第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1669-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.6,June,2004

缓变动态 Kerr-Newman 黑洞的量子热力学性质

王钢柱　王纪龙

(太原理工大学应用物理系,太原　030024)

(2003 年 7 月 18 日收到;2003 年 10 月 13 日收到修改稿)

引入局域热平衡概念,用 Damour-Ruffini 方法和薄膜模型研究了缓变动态 Kerr-Newman 黑洞的 Hawking 辐射和熵. 得到了黑洞的 Hawking 温度和辐射谱公式,Hawking 温度随时间和视界面上的位置而变化,辐射谱为准黑体谱;计算了黑洞熵,当取与静态球对称黑洞情况相同的截断关系时便得到了黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵. 结果表明,缓变动态黑洞的温度是局域量,缓变动态黑洞的熵与稳态黑洞情况一样正比于黑洞视界面面积.

关键词:缓变动态黑洞, Hawking 辐射, 黑洞熵
PACC: 0470, 9760L

1. 引　　言

众所周知,自从黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵被提出以后,人们就一直在寻求黑洞熵的统计起源. 't Hooft 提出的砖墙模型[1] 为黑洞熵给出了一种可能的统计解释. 但该模型需要黑洞与其外部量子场达到整体热平衡,因而只能计算静态和稳态黑洞熵. 对于动态黑洞不存在这样的整体热平衡,为了计算动态黑洞熵砖墙模型被改进为薄膜模型(也称为薄膜-砖墙模型)[2—11]. 当动态黑洞变化比较缓慢时,黑洞及其与外部量子场之间可以建立起局域热平衡. 利用局域热平衡的概念,可以将黑洞视界面外附近的薄层分成许多小元胞,在每个小元胞内可以定义局域热力学量(如温度,由于这些元胞离视界面足够近,因而元胞的局域温度也就是视界面上离该元胞最近处的局域温度),并且可用平衡统计方法求出各元胞内量子场的自由能和熵,再对所有元胞求和便可得到薄层内所有量子场的熵. 薄膜模型表明,该薄层内量子场的熵就是黑洞熵,这就是用薄膜模型求黑洞熵的基本思想. 下面以静态球对称黑洞为例来具体阐明薄膜模型.

静态球对称时空线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -f(r)\mathrm{d}t^2 + f(r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,$$

取一薄层($r_0+\epsilon \to r_0+\epsilon+\delta$),其中 r_0 由 $f(r_0)=0$ 给出,表征黑洞视界面位置,$\epsilon \leqslant r_0$,$\delta \leqslant r_0$,ϵ 和 δ 分别是薄层离开视界面的距离和薄层的厚度. 将薄层分成许多元胞,用量子平衡统计方法求出各元胞内量子场的自由能和熵,再对所有元胞求和便可得到薄层内所有量子场的熵为

$$S = \frac{8\pi^3}{45\beta^3}\int_{r_0+\epsilon}^{r_0+\epsilon+\delta}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2(r)}. \tag{1}$$

由 $f(r_0)=0$ 和 $p(r_0)\equiv f'(r_0)=2\kappa$ 得到

$$S \approx \frac{\pi^2 A}{90\beta^3\kappa^2}\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)},$$

其中 $A=4\pi r_0^2$ 为黑洞视界面面积. 将 $\kappa=\frac{2\pi}{\beta}$代入上式得

$$S \approx \frac{A}{360\beta}\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)}. \tag{2}$$

如果选取适当的 ϵ 和 δ 使其满足

$$\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)} = 90\beta \equiv \tau, \tag{3}$$

则得到薄层内量子场的熵

$$S \approx A/4. \tag{4}$$

虽然只考虑了视界面附近受条件(3)限制的薄层,但在最后结果中要令 $\epsilon\to 0$ 和 $\delta\to 0$,即在最后的分析中只考虑的是紧贴视界面的二维面或者是视界面本身. 从截断关系(3)可以得到 $\delta=\frac{\epsilon^2\tau}{1-\epsilon\tau}$,当 $\epsilon\to 0$ 时 $\delta\to 0$. 因此,当薄层趋于视界面时薄层的厚度可以很小而(4)式所给的熵却不变. 在这种情况下,薄层本身可看作视界面,(4)式的熵可看作视界面上的二维量子热气体的熵. 这表明,这里得到的熵与黑洞外的物质场和薄层本身无关,是作为黑洞特征面的事件视界的几何特征的体现. 黑洞视界面决定了 Hawking 辐射和辐射温度,黑洞温度又决定了黑洞熵的存在,因而黑洞事件视界决定了黑洞具有熵,(4)式给出的熵就

只能解释为黑洞熵,即 Bekenstein-Hawking 熵.

稳态黑洞只是一个理想模型,由于 Hawking 蒸发和黑洞吸积,实际黑洞都是动态黑洞.并且由于至今存在的黑洞其质量远大于 Planck 质量的尺度而其 Hawking 蒸发非常缓慢,因而实际有意义的黑洞又都是缓变动态黑洞.毫无疑问,对缓变动态黑洞的研究无论就黑洞理论还是黑洞观测都是非常重要的.宇宙中存在大量旋转带电天体,其演化的最终结局之一就是缓变动态 Kerr-Newman 黑洞,因此,对该类黑洞的研究尤显重要.本文研究了缓变动态 Kerr-Newman 黑洞的 Hawking 辐射和熵.首先,用赵峥等人[12—17]改进的 Damour-Ruffini 方法得到了 Hawking 辐射温度和辐射谱公式,然后用薄膜模型计算了黑洞熵.结果表明,黑洞温度是局域量;辐射谱是准黑体谱;当取与静态球对称黑洞相同的截断时便可得到该缓变动态黑洞的熵,其同样为黑洞视界面面积的四分之一.

2. Hawking 辐射

1976 年,Damour 和 Ruffini 给出了一种证明 Hawking 效应存在的方法[18].由于该方法是对黑洞视界面上各点的辐射逐点进行研究,因而可用以讨论视界面上各点温度不同的热辐射,包括动态黑洞的热辐射.赵峥等人[12—17]改进了 Damour-Ruffini 方法,用该方法能同时得到黑洞视界面应满足的方程、Hawking 温度和辐射谱公式.

动态 Kerr-Newman 黑洞的线元由荆和王[19]给出,用超前爱丁顿坐标 v 和$(-,+,+,+)$号差可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& -[1-(2Mr-Q^2)\rho\bar{\rho}]\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}r\\&-2a(2Mr-Q^2)\rho\bar{\rho}\sin^2\theta\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi\\&-2a\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{\rho\bar{\rho}}\mathrm{d}\theta^2+[(2Mr\\&-Q^2)a^a\rho\bar{\rho}\sin^2\theta+(r^2+a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\\=&\tilde{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu,\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $M(v)$和 $Q(v)$是 v 的任意函数,分别为黑洞的质量和电荷,$aM(v)$是黑洞的总角动量,a 是常数,$\rho=-1/(r-\mathrm{i}a\cos\theta)$,$\bar{\rho}$是 ρ 的复共轭.

由于时空的旋转对称性,可设黑洞事件视界的曲面方程为

$$F(v,r,\theta)=0 \quad 或 \quad r_\mathrm{h}=r_\mathrm{h}(v,\theta),$$

该曲面应满足类光超曲面条件

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial x^\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu}=0,$$

其中 $\tilde{g}^{\mu\nu}$是逆变度规.即

$$\begin{aligned}&a^2\sin^2\theta\dot{r}_\mathrm{h}^2-(2Mr_\mathrm{h}-Q^2-r_\mathrm{h}^2-a^2)\\&+r_\mathrm{h}'^2-2(r_\mathrm{h}^2+a^2)\dot{r}_\mathrm{h}=0,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $\dot{r}_\mathrm{h}\equiv\dfrac{\partial r_\mathrm{h}}{\partial v}$和 $r'_\mathrm{h}\equiv\dfrac{\partial r_\mathrm{h}}{\partial\theta}$.

本文只讨论 Klein-Gordon 场.在弯曲时空中质量为 μ 的 Klein-Gordon 粒子应满足方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu}\right)=\mu^2\Psi.\tag{7}$$

引入广义乌龟坐标变换

$$\begin{aligned}r_* &= r+\frac{1}{2\kappa}\ln(r-r_\mathrm{h}(v,\theta)),\\v_* &= v-v_0,\\\theta_* &= \theta-\theta_0,\\\varphi_* &= \psi-\psi_0,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $r_\mathrm{h}(v,\theta)$满足方程(6),$\kappa\equiv\kappa(v_0,\theta_0)$是可调节参数,$v_0$,$\theta_0$ 和 φ_0 是常数.将上述乌龟坐标变换代入方程(7),可以得到用乌龟坐标表示的 Klein-Gordon 方程,然后再用

$$\left(\rho\bar{\rho}\frac{-a^2\sin^2\theta\dot{r}_\mathrm{h}+(r^2+a^2)[2\kappa(r-r_\mathrm{h})+1]}{2\kappa(r-r_\mathrm{h})}\right)^{-1}$$

乘方程两边,再令 $r\to r_\mathrm{h}$(代表 $v\to v_0$,$\theta\to\theta_0$,$\varphi\to\varphi_0$,$r\to r_\mathrm{h}(v_0,\theta_0)$)化简方程后,最后取 $r\to r_\mathrm{h}$ 的极限,得到

$$\begin{aligned}&I\frac{\partial^2\Psi}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2\Psi}{\partial r_*\partial v_*}+A\frac{\partial\Psi}{\partial r_*}\\&+B\frac{\partial^2\Psi}{\partial r_*\partial\theta_*}+C\frac{\partial^2\Psi}{\partial r_*\partial\varphi_*}=0,\end{aligned}\tag{9}$$

其中

$$A\equiv\frac{-a^2\sin^2\theta_0\ddot{r}_\mathrm{h}+4r_\mathrm{h}\dot{r}_\mathrm{h}+2M-2r_\mathrm{h}-r''_\mathrm{h}+[-f_1\dot{r}_\mathrm{h}+f_2-f_3r'_\mathrm{h}](r_\mathrm{h}^2+a^2\cos^2\theta_0)}{-\dot{r}_\mathrm{h}a^2\sin^2\theta_0+r_\mathrm{h}^2+a^2},$$

$$B\equiv-\frac{2r'_\mathrm{h}}{-\dot{r}_\mathrm{h}a^2\sin^2\theta_0+r_\mathrm{h}^2+a^2},\quad C\equiv\frac{2a(1-\dot{r}_\mathrm{h})}{-\dot{r}_\mathrm{h}a^2\sin^2\theta_0+r_\mathrm{h}^2+a^2},$$

$$I\equiv\lim_{r\to r_\mathrm{h}}\frac{a^2\sin^2\theta\dot{r}_\mathrm{h}^2-(2Mr-Q^2-r^2-a^2)+r_\mathrm{h}'^2-2(r^2+a^2)\dot{r}_\mathrm{h}}{2\kappa(r-r_\mathrm{h})(-\dot{r}_\mathrm{h}a^2\sin^2\theta+r^2+a^2)},$$

$$f_1 \equiv \frac{\partial \tilde{g}^{10}}{\partial r} + 2r\rho\bar{\rho}\ \tilde{g}^{10}, f_2 \equiv \frac{\partial \tilde{g}^{11}}{\partial r} + 2r\rho\bar{\rho}\ \tilde{g}^{11},$$

$$f_3 \equiv \frac{\partial \tilde{g}^{22}}{\partial \theta} + (\mathrm{ctg}\theta - 2a^2\rho\bar{\rho}\ \sin\theta\cos\theta)\tilde{g}^{22}.$$

A,B,C 是有限常数,而 I 的分母当 $r\to r_{\mathrm{h}}$ 时趋于零. I 必须是$\frac{0}{0}$型才能保证其不发散. 因此 I 的分子当 $r\to r_{\mathrm{h}}$ 时应该趋于零. 所以

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to r_{\mathrm{h}}}[a^2\sin^2\theta\dot{r}_{\mathrm{h}}^2 - (2Mr - Q^2 - r^2\\&- a^2) + r_{\mathrm{h}}'^2 - 2(r^2+a^2)\dot{r}_{\mathrm{h}}]\\&= a^2\sin^2\theta\dot{r}_{\mathrm{h}}^2 - (2Mr_{\mathrm{h}} - Q^2 - r_{\mathrm{h}}^2 - a^2)\\&+ r_{\mathrm{h}}'^2 - 2(r_{\mathrm{h}}^2+a^2)\dot{r}_{\mathrm{h}} = 0.\end{aligned}$$

其正是方程(6). 用罗比塔法则并调节参数 κ 使 $I=1$ 可使视界面附近的方程(9)成为平直时空的标准波动方程,从而得到

$$\kappa = \frac{r_{\mathrm{h}} - M - 2r_{\mathrm{h}}\dot{r}_{\mathrm{h}}}{r_{\mathrm{h}}^2 + a^2 - \dot{r}_{\mathrm{h}}a^2\sin^2\theta}. \qquad (10)$$

设测量 M 和 Q 所需的最短时间 Δv 内 M 和 Q 的变化分别为 ΔM 和 ΔQ,则该黑洞能达到局域热平衡的条件为[20]

$$\frac{\Delta M}{M} \leqslant 1, \frac{\Delta Q}{Q} \leqslant 1, \qquad (11)$$

满足此条件的黑洞称为缓变动态黑洞,对其便可引入局域热平衡概念.

由于黑洞是缓变的,可设方程(9)的解具有似稳态形式

$$\Psi = R(r_*)\rho(\theta_*,\varphi_*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + \mathrm{i}G(\theta_*,\varphi_*)}, \qquad (12)$$

其中 ω 是实常数, $\rho(\theta_*,\varphi_*)$, $G(\theta_*,\varphi_*)$ 是实函数. 因此

$$R \sim \mathrm{e}^{-(A+BD+CE+\mathrm{i}B\kappa_\theta+\mathrm{i}C\kappa_\varphi-2\mathrm{i}\omega)r_*}.$$

其中 $D = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta_*}\right)|_{\theta_0,\varphi_0}$, $k_\theta = \left(\frac{\partial G}{\partial\theta_*}\right)|_{\theta_0,\varphi_0}$, $E = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi_*}\right)|_{\theta_0,\varphi_0}$, $k_\varphi = \left(\frac{\partial G}{\partial\varphi_*}\right)|_{\theta_0,\varphi_0}$. 因此方程(9)的径向解为

$$\Psi_{\mathrm{in}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_*},$$

$$\Psi_{\mathrm{out}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + 2\mathrm{i}(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)r_* - (A+BD+CE)r_*}, \qquad (13)$$

其中

$$\omega_\theta = \Omega_\theta k_\theta, \Omega_\theta = \frac{B}{2}, \omega_\varphi = \Omega_\varphi k_\varphi, \Omega_\varphi = \frac{C}{2}. \qquad (14)$$

在视界面附近有

$$r_* \sim \frac{1}{2\kappa}\ln(r - r_{\mathrm{h}}),$$

方程(13)可写成

$$\Psi_{\mathrm{out}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_*}(r - r_{\mathrm{h}})^{i(\omega - w_\theta - \omega_\varphi)/\kappa}(r - r_{\mathrm{h}})^{-(A+BD+CE)/2\kappa}.$$

Ψ_{out} 在视界面上不解析,可通过复平面解析延拓到 $r<r_{\mathrm{h}}$,

$$r - r_h \to |r - r_{\mathrm{h}}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = (r_{\mathrm{h}} - r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}.$$

因此, $r<r_{\mathrm{h}}$ 的出射波为

$$\tilde{\Psi}_{\mathrm{out}} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + 2\mathrm{i}(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)r_* + \mathrm{i}\pi(A+BD+CE)/2\kappa - (A+BD+CE)r_*}\mathrm{e}^{\pi(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)/\kappa},$$

其中 $r<r_{\mathrm{h}}$, $r_* = r + \frac{1}{2\kappa}\ln(r_h - r)$. 于是得到出射波穿越视界面的相对透射概率为

$$\left|\frac{\Psi_{\mathrm{out}}}{\tilde{\Psi}_{\mathrm{out}}}\right|^2 = \mathrm{e}^{-2\pi(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)/\kappa}.$$

由 Damour-Ruffini 方法可得到出射粒子的能流密度

$$N_\omega = \frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)/\kappa} - 1}, \qquad (15)$$

由于存在局域热平衡,可以定义辐射的局域温度 $T := \frac{\kappa}{2\pi k_{\mathrm{B}}}$, k_{B} 是玻尔兹曼常数,则上述方程成为

$$N_\omega = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)/k_{\mathrm{B}}T - 1}}, \qquad (16)$$

该公式为准黑体辐射谱. 由 $T = \frac{\kappa}{2\pi k_{\mathrm{B}}}$和(10)式可知,温度 T 取决于时间和角度,因而是一个局域量.

3. 黑洞熵

由于视界位置 $r=r_{\mathrm{h}}$ 随时间变化,为了消除视界面运动给计算带来的不方便,引入视界面的如下共动系[21]

$$R = r - r_{\mathrm{h}}(v,\theta), \qquad \mathrm{d}R = \mathrm{d}r - \dot{r}_{\mathrm{h}}\mathrm{d}v - r_{\mathrm{h}}'\mathrm{d}\theta,$$

则线元(5)可写成

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -[1 - (2Mr - Q^2)\rho\bar{\rho} - 2\dot{r}_{\mathrm{h}}]\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}v\mathrm{d}R\\&+ 2r_{\mathrm{h}}'\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta - 2a\sin^2\theta[\dot{r}_{\mathrm{h}} + (2Mr - Q^2)\rho\bar{\rho}]\\&\times \mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi - 2a\sin^2\theta\mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi - 2a\sin^2\theta r_{\mathrm{h}}'\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&+ \frac{1}{\rho\bar{\rho}}\mathrm{d}\theta^2 + [(2Mr - Q^2)a^2\rho\bar{\rho}\ \sin^2\theta\\&+ (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\\&= g_{00}\mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}v\mathrm{d}R + 2g_{02}\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta + 2g_{03}\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi\\&+ 2g_{13}\mathrm{d}R\mathrm{d}\varphi + 2g_{23}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi + g_{22}\mathrm{d}\theta^2 + g_{33}\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned} \qquad (17)$$

由于薄膜模型研究的是视界面外附近一薄层,因而只需要研究场方程在视界面附近的渐近解,渐近解用乌龟坐标表示出来应该具有平直时空中标准波动方程的形式. 因此可设 Klein-Gordon 方程(7)的

解具有如下形式：

$$\Psi = \rho(R,\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega v - k_\varphi \varphi)+\mathrm{i}G(R,\theta)}, \tag{18}$$

其中 ω, k_φ 是实常数，$\rho(R,\theta)$和 $G(R,\theta)$是实函数. 上式代入 Klein-Gordon 方程(7)得到

$$\bar{g}^{11}\bar{k}_R^2 + 2(\Omega_\theta k_\theta + \Omega_\varphi k_\varphi - \omega)\bar{k}_R + (\bar{g}^{00}\omega^2 - 2\bar{g}^{30}\omega k_\varphi + \bar{g}^{22}k_\theta^2 + \bar{g}^{33}k_\varphi^2 + \bar{\mu}^2) = 0, \tag{19}$$

$$\bar{k}_R = \frac{\partial G}{\partial R}, k_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta}, \bar{g}^{12}|_{r_h} \equiv \frac{g^{12}}{g^{10}}|_{r_h} = \Omega_\theta,$$

$$\bar{g}^{13}|_{r_h} \equiv \frac{g^{13}}{g^{10}}|_{r_h} = \Omega_\varphi,$$

$$\bar{g}^{00} \equiv \frac{g^{00}}{g^{10}}, \bar{g}^{30} \equiv \frac{g^{30}}{g^{10}}, \bar{g}^{22} \equiv \frac{g^{22}}{g^{10}},$$

$$\bar{g}^{33} \equiv \frac{g^{33}}{g^{10}}, \bar{\mu}^2 \equiv \frac{\mu^2}{g^{10}}, \bar{g}^{11} \equiv \frac{g^{11}}{g^{10}}.$$

$\bar{g}^{11}=0$ 正是方程(6).

解上述关于 $\bar{k}_R$ 的方程得到

$$\bar{k}_R^{\pm} = \frac{\omega - \Omega_\theta k_\theta - \Omega_\varphi k_\varphi}{\bar{g}^{11}} \pm k_R,$$

$$k_R = \frac{1}{\bar{g}^{11}}\sqrt{\tilde{\omega}^2 - \bar{g}^{11}(\bar{g}^{00}\omega^2 - 2\bar{g}^{30}\omega k_\varphi + \bar{g}^{22}k_\theta^2 + \bar{g}^{33}k_\varphi^2 + \bar{\mu}^2)},$$

$$\tilde{\omega} \equiv \omega - \Omega_\theta k_\theta - \Omega_\varphi k_\varphi.$$

薄膜膜型认为黑洞熵仅仅由视界面附近的薄层内的量子场决定，由量子统计理论和半经典量子化条件可以得到薄层内量子场的自由能(在此只考虑非超辐射模式)

$$F = -\frac{1}{8\pi^3}\int \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \int \mathrm{d}k_\theta \int \mathrm{d}k_\varphi \times \int_{\Omega_\theta k_\theta + \Omega_\varphi k_\varphi}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\beta(\omega - \Omega_\theta k_\theta - \Omega_\varphi k_\varphi)} - 1}\left(\int_\epsilon^{\epsilon+\delta}\bar{k}_R^{+}\mathrm{d}R + \int_{\epsilon+\delta}^{\epsilon}\bar{k}_R^{-}\mathrm{d}R\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi^3}\int \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \int \mathrm{d}k_\theta \int \mathrm{d}k_\varphi \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{e}^{\beta\tilde{\omega}} - 1}\left(\int_\epsilon^{\epsilon+\delta} k_R \mathrm{d}R\right), \tag{20}$$

其中 $\beta = \frac{1}{k_B T}$，ϵ 薄层离开视界面的坐标距离，δ 是薄层的厚度. k_θ, k_φ 的积分范围是使上述积分有意义 k_θ, k_φ 值. 在视界面是 $\bar{g}^{11}=0$，可将 $\bar{g}^{11}$ 作如下分解：

$$\bar{g}^{11} = p(v,r,\theta)(r - r_h) = p(v,r,\theta)R, \tag{21}$$

视界面上的面元

$$\mathrm{d}A = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{vmatrix}_{r_h}^{1/2} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \left.\frac{1}{\sqrt{\bar{g}^{22}\bar{g}^{33}}}\right|_{r_h} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi,$$

R 的积分范围是视界面附近薄层的厚度，因此自由能(20)为

$$F \approx -\int \mathrm{d}A \frac{\pi^2}{90p^2(v,r_h,\theta)\beta^4}\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)} = \int \sigma_F \mathrm{d}A, \tag{22}$$

其中

$$\sigma_F \equiv -\frac{\pi^2}{90p^2(v,r_h,\theta)\beta^4}\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)}.$$

上述积分中 A 的积分范围为视界面，σ_F 可被看成薄层内量子场贡献的自由能在视界面附近沿视界面的面密度. 整体热平衡情况下熵与自由能的关系 $S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial \beta}$ 在局域热平衡情况由 $\sigma_s = \beta^2\frac{\partial \sigma_F}{\partial \beta}$ 所代替[20]. 因此薄层内量子热气体贡献的熵在视界面附近沿视界面的面密度

$$\sigma_s = \frac{2\pi^2}{45\beta^3 p^2(v,r_h,\theta)}\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)}. \tag{23}$$

由方程(21)和(10)得到

$$p(v,r_h,\theta) = \lim_{r\to r_h}\frac{\partial \bar{g}^{11}}{\partial r} = 2\kappa, \tag{24}$$

于是方程(23)成为

$$\sigma_s = \frac{1}{360\beta}\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)}. \tag{25}$$

选择合适的截断 ϵ 和 δ 使其满足

$$\frac{\delta}{\epsilon(\epsilon+\delta)} = 90\beta, \tag{26}$$

得到

$$\sigma_s = \frac{1}{4}.$$

视界面附近薄层内量子场所贡献的总熵为

$$S = \int \sigma_s \mathrm{d}A = \frac{1}{4}A_h, \tag{27}$$

根据前面阐述的薄膜模型的基本思想可知该熵正是黑洞熵，其正比于视界面面积，即黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵. 注意，截断关系(26)与静态球对称截断关系(3)的相同，这说明动态和静态黑洞的熵具有某种共同的规律.

本文的结果表明，缓变动态黑洞温度是局域量；辐射谱是准黑体谱；当取与静态球对称黑洞相同的

截断关系时，缓变动态黑洞的熵同样为黑洞视界面面积的四分之一.

---

[1] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[2] Li X and Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **62** 104001

[3] Liu W B and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 345

[4] He H and Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2661(in Chinese)[贺晗、赵　峥 2002 物理学报 **51** 2661]

[5] Song T P and Hou C X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1398(in Chinese)[宋太平、侯晨霞 2002 物理学报 **51** 1398]

[6] Song T P, Hou C X and Huang J S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1901(in Chinese)[宋太平、侯晨霞、黄金书 2002 物理学报 **51** 1901]

[7] Zhang J Y and Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2399(in Chinese)[张靖仪、赵　峥 2002 物理学报 **51** 2399]

[8] Zhang J Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2354(in Chinese)[张靖仪 2003 物理学报 **52** 2354]

[9] Li C A, Wei X Q, Meng Q M, Liu J L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2173 (in Chinese)[李传安、魏显起、孟庆苗、刘景伦 2002 物理学报 **51** 2173]

[10] Meng Q M, Su J Q, Li C A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1822(in Chinese)[孟庆苗、苏九清、李传安 2003 物理学报 **52** 1822]

[11] Gao C J and Shen Y G 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1167

[12] Zhao Z, Luo Z Q and Dai X X 1994 *IL Nuovo Cimento* **109** B 483

[13] Zhang J Y and Zhao Z 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 2096(in Chinese)[张靖仪、赵　峥 2003 物理学报 **52** 2096]

[14] Song T P and Yao G Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1144(in Chinese)[宋太平、姚国政 2002 物理学报 **51** 1144]

[15] Zhao Z and Dai X X 1991 *Chin. Phys. Lett.* **8** 548

[16] Zhao Z, Zhang J H and Zhu J Y 1995 *Inter. J. Theor. Phys.* **34** 2039

[17] Sun M C, Zhao R and Zhao Z 1995 *IL Nuovo Cimento* **110** B 829

[18] Damour T and Ruffini R 1976 *Phys. Rev.* D **14** 332

[19] Jing J L and Wang Y J 1996 *Inter. Theor. Phys.* **35** 1481

[20] Kreuzer H J 1981 *Nonequilibrium Thermodynamics and its Statistical Foundations* (Oxford: Clarendon Press)

[21] Li Z H and Zhao Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1273(in Chinese)[黎忠恒、赵　峥 1997 物理学报 **46** 1273]

Quantum thermodynamical properties of the slowly changing nonstationary Kerr-Newman black hole

Wang Gang-Zhu Wang Ji-Long

(*Department of Applied Physics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan* 030024, *China*)

(Received 18 July 2003; revised manuscript received 13 October 2003)

Abstract

Introducing the notion of the local thermal equilibrium, the Hawking effect and the entropy of a nonstationary Kerr-Newman black hole whose metric changes slowly are studied by the method of Damour-Ruffini and the thin film model. First, we obtain the Hawking radiation temperature and the thermal spectrum formula, and show that the Hawking temperature depends on the time and the location on the event horizon, the thermal spectrum is a quasi-black-body's thermal spectrum. Second, we calculate the black hole entropy, which is just the Bekenstein-Hawking entropy with the same geometrical cutoff relationship as in the static and spherical case. The results show that the temperature of the black hole is a local quantity, and the entropy of the non-stationary black hole is also proportional to the horizon area as in the case of stationary black holes.

Keywords: slowly changing nonstationary black hole, Hawking radiation, black hole entropy

PACC: 0470, 9760L