

基于观测器的混沌系统的同步研究*

高铁杠 陈增强† 袁著祉 顾巧论

(南开大学信息技术科学学院, 天津 300071)

(2003 年 6 月 13 日收到, 2003 年 7 月 24 日收到修改稿)

提出了一类混沌系统的观测器同步方法. 利用混沌系统的状态观测器, 给出了一类混沌系统观测器的同步的简单有效的方法, 并分析了系统的稳定性. 通过对 Lorenz 混沌系统的分析和数值模拟研究, 验证了该方法在混沌同步中的优良性能.

关键词: 混沌系统, 混沌同步, 状态观测器

PACC: 0545

1. 引言

近年来, 由于混沌系统在信息处理方面特别是安全通信方面展示了良好的应用前景, 因此, 对混沌系统的研究, 尤其是对混沌系统的同步研究已经成为人们最感兴趣的课题之一^[1-14]. 目前已经提出的混沌系统的同步方法多种多样, 如自适应方法^[3, 4], 神经网络方法^[12-14], 观测器同步方法^[6, 8]等, 由于观测器方法的同步易于工程上的实现, 因此目前得到了更大的关注. 文献 7 提出了一类混沌系统的观测器构造方法, 本文基于观测器的思想, 提出了更大范围的一类混沌系统的新的观测器同步构造方法, 这种方法, 构造简单, 同步速度快, 同时由于是同构同步, 因此精度高, 数值模拟结果显示, 该方法可以广泛用于通信和信息处理方面.

2. 系统模型及同步观测器的构造

考虑一类下面的混沌系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^p b_i f_i(x) + C, \quad (1)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $x(t) \in R^n$, $b_i \in R^n$, $f_i(x): R^n \rightarrow R$, 并且假定 $f_i(x): R^n \rightarrow R$ 是 x 的局部 Lipchitz 函数, 即对于任意 $x_1 \in R^n$, $x_2 \in R^n$ 存在常数 $M > 0$, 使得对任

何 $1 \leq i \leq p$, $\|f_i(x_1) - f_i(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$ 成立.

事实上, 许多著名的混沌系统都是呈现此类形式, 如陈氏系统, Lorenz 系统, Rossler 系统, Chua 电路等. 文献 7 中的系统为本系统的一种最简单形式.

定义 1 给定动态系统(1), $s(x) \in R$ 为系统的输出, 令

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & Ay(t) + \sum_{i=1}^p b_i f_i(y) \\ & + C + g(s(x) - s(y)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $g: R \rightarrow R^n$ 为合适的非线性函数, 如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - x(t)) = 0 \quad (3)$$

成立, 则称(2)式为系统(1)的非线性观测器, 如果收敛与 x 和 y 的初始状态无关, 则称(2)式为系统(1)的全局观测器.

3. 同步系统的稳定性分析

对于形如(1)式的混沌系统, 构造形如(2)式的系统观测器, 在此, 令

$$s(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) + Kx(t), \quad (4)$$

$$g(s(x) - s(y)) = \sum_{i=1}^p b_i (s(x) - s(y)), \quad (5)$$

其中 K 是适当选择的向量, 于是令

* 国家自然科学基金(批准号 60174021, 60374277)资助的课题.

† E-mail: chenzq@nankai.edu.cn 电话: 022-23503381(O), 022-23508547(H).

$$e(t) = y(t) - x(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{y}(t) - \dot{x}(t) \\ &= Ay(t) + \sum_{i=1}^p b_i f_i(y) + C + g(x) \\ &\quad - (Ax(t) + \sum_{i=1}^p b_i f_i(x) + C) \\ &= Ae(t) + \sum_{i=1}^p b_i (f_i(y) - f_i(x)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p b_i \left(\sum_{j=1}^p f_j(x) + Kx(t) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{j=1}^p f_j(y) + Ky(t) \right) \right) \\ &= \left(A - \sum_{i=1}^p b_i K \right) e(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p b_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (f_j(x) - f_j(y)). \end{aligned} \quad (7)$$

由于 $f_i(x)$ 是 Lipschitz 的, 而且混沌系统的状态向量是有界的, 设 $\|x\| \leq M$, 因此可以记

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^p b_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (f_j(x) - f_j(y)) \\ &= M_{xy} e(t), \end{aligned} \quad (8)$$

这样

$$\dot{e}(t) = \left(A - \sum_{i=1}^p b_i K + M_{xy} \right) e(t). \quad (9)$$

根据线性系统原理, 如果 $(A, \sum_{i=1}^p b_i)$ 可控, 那么可以通过 K 对系统 (9) 进行极点配置, 再根据 M_{xy} 特征值的有界性, 因此, 存在 K , 使得 $A - \sum_{i=1}^p b_i K + M_{xy}$ 对 x, y 是稳定矩阵. 所以, 在选择 K 下

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad (10)$$

而且该误差动态系统 (9) 是全局指数稳定的.

说明: 事实上, 许多动态系统的 $(A, \sum_{i=1}^p b_i)$ 可控性条件是成立的, 如 Chen's 系统, Rossler 超混沌系统等. K 的具体求解步骤可以根据 Routh-Hurwitz 标准求解, 也可以根据 M_{xy} 的特征根的范围等通过对 $A - \sum_{i=1}^p b_i K$ 极点配置求得.

4. 仿真研究

著名的 Lorenz 系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_3 + rx_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3, \end{cases} \quad (11)$$

在参数 $p = 10, r = 28, b = 8/3$ 时呈现混沌状态, 该系统方程可以写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-x_1 x_3) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (x_1 x_2), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, 令

$$\begin{cases} b_1 = [0 \ 1 \ 0]^T, \\ b_2 = [0 \ 0 \ 1]^T, \\ f_1(x) = -x_1 x_3, \\ f_2(x) = x_1 x_2. \end{cases} \quad (13)$$

于是其观测器与观测器误差方程可分别写成

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \begin{bmatrix} -p & p & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (-y_1 y_3) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y_1 y_2) + (b_1 + b_2) (f_1(x) \\ &\quad + f_2(x) + Kx - f_1(y) + f_2(y) + Ky) \end{aligned} \quad (14)$$

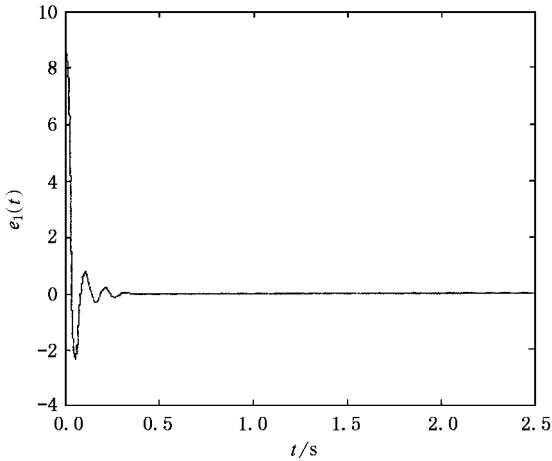
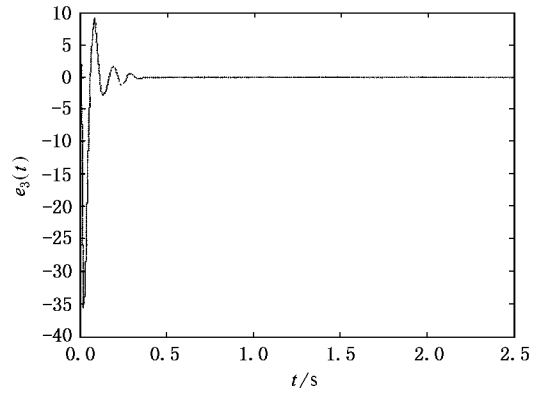
其中 $y = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T$.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \left(A - \sum_{i=1}^p b_i K \right) e(t) + \sum_{i=1}^p b_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p (f_j(x) - f_j(y)) \\ &= \left(A - \sum_{i=1}^p b_i K \right) e(t) + b_1 (x_1 x_2 - y_1 y_2) \\ &\quad + b_2 (x_1 x_3 - y_1 y_3) \\ &= \left(A - \sum_{i=1}^p b_i K \right) e(t) + M_{xy} e(t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -y_2 & -x_1 & 0 \\ -y_3 & 0 & -x_1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

而 $e(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t)]^T$ 表示观测器方程 (14) 和系统 (12) 的误差. 显然, 由于 $|x_1| < 20, |y_2| < 25, |y_3| < 50$, 考虑到 M_{xy} 的最大特征根, 因此通过极点配置方程将极点选择为 $(-62, -52, -63)$, 于是求得向量 $K = (757.0540, 767.6760, -604.3427)$, 使得 $A - bK + M_{xy}$ 为 Hurwitz 稳定矩阵. 此时

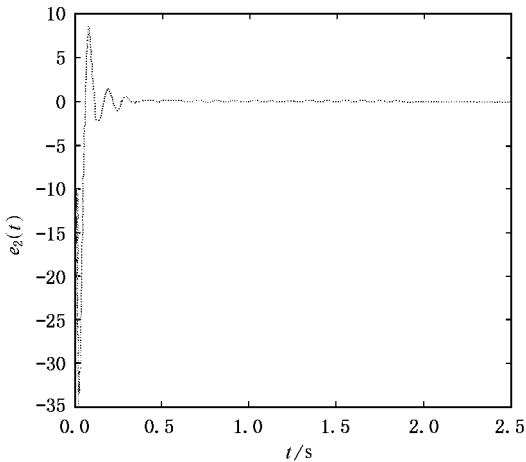
图 1 $e_1(t)$ 动态曲线图 3 $e_3(t)$ 的动态曲线

$$A - \sum_{i=1}^p b_i K = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -729.0540 & -768.6760 & 604.3427 \\ -757.0540 & -767.6760 & 601.6760 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

可以验证对任何(15)式中的 M_{xy} , $A - \sum_{i=1}^p b_i K + M_{xy}$ 均为 Hurwitz 稳定矩阵. 图 1 至图 3 是在初始条件为 $(10, -5, 6)$ 的情况下观测器误差方程(15)的解. 可以看出, 在 $t=2$ 时, 用上述方法构造的观测器就能实现和 Loren 系统的同步, 而且具有较高的精度.

5. 结 论

本文提出了一类混沌系统的同步方法, 通过构造系统的状态观测器, 可以实现一大类混沌系统的同步, 并给出了观测器方程的一般性求解方法, 数值模拟证明, 该方法有效实用.

图 2 $e_2(t)$ 的动态曲线

- [1] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Pecora L M and Carroll T L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374
- [3] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [4] Yue D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 292 (in Chinese) [岳 冬 2003 物理学报 **52** 292]
- [5] Boccaletti S , Kurths J , Osipov G , Valladares D L and Zhouc 2002 *Physics Reports* **366** 1
- [6] Hasler M 1998 *Int. J. Bifurcation Chaos* **8** 647
- [7] Grassi G and Mascolo S 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** 1011
- [8] Guan X P et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平等 2003 物理学报 **52** 276]
- [9] Yang X S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1919 (in Chinese) [杨晓松 2000 物理学报 **49** 1919]
- [10] Ueta T and Chen G 2000 *Int. J. Bifurcation Chaos* **10** 1917
- [11] Nijmeijer H and Mareels I M Y 1997 *IEEE Trans. on Circ Sys.* **44** 882
- [12] Guan X P et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670 (in Chinese) [关新平等 2001 物理学报 **50** 1670]
- [13] Liu D , Kong Zh Q and Ren H P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531 (in Chinese) [刘 丁等 2003 物理学报 **52** 531]
- [14] He G G , Cao Zh T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2103 (in Chinese) [何国光等 2001 物理学报 **50** 2103]

Study on synchronization of chaotic systems based on observer^{*}

Gao Tie-Gang Chen Zeng-Qiang[†] Yuan Zhu-Zhi Gu Qiao-Lun

(*Institute of Information Science and Technology ,Nankai University ,Tianjin 300071 , China*)

(Received 13 June 2003 ; revised manuscript received 24 July 2003)

Abstract

Synchronization problem of a class of chaotic systems based on observer is proposed. In the article we propose a simple but effective method for synchronization of a class of chaotic systems by the use of state observer ,and analyse the stability of the synchronization system. Numerical simulations are presented to show that the method is effective.

Keywords : chaotic system , chaos synchronization , observer

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60174021 60374277).

[†] E-mail : chenzq@nankai.edu.cn ; Tel 022-2350338(O) 23508547(H).