第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1652-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.6,June,2004

环形非球谐振子势 Klein-Gordon 方程的束缚态*

陆法林 陈昌远

(盐城师范学院物理系,盐城 224002)

(2003 年 7 月 8 日收到;2003 年 9 月 1 日收到修改稿)

用分离变量方法讨论了在环形非球谐振子标量势和矢量势相等条件下的 Klein-Gordon 方程的束缚态解.给出了用广义连带勒让得多项式表示的归一化角向波函数和用合流超几何函数表示的归一化径向波函数,获得了精确的束缚态能谱方程.

关键词:环形非球谐振子势,Klein-Gordon 方程,束缚态

PACC:0365,1110Q,1240Q

1. 引 言

在强耦合条件下,势场中运动粒子的相对论效应变得十分重要[1].当考虑相对论效应时,零自旋粒子在势场中运动需要用 Klein-Gordon 方程描述.近年来,许多作者对不同类型势的相对论性质做了大量的研究.Dominguez-Adame 和 Talukdar 等人分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解和散射态解[2,3],胡嗣柱等人给出了在 Hulthén 标量势和矢量势相等条件下 Dirac 方程的 s 波束缚态解[4],侯春风等人分别给出了在 Morse 和 Wood-Saxon 标量势和矢量势相等条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[5,6]和相对论性氢原子径向算符矩阵元通项的计算公式[7],陈刚给出了在 Pöschl-Teller 势、双原子分子势阱和无反射势阱型标量势和矢量势相等条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[8—10],郭建友给出了在 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型势阱标量势和矢量势相等条件下 Klein-Gordon方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[11],陈昌远等人给出了具有 n 维氢原子型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程的束缚态解[12].

环形非球谐振子势是指在非球谐振子势外面再加上一个环形平方反比势,该模型势在量子化学和原子核物理中有着广泛的应用.人们用分离变量等方法研究了环形振子和环形非球振子势 Schrödinger 方程的束缚态解[13—15],也给出了球谐振子势的相对论束缚态解[16]和环形振子势的 Klein-Gordon 方程束缚态解[17].本文是在环形非球谐振子势型标量势和矢量势相等条件下,研究 Klein-Gordon 方程的束缚态性质.所采用的方法是首先对环形非球谐振子势的 Klein-Gordon 方程进行分离变量,得到相应的角向方程和径向方程;然后求解角向方程,将角向波函数用广义勒让得多项式表示;最后根据束缚态的性质,将径向波函数用合流超几何函数表示,并给出了体系束缚态的能谱方程.

2. Klein-Gordon 方程的变量分离

设粒子的静止质量为 M,包含静能在内的能量为 E,粒子的动量算符为 P,并取 $\hbar = c = 1$,根据文献[2],球坐标系中具有标量势 $S(r,\theta)$ 与矢量势 $V(r,\theta)$ 的 Klein-Gordon 方程为

$$\{P^2 + [M + S(r,\theta)]^2\}\psi(r,\theta,\varphi) = [E - V(r,\theta)]^2\psi(r,\theta,\varphi). \tag{1}$$

球坐标系中环形非球谐振子势为

$$V(r,\theta) = V(r) + \frac{b}{r^2\sin^2\theta}, V(r) = \frac{1}{2}Kr^2 + \frac{A}{r^2}, \tag{2}$$

式中 A 和 b 是实数,K 是弹性系数.考虑在标量势与矢量势相等时的情况,即

$$V(r,\theta) = S(r,\theta). \tag{3}$$

---

* 江苏省教育厅自然科学基金(批准号:02KJB140007)及盐城师范学院专项基金资助的课题.

将(2)和(3)式代入(1)式得

$$P^2\psi(r,\theta,\varphi)+[(M^2-E^2)+2(M+E)V(r,\theta)]\psi(r,\theta,\varphi)=0. \tag{4}$$

作变量分离,令

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{u(r)}{r}H(\theta)\Phi(\varphi), \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式,得到 φ 和 θ 方向的角向波函数以及径向波函数所满足的微分方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi(\varphi)=0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}H(\theta)\right)+\left[\lambda-\frac{2(E+M)b+m^2}{\sin^2\theta}\right]H(\theta)=0, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u(r)}{\mathrm{d}r^2}+\left[(E^2-M^2)-2(E+M)V(r)-\frac{\lambda}{r^2}\right]u(r)=0. \tag{8}$$

其中 m 和 λ 是变量分离常数.

3. 角向波函数

根据周期性边界条件,由(6)式可得 φ 方向的归一化波函数为

$$\Phi(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},m=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{9}$$

为了求解(7)式,令

$$m'=\sqrt{2(E+M)b+m^2},\lambda=l'(l'+1), \tag{10}$$

并作变量代换 $x=\cos\theta$,则(7)式可化为

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2H(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}+\left[l'(l'+1)-\frac{m'^2}{1-x^2}\right]H(x)=0, \tag{11}$$

上式正是广义连带勒让得微分方程[18].为了保证在 $x=\pm1$ 时解的有限性,l' 和 m' 须满足条件

$$l'-m'=s,s=0,1,2,\cdots, \tag{12}$$

在此条件下,广义连带勒让得微分方程的解是广义连带勒让得多项式

$$P_{l'}^{m'}(x)=(1-x^2)^{\frac{m'}{2}}\times\sum_{k=0}^{\left[\frac{l'-m'}{2}\right]}\frac{(-1)^k\Gamma(2l'-2k+1)}{2^{l'}k!(l'-m'-2k)!\Gamma(l'-k+1)}\times x^{l'-m'-2k}. \tag{13}$$

于是 θ 方向波函数可写成

$$H(\theta)=A_{l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta). \tag{14}$$

其中 $A_{l'm'}$ 是归一化常数,根据归一化条件

$$\int_0^{\pi}H^2(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=1, \tag{15}$$

得归一化常数 $A_{l'm'}$ 为

$$A_{l'm'}=\sqrt{\frac{2l'+1}{2}\cdot\frac{(l'-m')!}{\Gamma(l'+m'+1)}}. \tag{16}$$

故 θ 方向满足归一化条件的波函数为

$$H(\theta)=\sqrt{\frac{2l'+1}{2}\cdot\frac{(l'-m')!}{\Gamma(l'+m'+1)}}(\sin\theta)^{m'}\times\sum_{k=0}^{\left[\frac{l'-m'}{2}\right]}\frac{(-1)^k\Gamma(2l'-2k+1)}{2^{l'}k!(l'-m'-2k)!\Gamma(l'-k+1)}\times(\cos\theta)^{l'-m'-2k}. \tag{17}$$

如果考虑环形势效应,即(2)式中 $b\neq0$,则由(10)和(12)式可得 l' 和 m' 是非整数.如果不考虑环形势效应,即 $b=0$,则 $m'=|m|=0,1,2\cdots$,$l'=l=s+|m|=0,1,2,\cdots$,l 和 m 均为整数,是通常意义下的角量子数和磁量子数,相应的 θ 方向波函数为

$$H(\theta)=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}(\sin\theta)^{|m|}\cdot\sum_{k=0}^{\left[\frac{l-|m|}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2l-2k)!}{2^lk!(l-|m|-2k)!(l-k+1)}(\cos\theta)^{l-|m|-2k}=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\cdot P_l^{|m|}(\cos\theta), \tag{18}$$

上式结果与中心势场 θ 方向的波函数是一样的,其中 $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ 是连带勒让得多项式.

4. 径向波函数和能谱方程

将(2)式代入(8)式得径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(r)}{\mathrm{d}r^2}+\Big[(E^2-M^2)-(E+M)Kr^2-\frac{2(E+M)A+l'(l'+1)}{r^2}\Big]u(r)=0, \tag{19}$$

令

$$\beta=\sqrt[4]{(E+M)K},\alpha=(E-M)\sqrt{(E+M)/K},$$
$$L(L+1)=2(E+M)A+l'(l'+1), \tag{20}$$

并作变量代换 $\rho=\beta r$,则(19)式可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\Big[\alpha-\rho^2-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\Big]u(\rho)=0. \tag{21}$$

考虑方程在 $r\to 0$ 和 $r\to\infty$ 的渐近性质,做函数变换

$$u(\rho)=\rho^{L+1}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}f(\rho), \tag{22}$$

将上式代入(21)式得 $f(\rho)$ 满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\rho^2}+2\Big(-\rho+\frac{L+1}{\rho}\Big)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}+(\alpha-2L-3)f=0. \tag{23}$$

令 $\xi=\rho^2$,(23)式化为

$$\xi\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\xi^2}+\Big(L+\frac{3}{2}-\xi\Big)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}-\frac{1}{4}(2L+3-\alpha)f=0, \tag{24}$$

上式正是合流超几何方程.其解为合流超几何函数

$$f(\xi)=F\Big(\frac{2L+3-\alpha}{4},L+\frac{3}{2},\xi\Big). \tag{25}$$

为了满足体系束缚态的边界条件 $u(\xi\to\infty)\to$有限,合流超几何函数须中断为合流超几何级数,合流超几何函数中参数应满足条件

$$\frac{2L+3-\alpha}{4}=-n_r,n_r=0,1,2,\cdots \tag{26}$$

将(12)和(20)式代入(26)式得

$$(E-M)\sqrt{E+M}=2\sqrt{K}(2n_r+L+3/2), \tag{27}$$

式中

$$L=-1/2+\sqrt{2(E+M)A+(l'+1/2)^2}, \tag{28}$$
$$l'=\sqrt{2(E+M)b+m^2}+s. \tag{29}$$

合并以上三式得能谱方程为

$$(E-M)\sqrt{E+M}=2\sqrt{K}\Big\{2n_r+\sqrt{2(E+M)A+[\sqrt{2(E+M)b+m^2}+s+1/2]^2}+1\Big\}. \tag{30}$$

式中 $n_r=|m|=s=0,1,2,\cdots$.

体系相应的束缚态的径向波函数为

$$u(\rho)=N_{n_rL}\rho^{L+1}\mathrm{e}^{-\frac{\rho^2}{2}}F(-n_r,L+3/2,\rho^2). \tag{31}$$

由归一化条件

$$\int_0^\infty u^2(\rho)\mathrm{d}r=1, \tag{32}$$

并利用合流超几何函数和广义拉盖尔函数的关系及广义拉盖尔函数之间的正交性关系[19]

$$F(-n_r,\mu+1,z)=\frac{n_r!\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n_r+\mu+1)}L_{n_r}^{\mu}(z), \tag{33}$$

$$\int_0^\infty z^{\mu}\mathrm{e}^{-z}L_{n_r}^{\mu}(z)L_{n'_r}^{\mu}(z)\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(n_r+\mu+1)}{n_r!}\delta_{n_rn'_r}, \tag{34}$$

得归一化常数为

$$N_{n_rL}=\frac{1}{\Gamma(L+3/2)}\sqrt{\frac{2\beta\cdot\Gamma(n_r+L+3/2)}{n_r!}}, \tag{35}$$

故在矢量势等于标量势的条件下,环形非球谐振子势 Klein-Gordon 方程的束缚态的径向波函数为

$$u(\beta r)=\frac{1}{\Gamma(L+3/2)}\sqrt{\frac{2\beta\cdot\Gamma(n_r+L+3/2)}{n_r!}}\cdot(\beta r)^{L+1}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\beta r)^2}{2}}\cdot F(-n_r,L+3/2,\beta^2r^2). \tag{36}$$

考虑环形非球谐振子势三种特殊情况下的能谱方程和径向波函数.对于通常球谐振子,不考虑屏蔽势和环形势效应,即(2)式中 $b=0$ 和 $A=0$,由(28)和(29)式得 $L=l'=l=|m|+s=0,1,2,\cdots$,于是(30)式即退化为球谐振子的能谱方程[16]

$$(E-M)\sqrt{E+M}=2\sqrt{K}\{2n_r+l+3/2)\}. \tag{37}$$

相应的径向波函数为

$$u(\beta r)=\frac{1}{\Gamma(l+3/2)}\sqrt{\frac{2\beta\cdot\Gamma(n_r+l+3/2)}{n_r!}}\cdot(\beta r)^{l+1}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\beta r)^2}{2}}\cdot F(-n_r,l+3/2,\beta^2r^2). \tag{38}$$

式中 l 和 m 分别为通常意义下的角量子数和磁量子数.

对于通常非球谐振子,不考虑环形势效应,仅考虑屏蔽势效应,取 $b=0$,则由(28)和(29)式得 $l'=l=|m|+s$,$L_A=-1/2+\sqrt{2(E+M)A+(l+1/2)^2}$,于是(30)式即退化为非球谐振子的能谱方程

$$(E-M)\sqrt{E+M}=2\sqrt{K}\{2n_r+L_A+3/2\}. \tag{39}$$

相应的径向波函数为

$$u(\beta r)=\frac{1}{\Gamma(L_A+3/2)}\sqrt{\frac{2\beta\cdot\Gamma(n_r+L_A+3/2)}{n_r!}}\cdot(\beta r)^{L_A+1}\cdot e^{-\frac{(\beta r)^2}{2}}\cdot F(-n_r,L_A+3/2,\beta^2r^2). \tag{40}$$

对于环形振子势，仅考虑环形势效应，而不考虑屏蔽势效应，此情形 $A=0$. 由(28)和(29)式得 $L=l'=\sqrt{2(E+M)b+m^2+s}$ 于是(30)式即退化为环形振子的能谱方程[17]

$$(E-M)\sqrt{E+M}=2\sqrt{K}\{2n_r+l'+3/2\}, \tag{41}$$

相应的径向波函数为

$$u(\beta r)=\frac{1}{\Gamma(l'+3/2)}\sqrt{\frac{2\beta\cdot\Gamma(n_r+l'+3/2)}{n_r!}}\cdot(\beta r)^{l'+1}e^{-\frac{(\beta r)^2}{2}}F(-n_r,l'+3/2,\beta^2r^2). \tag{42}$$

5. 结　　论

在标量势和矢量势相等条件下，我们研究了环形非球谐振子势 Klein-Gordon 方程的束缚态性质，体系的性质由 n_r，m 和 s 三个量子数及势参数 K，A 和 b 描述. 给出了精确的能谱方程(30)式，归一化的角向波函数(17)式可以用广义的连带勒让得多项式表示，归一化的径向波函数(36)式则可用合流超几何函数表示. 球谐振子势、非球谐振子势和环形球谐振子势的 Klein-Gordon 方程束缚态解均为本文环形非球谐振子势 Klein-Gordon 方程束缚态解的特例.

[1] Wang I C and Wong C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348

[2] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[3] Talukdar B, Yunus A and Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[4] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta. Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[5] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[6] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta. Phys. Sin.* (Over seas Edition) **8** 561

[7] Hou C F, Jiang Y Y, Sun X D and Sun W J 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 1587 (in Chinese) [侯春风、姜永远、孙秀冬、孙万钧 1999 物理学报 **48** 1587]

[8] Chen G 2001 *Acta. Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[9] Chen G and Lou Z M 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1071 (in Chinese) [陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1071]

[10] Chen G and Lou Z M 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1075 (in Chinese) [陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1075]

[11] Guo J Y 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[12] Chen C Y, Liu C L, Lu F L and Sun D S 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 1579 (in Chinese) [陈昌远、刘成林、陆法林、孙东升 2003 物理学报 **52** 1579]

[13] Quesne C 1988 *J. Phys.* A **21** 3093

[14] Carpido-Bernido M V and Bernido C C 1989 *Phys. Lett.* A **134** 315

[15] Chen C Y, Sun D S, Liu Y W and Cheng T L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 468 (in Chinese) [陈昌远、孙东升、刘友文、成天龙 2002 物理学报 **51** 468]

[16] Qiang W C 2002 *Chin. Phys.* **11** 757

[17] Qiang W C 2003 *Chin. Phys.* **12** 136

[18] Chen C Y and Hu S Z 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 9 (in Chinese) [陈昌远、胡嗣柱 1995 物理学报 **44** 9]

[19] Wang Z X and Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* (Beijing: Peking University Press) pp318—323 (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京:北京大学出版社) 第 318—323 页]

Bound states of Klein-Gordon equation for ring-shaped non-spherical harmonic oscillator potentials*

Lu Fa-Lin Chen Chang-Yuan
(*Department of Physics, Yancheng Teachers College, Yancheng* 224002, *China*)
(Received 8 July 2003; revised manuscript received 1 September 2003)

Abstract

By using the ordinary method of variable separation, the bound states of Klein-Gordon equation of the ring-shaped non-spherical harmonic oscillator with equal scalar and vector potentials are solved. The normalized angular wave function expressed in terms of the universal associated-Legendre polynomial and the normalized radial wave function expressed in terms of the confluent hyper-geometric function are presented. The exact energy spectrum equations are obtained.

Keywords: ring-shaped non-spherical harmonic oscillator potential, Klein-Gordon equation, bound states
PACC: 0365, 1110Q, 1240Q

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Jiangsu Province, China (Grant No. 02KJB140007), and the Special Foundation of Yancheng Teachers College, China.