}$$

取时间不变的特殊无限小变换

$$t^* = t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{7}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_s 为无限小生成元. 在无限小变换(7)下,系统的 Noether 等式表为

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + (Q_s + \Lambda_s)\xi_s + \dot{G}_N = 0, \tag{8}$$

其 Killing 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + (Q_s + \Lambda_s)\xi_s$$

$$= -\frac{\partial G_N}{\partial t} - \frac{\partial G_N}{\partial q_k}\dot{q}_k, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_k}. \tag{9}$$

非完整约束(1)在无限小变换(7)下的不变性归结为约束限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})) = 0, (\beta = 1,\cdots,g). \tag{10}$$

Appell-Chetaev 条件(2)对虚位移 δq_s 的限制归结为附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\xi_s = 0,(\beta = 1,\cdots,g; s = 1,\cdots,n). \tag{11}$$

在(10)式中

$$X^{(1)} = \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{12}$$

且有

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{13}$$

如果存在规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使无限小生成元 ξ_s 满足 Noether 等式(8),或者 Killing 方程(9)有解,则相应对称性是与非完整系统(1),(3)相应的完整系统(5)的特殊 Noether 对称性. 如果生成元 ξ_s 还满足约束限制方程(10),则相应对称性为非完整系统的特殊弱 Noether 对称性. 如果生成元 ξ_s 还同时满足约束限制方程(10)和附加限制方程(11),则相应对称性为非完整系统的特殊强 Noether 对称性.

利用 Noether 定理,由上述特殊 Noether 对称性可找到如下 Noether 守恒量:

$$I_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\xi_s + G_N = \mathrm{const}. \tag{14}$$

对于非完整系统,守恒量(14)可以是相应完整系统的,可以是弱 Noether 的,也可以是强Noether 的.

3. 特殊 Noether 对称性与特殊 Lie 对称性

下面研究非完整系统的特殊 Noether 对称性与特殊 Lie 对称性之间的关系.

利用 Katzin 和 Levine 给出的变分等式的关系[18]

$$X^{(2)}\{E_s(L)\} = E_s\{X^{(1)}(L) - L\dot{\xi}_0\} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s}\right]$$

$$+ E_s(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)E_k(L)$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s} - \dot{q}_k\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_k(L), \tag{15}$$

其中 ξ_0 为时间无限小变换的生成元. 将方程(5)代入(15)式,注意到

$$E_s(\dot{G}_N) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_s}, \tag{16}$$

则有

$$X^{(2)}\{E_s(L)\} - X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)$$

$$= E_s\{X^{(1)}(L) + L\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N\} - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_s}\right] + E_s(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)$$

$$\times (Q_k + \Lambda_k) + \left(\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s} - \dot{q}_k\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s}\right)(\dot{Q}_k + \dot{\Lambda}_k)$$

$$- X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s). \tag{17}$$

在(17)式右端加上并减去 $E_s\{(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)(Q_k + \Lambda_k)\}$,并简化得

$$X^{(2)}\{E_s(L)\} - X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s)$$

$$= E_s\{X^{(1)}(L) + L\dot{\xi}_0 + (\xi_k - \dot{q}_k\xi_0)(Q_k + \Lambda_k) + \dot{G}_N\}$$

$$- \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_s}\right]$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k + \Lambda_k) - \frac{\partial}{\partial q_k}(Q_s - \Lambda_s)\right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k + \Lambda_k)\right](\xi_k - \dot{q}_k\xi_0) - \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_s\right.$$

$$\left. + \Lambda_s) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k + \Lambda_k)\right](\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0 - \ddot{q}_k\xi_0), \tag{18}$$

在特殊无限小变换(7)下,有 $\xi_0 = 0$,于是(18)式简化

为

$$
\begin{aligned}
& X^{(2)}\{E_s(L)\}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s) \\
={} & E_s\left\{\frac{\partial L}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{\xi}_k+(Q_k+\Lambda_k)\xi_k+\dot{G}_N\right\} \\
& -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial G_N}{\partial \dot{q}_s}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k+\Lambda_k)\right. \\
& \left.-\frac{\partial}{\partial q_k}(Q_s+\Lambda_s)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k+\Lambda_k)\right]\xi_k \\
& -\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_s+\Lambda_s)+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k+\Lambda_k)\right]\dot{\xi}_k . \qquad (19)
\end{aligned}
$$

如果对称性分别是特殊 Noether 的，特殊弱 Noether 的或特殊强 Noether 的，则(8)和(9)式成立. 将(8)和(9)式代入(19)式，得到

$$
\begin{aligned}
& X^{(2)}\{E_s(L)\}-X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s) \\
={} & \left[\frac{\partial}{\partial q_s}(Q_k+\Lambda_k)-\frac{\partial}{\partial q_k}(Q_s+\Lambda_s)\right. \\
& \left.-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k+\Lambda_k)\right]\xi_k-\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(Q_s+\Lambda_s)\right. \\
& \left.+\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}(Q_k+\Lambda_k)\right]\dot{\xi}_k . \qquad (20)
\end{aligned}
$$

于是有

定理 1　对于非完整力学系统，在无限小变换(7)下，如果生成元 ξ_s 分别是特殊 Noether 对称的，特殊弱 Noether 对称的或特殊强 Noether 对称的，且 ξ_s，Q_s，Λ_s 满足等式

$$
\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_s}-\frac{\partial Q_s}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\xi_k-\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{\xi}_k=0, \qquad (21)
$$

$$
\left(\frac{\partial \Lambda_k}{\partial q_s}-\frac{\partial \Lambda_s}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Lambda_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\xi_k-\left(\frac{\partial \Lambda_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial \Lambda_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\dot{\xi}_k=0, \qquad (22)
$$

则生成元 ξ_s 必定分别是特殊 Lie 对称的，特殊弱 Lie 对称的或特殊强 Lie 对称的. 反之，不一定.

对于一般完整力学系统，有 $\Lambda_s=0$，于是有

推论 1　对一般完整力学系统，在无限小变换(7)下，如果生成元 ξ_s 是特殊 Noether 对称的，且 ξ_s，Q_s 满足等式(21)，则生成元 ξ_s 必是特殊 Lie 对称的. 反之，不一定.

对于 Lagrange 系统，有 $\Lambda_s=Q_s=0$，于是有

推论 2　对 Lagrange 系统，在无限小变换(7)下如果生成元 ξ_s 是特殊 Noether 对称的，那么它必是特殊 Lie 对称的. 反之，不一定.

4. 系统的特殊 Noether 对称性与 Hojman 守恒量

下面由非完整系统的特殊 Noether 对称性寻找 Hojman 守恒量.

定理 2　对于非完整力学系统，在无限小变换(7)下，如果特殊 Noether 对称的，特殊弱 Noether 对称的或特殊强 Noether 对称的生成元 ξ_s 以及广义力 Q_s 和广义约束反力 Λ_s 满足等式(21)和(22)，且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$
\frac{\partial h_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \qquad (23)
$$

则系统分别存在相应完整系统的 Hojman 守恒量以及非完整系统的弱 Hojman 守恒量或强 Hojman 守恒量，形如

$$
I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\mathrm{const}, \qquad (24)
$$

其中

$$
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+h_s\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \qquad (25)
$$

证明　由 Hojman 方法[10]和上述定理 1，容易证得定理 2.

推论 3　对一般完整力学系统，在无限小变换(7)下，如果特殊 Noether 对称的生成元 ξ_s 和广义力 Q_s 满足等式(21)，且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得条件(23)成立，则系统的 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量(24).

推论 4　对 Lagrange 系统，在无限小变换(7)下，如果 ξ_s 是特殊 Noether 对称的，且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得条件(23)成立，则系统的 Noether 对称性导致 Hojman 守恒量(24).

5. 算　例

Appell-Hamel 例的 Lagrange 函数和非完整约束方程分别为

$$
L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_2^3)-mgq_3, \qquad (26)
$$

$$
f=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\dot{q}_3^2=0. \qquad (27)
$$

试由系统的 Noether 对称性导出 Hojman 守恒量.

非完整系统的 Routh 方程给出为

$$m\ddot{q}_1 = 2\lambda\dot{q}_1, m\ddot{q}_2 = 2\lambda\dot{q}_2, m\ddot{q}_3 = -mg - 2\lambda\dot{q}_3, \tag{28}$$

由方程(27),(28)解得

$$\lambda = -\frac{mg}{4\dot{q}_3}, \tag{29}$$

于是有

$$\ddot{q}_1 = -\frac{g\dot{q}_1}{2\dot{q}_3} = h_1, \ddot{q}_2 = -\frac{g\dot{q}_2}{2\dot{q}_3} = h_2,$$

$$\ddot{q}_3 = -\frac{g}{2} = h_3, \tag{30}$$

$$Q_1 + \Lambda_1 = -\frac{mg\dot{q}_1}{2\dot{q}_3}, Q_2 + \Lambda_2 = -\frac{mg\dot{q}_2}{2\dot{q}_3},$$

$$Q_3 + \Lambda_3 = \frac{1}{2}mg. \tag{31}$$

Noether 等式(8)给出

$$m\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + m\dot{q}_2\dot{\xi}_2 + m\dot{q}_3\dot{\xi}_3 - \frac{mg\dot{q}_1}{2\dot{q}_3}\xi_1$$

$$-\frac{mg\dot{q}_2}{2\dot{q}_3}\xi_2 - \frac{1}{2}mg\xi_3 = -\dot{G}_N, \tag{32}$$

它有解

$$\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, G_N = \frac{1}{2}mgt, \tag{33}$$

$$\xi_1 = \xi_3 = 0, \xi_2 = \dot{q}_3, G_N = mgq_2, \tag{34}$$

$$\xi_1 = \dot{q}_3, \xi_2 = \xi_3 = 0, G_N = mgq_1. \tag{35}$$

条件(23)给出

$$-\frac{g}{\dot{q}_3} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{36}$$

它有解

$$\mu = t^{-2}, \tag{37}$$

$$\mu = \left[\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) + mgq_3\right]t^{-2}. \tag{38}$$

容易验证,生成元(34)和(35)不满足(21)和(22)式,不导致 Hojman 守恒量.生成元(33)满足(21)和(22)式,由(33)和(37)式,利用定理 2,得到 Hojman 守恒量

$$I_H = 0, \tag{39}$$

它是平凡的. 由(33)和(38)式,利用定理2,得到 Hojman 守恒量

$$I_H = g\left[\frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) + gq_3\right]^{-1} = \text{const}, \tag{40}$$

它是非平凡的.

注意到,守恒量(40)不是 Noether 定理给出的守恒量,由 Noether 对称性(33)用 Noether 定理给出的守恒量为

$$I_N = m\dot{q}_3 + \frac{1}{2}mgt = \text{const}. \tag{41}$$

容易验证,生成元(33)满足限制方程(10),不满足附加限制方程(11),因此,(40)式是 Noether 对称性(33)导致的 Appell-Hamell 系统的弱 Hojman 守恒量.

6. 结 论

本文提出了由非完整力学系统的 Noether 对称性寻找 Hojman 守恒量的方法,所得 Hojman 守恒量不是 Noether 定理给出的. 本文的工作表明,利用 Noether 对称性不但可以找到 Noether 守恒量,而且在一定条件下也可以找到非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量. 本文的工作还表明,对于给定的动力学系统,不但利用 Lie 对称性可以找到非 Noether 守恒量,而且利用 Noether 对称性也可以找到非 Noether 守恒量.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[3] Mei F X 1999 *Application of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京: 科学出版社)]

[4] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[5] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105

[6] Mei F X 2000 *Acta Mech.* **141** 135

[7] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[8] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[9] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[10] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[11] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull* **47** 2049
[12] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese) [许志新 2002 物理学报 **51** 2423]
[13] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]
[14] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]
[15] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 357
[16] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 841
[17] Luo S K 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 597
[18] Katzin G H and Levine J 1985 *J. Math. Phys.* **26** 3080

Noether symmetry and Hojman conserved quantity for nonholonomic mechanical systems*

Luo Shao-Kai[1)2)] Guo Yong-Xin[3)] Mei Feng-Xiang[4)]

1) (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang Institute of Science and Technology, Hangzhou* 310018, *China*)
2) (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha* 410003, *China*)
3) (*Department of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036, *China*)
4) (*School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

(Received 30 June 2003; revised manuscript received 25 August 2003)

Abstract

A non-Noether conserved quantity, i. e. Hojman conserved quantity constructed using the Noether symmetry for the nonholonomic mechanical system is presented. Under special infinitesimal transformations in which the time is not variable, the special Noether symmetry and Noether conserved quantity are given, and the condition under which the special Noether symmetry is a special Lie symmetry is obtained. From the special Noether symmetry, the Hojman conserved quantity of the corresponding holonomic system, the weakly Hojman conserved quantity and the strongly Hojman conserved quantity of the nonholonomic systems are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, nonholonomic system, special Noether symmetry, non-Noether conserved quantity, Hojman conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10372053, 10272021), the Natural Science Foundation of Hunan Province (Grant No. 03JJY3005), and the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 02C033).