

# (2 + 1) 维 Sawada-Kotera 方程中两个 $y$ 周期孤子的相互作用 \*

阮航宇

(宁波大学物理系, 宁波 315211)

(浙江大学近代物理中心, 杭州 310027)

(2003 年 8 月 20 日收到, 2003 年 11 月 3 日收到修改稿)

利用双线性方法给出了 2 + 1 维 Sawada-Kotera (SK) 方程的  $N$  孤子解. 将  $N$  孤子解中的实参数扩大到复数范围, 得到了该方程的呼吸子解, 描述线孤子和  $y$  周期孤子相互作用的解和两个  $y$  周期孤子相互作用的解. 从解析和几何两个角度探讨了两个  $y$  周期孤子的相互作用. 相互作用性质和耦合系数有关. 对于 SK 方程, 耦合系数的取值只允许方程中存在弹性的排斥相互作用.

关键词:  $y$  周期孤子相互作用, SK 方程, 双线性方法

PACC: 0230, 0340

## 1. 引 言

非线性波动理论的发展, 使得孤子在各个领域中的作用越来越引人注目<sup>[1]</sup>. 由于孤子具有稳定性, 碰撞过程不引起波形改变, 孤子被看作是非线性可积模型的基本结构. 常见的孤子空间结构有  $x \rightarrow \pm \infty$  其波幅  $\rightarrow 0$  的钟状结构和  $x \rightarrow \pm \infty$  其波幅  $\rightarrow$  两个不同常数的扭结结构. 前者出现在 KdV 等方程中, 后者出现在 sine-Gordon 方程中.

由于一维问题的孤子结构无论是理论还是实验都被研究得很好<sup>[2,3]</sup>, 所以一般情况下人们首先考虑的就是一维问题. 虽然一维问题在许多物理现象, 尤其是控制得很好的实验室实验中也是成立的, 实际的物理现象不能严格看作是一维的. 可能存在着本质上的二维或三维特征. 此外, 最初实现的一维结构在横向扰动下可能是不稳定的. 因此, 对于高维结构所具有的特殊性质值得研究. 非线性波在高维空间的动力学不像一维问题理解得那么好. 为了阐明高维系统的动力学, 必须寻找可能的空间结构, 了解高维系统中的复杂空间结构是否可能贡献不同的动力学性质, 尤其是高维模型中的局域结构, 其相互作用是否与一维系统有着本质差别.

出于上述理由, 我们将研究 (2 + 1) 维 Sawada-Kotera (SK) 方程<sup>[4]</sup>

$$u_t = (u_{xxx} + 5uu_{xx} + \frac{5}{3}u^3 + 5u_{xy})_x - 5 \int u_{yy} dx + 5uu_y + 5u_x \int u_y dx. \quad (1)$$

方程 (1) 的约化模式 (1 + 1) 维 SK 方程, 首先有 Sawada, Kotera, Caudry, Dodd 和 Gibbon 从拥有无穷多对称可积性意义上推导得到. SK 方程被广泛应用在许多物理分支如共形场理论, 二维量子引力规范场理论和非线性科学中的 Liouville 方程的守恒流<sup>[4,5]</sup>. 采用 Hirota 双线性方法<sup>[6]</sup>, 可以方便地给出方程 (1) 的  $N$  平面孤子解. 将  $N$  平面孤子解中的实参数推广到复数范围, 获得了 (2 + 1) 维 SK 方程的呼吸子解, 描述线孤子和  $y$  周期孤子相互作用的解和描述两个  $y$  周期孤子相互作用的解. 文中对两个  $y$  周期孤子相互作用做了详细讨论.

## 2. (2 + 1) 维 SK 方程的精确解

在方程 (1) 中引入下述变换

$$u = -X (\ln f)_{xx}, \quad (2)$$

可以给出方程 (1) 的双线性形式

$$(D_x^6 + 5D_y D_x^3 - 5D_y^2 + D_x D_t) f \cdot f = 0, \quad (3)$$

式中算符  $D$  是 Hirota<sup>[6]</sup> 提出的双线性算子. 可以证明方程 (3) 拥有文献 [6, 7] 提出的 KdV 类型方程的标准  $N$  孤子解形式

\* 浙江省自然科学基金 (批准号: 100033), 宁波市博士基金 (批准号: 2003A61018) 和教育部基金 (批准号: C0001) 资助的课题.

$$f = 1 + \sum_{i=1}^N \exp(\eta_i) + \sum_{i < j}^N a_{ij} \exp(\eta_i + \eta_j) + \sum_{i < j < k}^N a_{ij} a_{ik} a_{jk} \exp(\eta_i + \eta_j + \eta_k) + \dots + \left( \prod_{i < j}^N a_{ij} \right) \exp\left\{ \sum_{i=1}^N \eta_i \right\} \quad (4)$$

$$\eta_i = k_i x + L_i y - \Omega_i t - \eta_i^0, \quad (5)$$

$$\Omega_i = -\frac{k_i^6 + 5L_i y - \Omega_i t - \eta_i^0}{k_i}, \quad (6)$$

$$a_{ij} = -\frac{(k_i - k_j)^6 + 5(L_i - L_j)(k_i - k_j)^3 - 5(L_i - L_j)^2 + (k_i - k_j)(\Omega_i - \Omega_j)}{(k_i + k_j)^6 + 5(L_i + L_j)(k_i + k_j)^3 - 5(L_i + L_j)^2 + (k_i + k_j)(\Omega_i + \Omega_j)}. \quad (7)$$

上述方程中的参数  $k_i, L_i$  和  $\eta_i^0$  是与第  $i$  个孤子幅度、位相有关的实参数. 虽然解 (4)–(7) 是在  $k_i, L_i$  和  $\eta_i^0$  取值为实数条件下推导得到, 但这些参数取复数时 (4)–(7) 式也是 (3) 式的解. 在上述  $N$  孤子解中取  $N=2, k_1 = k_2 = \alpha, L_1 = i\delta, L_2 = -i\delta, \eta_1^0 = \eta_2^0 = 0$ , 获得了具有呼吸效应的周期孤子解. 其  $f$  的形式为

$$f = 1 + a_{12} \exp(2\xi) + 2 \exp(\xi) \cos(\delta y + 5\delta\alpha^2 t), \quad (8)$$

$$\xi = \alpha x - \Omega_r t, \Omega_r = -\frac{\alpha^6 + 5\delta^2}{\alpha}, a_{12} = \frac{\delta^2}{\delta^2 - 3\alpha^6}. \quad (9)$$

由 (2) 式可以得到方程 (1) 的解

$$u = \frac{2\alpha^2 \left( 2 + \frac{1}{\sqrt{a_{12}}} \cos(\delta y + 5\delta\alpha^2 t) \right) \cosh(\alpha x + \Omega_r t + \ln \sqrt{a_{12}})}{\left( \cosh(\alpha x + \Omega_r t + \ln \sqrt{a_{12}}) + \frac{1}{\sqrt{a_{12}}} \cos(\delta y + 5\delta\alpha^2 t) \right)^2}. \quad (10)$$

(10) 式为非奇异的条件为

$$a_{12} > 1.$$

解 (10) 的典型结构由图 1 显示. 显然这是一个代数孤子序, 我们称它为周期孤子. 从 (10) 式中可清楚地

看到, 其周期因子在  $y$  方向的位相是时间  $t$  的函数. 因此随着  $t$  的变化, 该周期孤子在  $y$  方向呈现内部振荡现象, 即呼吸效应. 图 1(b)–(d) 将这种呼吸效应表示得清清楚楚.

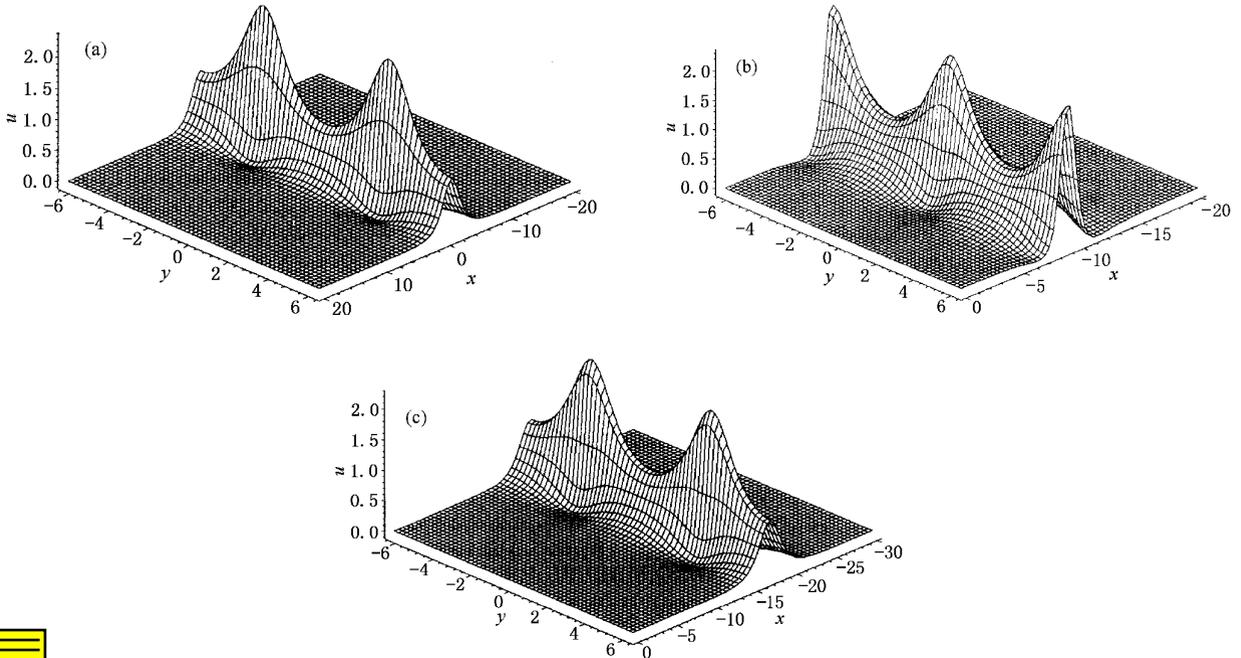


图 1 SK 方程单周期孤子图 ( $\alpha, \delta$ ) = (4/5, 1) (a)  $t = 0$  (b)  $t = 5\pi/8$  (c)  $t = 5\pi/16$



在解(4)–(7)中取  $N = 3, k_1 = k_2 = \alpha_1, L_1 = i\delta_1, L_2 = -i\delta_1, k_3 = \alpha_2, L_3 = 0, \eta_1^0 = \eta_2^0 = \eta_3^0 = 0$  可以

得到线孤子和  $y$  周期孤子相互作用的解. 具体形式为

$$u = \mathcal{X} \log f)_{xx}, \quad (11)$$

$$f = 1 + a_{12} \exp(2\xi_1) + 2 \exp(\xi_1) \cos(\eta) + \exp(\xi_2) (1 + 2L \exp(\xi_1) \cos(\eta + \phi) + a_{12} L^2 \exp(2\xi_1)), \quad (12)$$

$$\eta = \delta_1 y + 5\delta_1 \alpha_1^2 t, \xi_1 = \alpha_1 x - \omega_r t, \omega_r = \frac{\alpha_1^6 + 5\delta_1^2}{\alpha_1}, \quad (13)$$

$$\xi_2 = \alpha_2 x - \omega_2 t = \alpha_2 x + \alpha_2^5 t, \quad (14)$$

$$L \exp(i\phi) = a_{13} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^3 + \mathcal{X} i\delta_1 - 0 \mathcal{X} \alpha_1 - \alpha_2)^3 - \mathcal{X} i\delta_1 - 0)^3 + (\alpha_1 - \alpha_2 \mathcal{X} \Omega_1 - \Omega_3)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^3 + \mathcal{X} i\delta_1 + 0 \mathcal{X} \alpha_1 + \alpha_2)^3 - \mathcal{X} i\delta_1 + 0)^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 \mathcal{X} \Omega_1 + \Omega_3)}, \quad (15)$$

$$L \exp(-i\phi) = a_{23} = a_{13}^*, \quad (16)$$

式中  $L$  和  $\phi$  是相互作用常数  $a_{13}$  的模和复角.

在(4)–(7)式中取  $N = 4, k_1 = k_2 = \alpha_1, L_1 = i\delta_1, L_2 = -i\delta_1, k_3 = k_4 = \alpha_2, L_3 = i\delta_2, L_4 = -i\delta_2, -\eta_1^0 = -\eta_2^{0*} = \log\left(\frac{1}{2}\right) + i\theta'_1, -\eta_3^0 = -\eta_4^{0*} = \log\left(\frac{1}{2}\right) + i\theta'_2$  且  $\exp(i\theta'_1) = -1/\alpha_1^2 \exp(\sigma_1 + i\theta_1), \exp(i\theta'_2) = -1/\alpha_2^2 \exp(\sigma_2 + i\theta_2)$  得到了描述两个  $y$  周期孤子相互作用的解

$$u = \mathcal{X} \log f)_{xx}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} f = & 1 + \frac{a_{12}}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta_1) \\ & + \frac{a_{34}}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) - \frac{1}{\alpha_2^2} \exp(\xi_2) \cos(\eta_2) \\ & + \exp(\xi_1 + \xi_2) \left[ \frac{L_1}{2\alpha_1^2 \alpha_2^2} \cos(\eta_1 + \eta_2 + \phi_1) \right. \\ & + \left. \frac{L_2}{2\alpha_1^2 \alpha_2^2} \cos(\eta_2 - \eta_1 + \phi_2) \right] - \frac{a_{34} L_1 L_2}{4\alpha_1^2 \alpha_2^4} \\ & \times \exp(2\xi_2) \exp(\xi_1) \cos(\eta_1 + \phi_1 - \phi_2) \\ & - \frac{a_{12} L_1 L_2}{4\alpha_2^2 \alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \exp(\xi_2) \cos(\eta_2 + \phi_1 + \phi_2) \\ & + \frac{a_{12} a_{34} L_1^2 L_2^2}{16\alpha_1^2 \alpha_2^4} \exp(\mathcal{X} \xi_1 + \xi_2), \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$a_{12} = \frac{\delta_1^2}{\delta_1^2 - 3\alpha_1^6}, a_{34} = \frac{\delta_2^2}{\delta_2^2 - 3\alpha_2^6}, \quad (19)$$

$$L_1 \exp(i\phi_1) = a_{13}, L_2 \exp(i\phi_2) = a_{23},$$

$$L_1 \exp(-i\phi_1) = a_{24}, L_2 \exp(-i\phi_2) = a_{14} \quad (20)$$

$$\xi_i = \alpha_i x - \omega_i t + \sigma_i, \omega_i = -\frac{\alpha_i^6 + 5\delta_i^2}{\alpha_i}, \quad (21)$$

$$\eta_i = \delta_i y + 5\alpha_i^2 \delta_i t + \theta_i \quad (i = 1, 2). \quad (22)$$

### 3. 两个 $y$ 周期孤子的相互作用

前面得到了描述两种不同类型孤子相互作用的解(11)和(17). 本文只给出两个  $y$  周期孤子相互作用的分析, 其结论也适合于线孤子和  $y$  周期孤子的相互作用. 若假设  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  且  $\omega_2/\alpha_2 > \omega_1/\alpha_1$  从(17)式可以得到相互作用前两个分离的周期孤子

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \eta_1) = & 1 + \frac{a_{12}}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \\ & - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta_1), \quad (23) \\ f(\xi_2, \eta_2, L_1 L_2, \phi_1 + \phi_2) = & \frac{a_{12}}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \\ & \times \left( 1 - \frac{L_1 L_2}{\alpha_2^2} \exp(\xi_2) \cos(\eta_2 + \phi_1 + \phi_2) \right. \\ & \left. + \frac{a_{34} L_1^2 L_2^2}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

和相互作用后两个分离的周期孤子

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \eta_1, L_1 L_2, \phi_1 - \phi_2) = & \frac{a_{34}}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) \left( 1 - \frac{L_1 L_2}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta_1 \right. \\ & \left. + \phi_1 - \phi_2) + \frac{a_{12} L_1^2 L_2^2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f(\xi_2, \eta_2) = & 1 + \frac{a_{34}}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) \\ & - \frac{1}{\alpha_2^2} \exp(\xi_2) \cos(\eta_2) \end{aligned} \quad (26)$$

的形式, 式中脚标 1 和 2 是两个  $y$  周期孤子的标志. 考虑到用因子  $\exp(ax + b)$  ( $a$  和  $b$  不依赖  $x$ ) 乘  $f$  函数  $u$  没有任何变化. 我们只需讨论  $f$  的形式. 在这个前提下有

$$[f_1(\xi_1, \eta_1) f_2(\xi_2 + \Gamma, \eta_2 + \phi_1 + \phi_2)] \rightarrow [f_1(\xi_1 + \Gamma, \eta_1 + \phi_1 - \phi_2) f_2(\xi_2, \eta_2)], \quad (27)$$

式中  $\Gamma = \log(L_1 L_2)$ . (27) 式表明由于相互作用产生的位相漂移由相互作用常数  $(L_1 L_2, \phi_1, \phi_2)$  决定. 在传播方向的位相漂移由耦合系数的模  $L_1 L_2$  确定,  $y$  方向的位相漂移由耦合系数的复角决定. 对于 SK 方程, 允许的参数取值范围使得  $L_1 L_2$  的值只能在 0

与 1 之间 ( $0 < L_1 L_2 < 1$ ). 即 SK 方程只存在着周期孤子间弹性的排斥相互作用. 此外, 解(17)中的  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) 是时间  $t$  的函数,  $y$  方向的内部振荡现象依然存在.

图 2 是两个  $y$  周期孤子的相互作用图. 在  $0 < L_1 L_2 < 1$  的情况下, 两个周期孤子的隆起高度几乎相同. 随着两个孤子距离的变小, 各自的形状发生变化. 相互作用过程结束, 两个周期孤子恢复原来的形状. 整个相互作用过程在一定间距下完成, 似乎在传播方向上通过它们的尾巴交换着能量和动量. 而  $y$  方向的内部振荡现象从图中也可明显地看到.

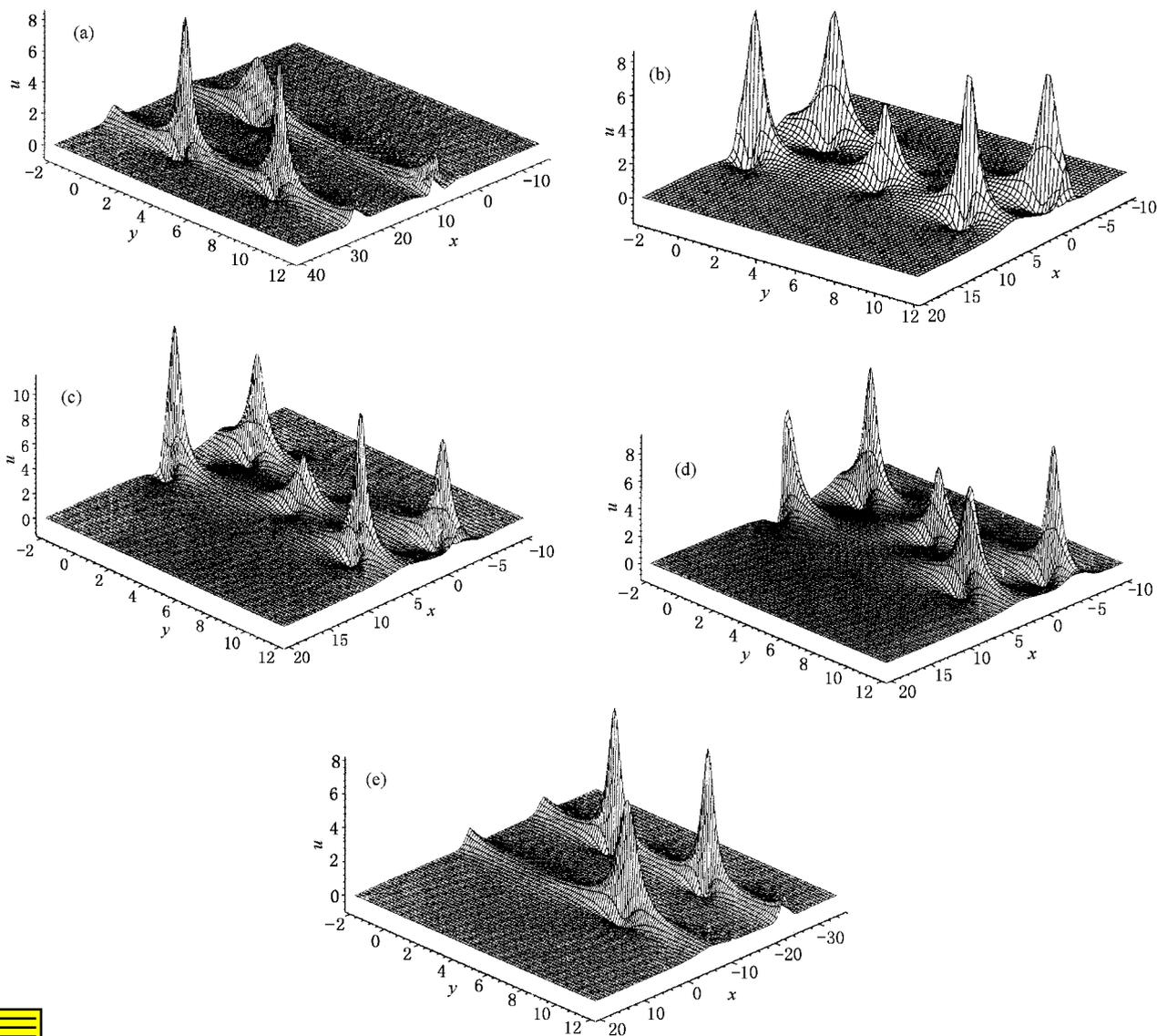


图 2 SK 方程两个  $y$  周期孤子相互作用图  $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = (2/3, 2/\sqrt{3}, 1/2, 1/\sqrt{3})$ ;  $(\sigma_1, \sigma_2, \beta_2, \beta_2) = (0, 0, 0, 0)$ ;  $L_1 L_2 = 0.0716$ ;  $(\omega_2/\alpha_2, \omega_1/\alpha_1) = (-323/48, -1231/81)$  (a)  $t = -1.5$  (b)  $t = -0.1$  (c)  $t = 0$  (d)  $t = 0.2$  (e)  $t = 1.5$



## 4. 结论和讨论

本文采用双线性方法给出了(2+1)维 SK 方程的  $N$  平面孤子解形式. 将参数的取值从实数范围扩展到了复数范围, 得到了具有呼吸效应的周期孤子解. 描述线孤子和  $y$  周期孤子相互作用的解和描述两个  $y$  周期孤子相互作用的解. 对于两个  $y$  周期孤子间的相互作用, 从解析和几何两个角度进行了讨论. 相互作用与耦合系数有关, 其幅度确定了传播方向的位相漂移, 复角确定了  $y$  方向的位相漂移. 由于 SK 方程所允许的耦合系数的模只能在 0 与 1 之间, 因此只存在着弹性的排斥相互作用. 从函数  $f$  的表达式(16)可看到周期因子中的  $\eta_i$  是时间  $t$  的函数, 两个周期孤子在  $y$  方向都呈现内部振荡现象.

虽然我们只给出了两个  $y$  周期孤子相互作用的分析, 其线孤子和  $y$  周期孤子的相互作用也可以用同样方式进行讨论, 并且呈现类似的相互作用现象.

我们曾用分离变量方法给出了 ANNV 方程和

NNV 方程描述线孤子和  $y$  周期孤子相互作用的解. 由于表示两个  $y$  周期孤子相互作用解的形式比较复杂, 又 SK 方程是单分量的非线性演化方程, 我们无法用变量分离形式来获得这种解形式. 作为精确求解有效手段的分离变量方法, 比较适合求解多分量的 2+1 维非线性演化方程. 但到目前为止, 我们未能成功的运用变量分离手段获得任意一个多分量 2+1 维非线性演化方程的描述两个  $y$  周期孤子相互作用的解. 对于单分量的高维非线性演化方程, 很难用变量分离形式得到有意义的孤子结构. 双线性方法是单分量高维非线性演化方程精确求解有效的手段. 文献 [7—12] 给出了 2+1 维非线性方程中指数局域的孤子 (dromion) 相互作用的某些规律. 这些规律同样适合于本文讨论的情况. 即若高维非线性方程的多平面孤子解形式符合 Hirota 标准解形式, 这种解所反映的孤子相互作用是弹性的. 相互作用的结果, 波形不变, 速度不变, 位相发生漂移.

作者感谢陈一新教授和楼森岳教授的帮助和讨论.

- 
- [ 1 ] Ablowitz M J and Segur H 1981 *Solitons and the Inverse Scattering Transformation* (SIAM, Philadelphia)
- [ 2 ] Loutsenko I and Roubtsov D 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3011  
Tajiri M and Maesono H 1997 *Phys. Rev. E* **55** 3351  
Gedalin M, Scott T C and Band Y B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 448
- [ 3 ] Nucci M C 1989 *J. Phys. A* **22** 2897
- [ 4 ] Sawada K and Kotera 1974 *Prog. Theor. Phys.* **51** 1355  
Caudry P J, Dodd R K and Gibbon J D 1976 *Proc. R. Soc. A* **351** 407
- [ 5 ] Lou S Y 1994 *J. Math. Phys.* **35** 2336
- [ 6 ] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192
- [ 7 ] Ruan H Y and Chen Y X 2000 *Phys. Rev. E* **62** 5738
- [ 8 ] Ruan H Y and Chen Y X 1999 *J. Math. Phys.* **40** 248
- [ 9 ] Ruan H Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1781 (in Chinese) [ 阮航宇 1999 物理学报 **48** 1781 ]
- [ 10 ] Ruan H Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 329 (in Chinese) [ 阮航宇 2001 物理学报 **50** 329 ]
- [ 11 ] Lou S Y 1997 *Acta Phys. Sin. (Overseas Edition)* **6** 561
- [ 12 ] Ruan H Y and Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1313 (in Chinese) [ 阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **52** 1313 ]

# Interactions between two $Y$ -periodic solitons in the $(2 + 1)$ -dimensional Sawada-Kotera equations<sup>\*</sup>

Ruan Hang-Yu

( *Institute of Modern Physics ,Ningbo University ,Ningbo 315211 ,China* )

( *Zhejiang Institute of Modern Physics ,Zhejiang University ,Hangzhou 310027 ,China* )

( Received 20 August 2003 ; revised manuscript received 3 November 2003 )

## Abstract

The exact solutions of the  $(2 + 1)$ -dimensional Sawada-Kotera (SK) equation are presented by using the bilinear method. The  $N$ -breather solutions, the solution to describe the interaction between a line soliton and a  $y$ -periodic soliton and the solution to express the interaction between two  $y$ -periodic soliton are included in the exact solutions. Detailed behaviors of interactions between two  $y$ -periodic solitons are illustrated both analytically and graphically. For SK equation, the value of interactive constant can only be taken in some range. We can only obtain the repulsive interaction that keeps the shapes of soliton unchanged.

**Keywords** : interaction between two  $y$ -periodic solitons , SK equation , bilinear method

**PACC** : 0230 , 0340

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province ,China( Grant No. 100033 ) ,the Doctor Foundation of Ningbo City( Grant No. 2003A61018 )and the Foundation from Ministry of Education of China( Grant No. C0001 ).