第 53 卷 第 5 期 2004 年 5 月
1000-3290/2004/53(05)/1276-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.5, May, 2004

推广的一类 Lie 代数及其相关的一族可积系统

张玉峰[1)2)]　郭福奎[1)]

[1)](山东科技大学信息学院数学研究所,泰安　271019)

[2)](中国科学院数学与系统科学研究院计算数学研究所,北京　100080)

(2002 年 12 月 24 日收到;2003 年 9 月 1 日收到修改稿)

对已知的 Lie 代数 A_{n-1} 作直接推广得到一类新的 Lie 代数 $gl(n,C)$. 为应用方便,本文只考虑 Lie 代数 $gl(3,C)$ 情形. 构造了 $gl(3,C)$ 的一个子代数,通过对阶数的规定,得到了一类新的 loop 代数. 作为其应用,设计了一个新的等谱问题,得到了一个新的 Lax 对. 利用屠格式获得了一族新的可积系统,具有双 Hamilton 结构,且是 Liouville 可积系. 作为该方程族的约化情形,得到了新的耦合广义 Schrödinger 方程.

关键词:Lie 代数,可积系,Hamilton 结构

PACC:0340K,0220,0365G

1. 引　　言

目前,人们对可积系统的研究是孤立子理论中的重要课题之一,特别是寻找新的可积系统是一项重要而有趣的工作. 人们利用屠规彰格式(简称屠格式)[1]已获得了一些重要的孤立子方程族[1—4]. 我们发现,使用屠格式的步骤之一是通过建立 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 或者其子代数,设计出一个等谱问题 $\varphi_x = U\varphi$,再利用屠格式获得新的可积系. 为了使辅助方程 $V_x = [U, V]$ 的解可用循环算子表出,要求 U 中的谱参数 λ 的次数不能过高或过低,这就限制了等谱问题的建立. 为了解决这一矛盾,文献[5]提出了一个解决途径,即寻找 $\tilde{A}_1$ 的子代数,使其相邻基元中 λ 的次数差大于 1. 据此,文献[5]列出了 λ 的次数差为 2 的三种基,选择其中一种,利用屠格式得到了两类新的可积系. 为了进一步获得新的可积系,本文试图将已有的 Lie 代数 A_{n-1} 推广,得到了一类新的 Lie 代数,再通过阶数的恰当选取,使所得相应的 loop 代数的基中谱参数 λ 的次数为 2. 由此利用屠格式获得新的可积孤子方程族. 为方便起见,本文仅考虑 Lie 代数 A_2 的推广形式,得到 Lie 代数 $gl(3,C)$,通过对阶数的适当定义,得到了一个 loop 代数 $\tilde{A}_2^*$,然后设计了一个等谱问题及其辅助等谱问题,得到了一个新的 Lax 对,利用其相容性及屠格式获得了一族新的可积系,拥有双 Hamilton 结构. 作为其约化情形,得到了一个新的耦合广义 Schrödinger 方程.

2. Lie 代数 A_{n-1} 的直接推广

首先回忆一下 Lie 代数的概念[6]. 设 G 是一个线性空间,对于 G 中任意元素 x, y,定义运算 $[x,y]$ 满足下列条件:

1) 反对称性

$$[x,y] = -[y,x];$$

2) 双线性性

$$[ax+by,z] = a[x,z] + b[y,z],\quad \forall x,y,z \in G;$$

3) Jacobi 恒等式

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x]y] = 0.$$

则称 G 是一个 Lie 代数,$[x,y]$ 称为 Lie 括号运算(或换位运算). 常用的 Lie 代数是

$$A_{n-1} = sl(n,C) = \{X = (x_{ij})_{n\times n} \mid x_{ij} \in C,\ \mathrm{tr}X = 0\}, \tag{1}$$

这里 C 表示复数集,其中的换位运算是

$$[X,Y] = XY - YX, \forall X,Y \in A_{n-1}. \tag{2}$$

考虑一类 $n\times n$ 矩阵集

$$A_{n-1}^* = gl(n,C) = \{X = (x_{ij})_{n\times n} \mid x_{ij} \in C\}, \tag{3}$$

定义(3)中的换位运算为

$$[X,Y] = XQY - YQX, \forall X,Y,Q \in gl(n,C). \tag{4}$$

则易验证(4)式满足 1)—3),因此 $gl(n,C)$ 是一个

Lie 代数.显然当 Q 为单位矩阵时,(4)式约化为(2)式.于是 $gl(n,C)$ 是 Lie 代数 A_{n-1} 的推广形式.

设有等谱问题[7]

$$\varphi_x = UQ\varphi, \lambda_t = 0,$$
$$\varphi_t = VQ\varphi, Q_x = Q_t = 0, \tag{5}$$

则由(5)式的相容性 $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$ 知

$$(U_t - V_x + UQV - VQU)Q\varphi = 0,$$

因为 φ 为任意,所以有

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \tag{6}$$

即零曲率方程成立.

3. 一类新的可积系

下面只考虑 A_2^* 情形.令

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

则由(4)式知

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_4, [e_1, e_4] = 2e_3,$$
$$[e_2, e_3] = -e_1, [e_2, e_4] = 0, [e_3, e_4] = 2e_1. \tag{8}$$

设

$$e_1(n) = e_1\lambda^{2n+1}, e_2(n) = e_2\lambda^{2n}, e_3(n) = e_3\lambda^{2n+1},$$
$$e_4(n) = e_4\lambda^{2n}, [e_1(m), e_2(n)] = e_3(m+n),$$
$$[e_1(m), e_3(n)] = -2e_4(m+n+1),$$
$$[e_1(m), e_4(n)] = 2e_3(m+n),$$
$$[e_2(m), e_3(n)] = -e_1(m+n),$$
$$[e_3(m), e_4(n)] = 2e_1(m+n),$$
$$[e_2(m), e_4(n)] = 0,$$
$$\deg e_1(n) = \deg e_3(n) = 2n+1,$$
$$\deg e_2(n) = \deg e_4(n) = 2n, \tag{9}$$

则(9)式为一个 loop 代数,且其中相邻基元间的谱参数差为 2.由(9)式设计等谱问题

$$\varphi_x = UQ\varphi, \lambda_t = 0, U = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{s}{\lambda} & 0 & q - r \\ 0 & -\lambda & 0 \\ q + r & 0 & \frac{s}{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

令

$$V = \begin{pmatrix} \frac{c}{\lambda} & 0 & a - b \\ 0 & 0 & 0 \\ a + b & 0 & \frac{c}{\lambda} \end{pmatrix}, a = \sum_{m\geqslant 0} a_m\lambda^{-2m},$$
$$b = \sum_{m\geqslant 0} b_m\lambda^{-2m}, c = \sum_{m\geqslant 0} c_m\lambda^{-2m},$$

解辅助方程

$$V_x = [U, V], \tag{11}$$

得递推关系

$$\begin{aligned}
b_{m+1} &= -a_{mx} + 2rc_m - 2sb_m,\\
a_{m+1} &= -b_{mx} + 2qc_m - 2sa_m,\\
c_{mx} &= -2qb_{m+1} + 2ra_{m+1}\\
&= 2qa_{mx} - 2rb_{mx} + 4qsb_m - 4rsa_m,\\
a_0 &= b_0 = 0, c_0 = \alpha, a_1 = 2\alpha q,\\
b_1 &= 2\alpha r, c_1 = 2\alpha(q^2 - r^2),\\
a_2 &= \alpha(-2r_x + 4q(q^2 - r^2) - 4qs),\\
b_2 &= \alpha(-2q_x + 4r(q^2 - r^2) - 4rs),\\
c_2 &= \alpha(4rq_x - r_xq + 6(q^2 - r^2)^2 - 8(q^2 - r^2)s),\\
a_3 &= \alpha(2q_{xx} - 4r_x(q^2 - r^2) - 4r(q^2 - r^2)_x + 4s_xr\\
&\quad + 4sr_x + 8q(rq_x - r_xq) + 12q(q^2 - r^2)^2\\
&\quad + 4sr_x - 24qs(q^2 - r^2) + 8s^2r),\\
b_3 &= \alpha(2r_{xx} - 4q_x(q^2 - r^2) - 4q(q^2 - r^2)_x + 4q_xs\\
&\quad + 4qs_x + 8r(rq_x - r_xq) + 12r(q^2 - r^2)^2\\
&\quad + 4sq_x - 24sr(q^2 - r^2) + 8s^2r).
\end{aligned} \tag{12}$$

记

$$V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n}(a_me_1(n-m) + b_me_3(n-m)$$
$$+ c_me_4(n-m)),$$
$$V_-^{(n)} = \lambda^{2n}V - V_+^{(n)},$$

则(11)式可写为

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}]. \tag{13}$$

易知,(13)式的左端基元的阶数(deg) $\geqslant 0$,而右端基元的阶数 $\leqslant 1$.因此左右两端基元的阶数为 0,1.于是

$$-V_{+x}^{(n)}+[U,V_{+}^{(n)}]$$
$$=b_{n+1}e_1(0)+a_{n+1}e_3(0)+(2qb_{n+1}-2ra_{n+1})e_4(0).$$

取 $V^{(n)}=V_{+}^{(n)}$,则零曲率方程

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0. \tag{14}$$

确定 Lax 可积系

$$u_{t_n}=\begin{pmatrix}q\\r\\s\end{pmatrix}_{t_n}=\begin{pmatrix}-b_{n+1}\\-a_{n+1}\\2ra_{n+1}-2qb_{n+1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{\partial}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a_{n+1}\\-2b_{n+1}\\2c_n\end{pmatrix}=JG_n, \tag{15}$$

其中 J 是一 Hamilton 算子.根据(12)式易知

$$G_n=\begin{pmatrix}-2s+4q\partial^{-1}q\partial & -\partial-4q\partial^{-1}r\partial & -4q\partial^{-1}s\partial\\-\partial-4r\partial^{-1}q\partial & -2s-4r\partial^{-1}r\partial & -4r\partial^{-1}s\partial\\2\partial^{-1}q\partial & -2\partial^{-1}r\partial & -2\partial^{-1}s\partial\end{pmatrix}$$
$$\times G_{n-1}=LG_{n-1},$$

因此(15)式可写为

$$u_{t_n}=\begin{pmatrix}q\\r\\s\end{pmatrix}_{t_n}=JL^nG_0=JL^n\begin{pmatrix}4\alpha q\\-4\alpha r\\2\alpha\end{pmatrix}. \tag{16}$$

取 $n=2$ 则(16)式约化为耦合广义 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned}q_{t_2}&=-2\alpha r_{xx}+4\alpha q_x(q^2-r^2)+4\alpha q(q^2-r^2)_x\\&\quad-4\alpha q_xs-4\alpha qs_x-8\alpha r(rq_x-r_xq)\\&\quad-12\alpha r(q^2-r^2)^2-4\alpha sq_x\\&\quad+24\alpha sr(q^2-r^2)-8\alpha s^2r,\\r_{t_2}&=-2\alpha q_{xx}+4\alpha r_x(q^2-r^2)+4\alpha r(q^2-r^2)_x\\&\quad-4\alpha r_xs-4\alpha rs_x-8\alpha q(rq_x-r_xq)\\&\quad-12\alpha q(q^2-r^2)^2-4\alpha sr_x\\&\quad+24\alpha sq(q^2-r^2)-8\alpha s^2q,\\s_{t_2}&=4\alpha(rq_{xx}-r_{xx}q)+24\alpha(q^2-r^2)(qq_x-rr_x)\\&\quad-8\alpha s_x(q^2-r^2)-16\alpha s(qq_x-rr_x).\end{aligned}$$

直接计算知

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial q}\right\rangle=2a,\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial r}\right\rangle=-2b,$$
$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial s}\right\rangle=\frac{2c}{\lambda^2},$$
$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial s}\right\rangle=\frac{c}{\lambda}-\frac{2sc}{\lambda^3},$$

并代入迹恒等式得

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{c}{\lambda}-\frac{2sc}{\lambda^3}\right)=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^{\gamma}\begin{pmatrix}2a\\-2b\\\frac{2c}{\lambda^2}\end{pmatrix}. \tag{17}$$

在(17)中,比较 λ^{-2n-3} 的系数知

$$\frac{\delta}{\delta u}(c_{n+1}-2sc_n)=(-2n-2+\gamma)G_n. \tag{18}$$

取 $n=0$ 并将(12)式中的初值代入(18)式得 $\gamma=3$. 于是 $\frac{\delta H_n}{\delta u}=G_n$,其中 $H_n=\frac{c_{n+1}-2sc_n}{-2n+1}$ 为 Hamilton 函数,称 G_n 为伴随对称,由此可建立双对称约束流得到有限维可积 Hamilton 系统,对此将另文讨论.

于是我们就得到了可积方程族(16)的 Hamilton 结构

$$\begin{aligned}u_{t_n}&=J\frac{\delta H_n}{\delta u}\\&=K\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u},\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $K=JL$.可直接验证辛算子 $\tilde{J}=c_1J+c_2K$ 满足 Jacobi 恒等式,所以 $\{J,K\}$ 组成一个算子对,因此(19)式是系统(16)式的双 Hamilton 结构.

容易验证:$JL=L^*J$,因此系统(16)是 Liouville 可积的.

郭福奎教授在文献[7]中提出了 Lie 代数的推广方法,他是构造了一个 2×2 的 3 维 Lie 代数,由此重新得到了著名的 AKNS 族;而本文是构造了一个 3×3 的 4 维 Lie 代数,其实就是 A_2^* 的一个子代数,并且本文中的基元含有谱参数,所得到的结果是新的.

[1] Tu G Z 1989 *J. Math. Phys.* **30** 330
[2] Tu G Z 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 2375
[3] Guo F K 1997 *Acta Math. Sin.* **40** 801 (in Chinese) [郭福奎 1997 数学学报 **40** 801]
[4] Guo F K 2002 *J. Syst. Sci. Math.* **22** 36 (in Chinese) [郭福奎 2002 系统科学与数学 **22** 36]
[5] Guo F K 1999 *Acta Math. Phys. Sin.* **19** 507 (in Chinese) [郭福奎 1999 数学物理学报 **19** 507]

[6] Gu C H *et al* 1990 *Soliton Theory and Application* (Press House of Zhejiang Science and Technology) (in Chinese) [谷超豪等 1990 孤立子理论与应用(浙江科学技术出版社)]

[7] Guo F K 2003 *Reprinted form of J. Shandong University of Science and technology* (in Chinese) [郭福奎 2003 山东科技大学学报预印本]

An extension of Lie algebra and a related integrable system

Zhang Yu-Feng[1)2)] Guo Fu-Kui[1)]

[1)] (*Institute of Mathematics*, *Information School*, *Shandong University of Science and Technology*, *Taian* 271019, *China*)

[2)] (*Institute of Computational Mathematics*, *Academy of Mathematics and System Sciences*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100080, *China*)

(Received 24 December 2002; revised manuscript received 1 September 2003)

Abstract

A direct extension of the known Lie algebra A_{n-1} is presented, a new Lie algebra $gl(n, C)$ is obtained. For the sake of application convenience, Lie algebra $gl(3, C)$ is only considered, whose subalgebra is constructed. By the definition of the subalgebra gradation, a new loop algebra is shown. As its application, an isospectral problem is designed. It follows that a new Lax pair is obtained. By making use of Tu scheme, a family of new Liouville integrable system is presented, which possesses a bi-Hamiltonian structure. As the reduction case of the hierarchy obtained, a new coupled generalized Schrödinger equation is obtained.

Keywords: Lie algebra, integrable system, Hamiltonian structure

PACC: 0340K, 0220, 0365G