第 53 卷 第 6 期 2004 年 6 月
1000-3290/2004/53(06)/1900-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.6, June, 2004
©2004 Chin. Phys. Soc.

电流变液系统流动的渐近估计*

欧阳成
(湖州师范学院理学院,湖州 313000)

(2003 年 8 月 12 日收到)

根据电流变液中球形颗粒的运动模型,研究了颗粒质量很小时,电流变液中颗粒运动的渐近状态,利用微分不等式理论,给出了相应运动的渐近估计.

关键词:电流变液,微分不等式理论,渐近估计
PACC:4760,6620,6210

1. 引 言

颗粒流动结构的动态、不均态性和随机性是当今流动定量分析与预测的难点[1].物质的流动问题在工业中有着特别重要的应用.电流变液(electrorheological fluid,ER 流体)是一种智能材料,通常由高介电常数的颗粒分散在低介电常数的绝缘油中构成,它的力学性能在外电场的作用下可以调控,因而引起科技界的广泛重视[2].电流变液的流动实质是一种电场调控的颗粒流.深入研究这种在外加电场作用下对颗粒流动的调控,有可能揭示出自然流动的本质,并开辟对颗粒物质流动控制的新途径.

文献[3]研究了在平板电导模型下的电流变液系统的流动问题,假设电流变液为一均匀分散的悬浮体,分散颗粒为球形,在电场及剪切流场作用下,得到了球形颗粒在泊肃叶流动的剪切应力作用下的运动方程.本文研究当球形颗粒的质量 ε 很小时的运动情况,利用奇摄动理论[4],给出了运动方程解的渐近估计,这种方法曾被作者成功地运用过.

记 R_i 表示第 i 个颗粒在时刻 t 时的位置,m 是颗粒的质量,则文献[3]曾得到运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2 R_i}{\mathrm{d}t^2} = F_i^{\mathrm{el}} - 3\pi\delta\eta\left(\frac{\mathrm{d}R_i}{\mathrm{d}t} - \dot{\gamma} z_i e_x\right) + P_i,$$

$$i = 1,2,\cdots,n,$$

其中右端第一项 F_i^{el} 为作用在第 i 个颗粒上的静电力,第二项为 Stokes 黏滞剪切力,第三项 P_i 是布朗力.其他量的意义可参见文献[3].

我们将该问题数学化,并记 $\varepsilon(0<\varepsilon\ll 1)$ 为颗粒的质量,则可得到方程组

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 R_1}{\mathrm{d}t^2} = -a_0\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}t} + f_1(t, R_1, \cdots, R_n, \varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 R_2}{\mathrm{d}t^2} = -a_0\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t} + f_2(t, R_1, \cdots, R_n, \varepsilon),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 R_n}{\mathrm{d}t^2} = -a_0\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}t} + f_n(t, R_1, \cdots, R_n, \varepsilon),$$

并可进一步简记为

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = A\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{B},$$

$$t\in[a,b],\ \boldsymbol{R}(a) = \boldsymbol{\eta}_1,\ \boldsymbol{R}(b) = \boldsymbol{\eta}_2 \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \\ R_n \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_0 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \end{bmatrix},$$

* 浙江省自然科学基金(批准号:102009)资助的课题.

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} f_1(t,R_1,\cdots,R_n,\varepsilon)\\ f_2(t,R_1,\cdots,R_n,\varepsilon)\\ \cdots\\ f_n(t,R_1,\cdots,R_n,\varepsilon)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix} R_{11}\\ R_{21}\\ \\ R_{n1}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix} R_{12}\\ R_{22}\\ \\ R_{n2}\end{bmatrix},\text{且 } a_0>0.$$

我们假设

$[H_1]$ 退化问题

$$A\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0},$$

$$t\in[a,b],\boldsymbol{R}(b)=\boldsymbol{\eta}_2,$$

具有解 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_0(t)\in C^{(2)}[a,b]$,其中 $\boldsymbol{B}_0$ 是 $\boldsymbol{B}$ 中 $\varepsilon=0$ 时的值.

$[H_2]$ $\boldsymbol{B}$ 关于 $\boldsymbol{R}$ 各分量的偏导数连续.则可有如下结果:

定理 在上述假设下,必存在某一正数 ε_0,使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时,问题(1)具有解 $\boldsymbol{R}(t,\varepsilon)$,它满足

$$\|\boldsymbol{R}(t,\varepsilon)-\boldsymbol{R}_0(t)\|$$
$$\leqslant\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|\exp(k_1\varepsilon^{-1}(a-t))+M\varepsilon,$$

其中 M 是某一正常数,$0<k_1<k\equiv a_0$.

2. 定理的证明

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}(t,\varepsilon)-\boldsymbol{R}_0(t)$,于是问题(1)可转化为

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t^2}=A\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{C}\equiv\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}',\varepsilon),$$

$$\boldsymbol{S}(a)=\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{S}(b)=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}+A\boldsymbol{R}_0-\varepsilon\boldsymbol{R}_0''$,$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)$.

我们定义区域

$$D(\boldsymbol{R}_0)=\{(t,\boldsymbol{R}):a\leqslant t\leqslant b,\|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0\|\leqslant d(t)\},$$

其中 d 为一光滑函数,对于某一小的正数 δ 满足

$$d(t)=\begin{cases}\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|+\delta, & a\leqslant t\leqslant a+\dfrac{\delta}{2},\\ \delta, & a+\delta\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

再设正常数 l 满足

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{S}}(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{0},0)\right\|\leqslant l,$$

$$(t,\boldsymbol{\eta})\in[a,b]\times\{\boldsymbol{\eta}:\|\boldsymbol{\eta}\|\leqslant d(t)\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 为矩阵的范数.

对 $t\in[a,b]$ 和 $0<\varepsilon\leqslant\dfrac{k^2}{4l}$,我们定义函数

$$\rho(t,\boldsymbol{S})=\|S\|-\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|\exp(\lambda_1(t-a))$$
$$-\varepsilon\gamma l^{-1}[\exp\lambda_2(t-b)-1],$$

其中 $\lambda_1\sim-k\varepsilon^{-1}$,$\lambda_2\sim-lk^{-1}$ 都是 $\varepsilon\lambda^2+k\lambda+l=0$ 的根;γ 为待定的正常数.

由微分不等式理论,下面只要证明:当 $r=\|\boldsymbol{S}\|$ 和 $r'=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}'/\|\boldsymbol{S}\|$ 时,有

$$(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}',\varepsilon)-\varepsilon r''\geqslant0,$$

其中

$$r(t,\varepsilon)=\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|\exp(\lambda_1(t-a))$$
$$+\varepsilon\gamma l^{-1}[\exp(\lambda_2(t-b))-1].$$

由中值定理,得到

$$(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)\boldsymbol{F}-\varepsilon r''$$
$$=(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)\Big[\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},0)+A\boldsymbol{S}'$$
$$+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{S}}(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{0},0)\boldsymbol{S}-\varepsilon\boldsymbol{R}_0''(t)\Big]-\varepsilon r''$$
$$\geqslant(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)A\boldsymbol{S}'+(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)$$
$$\times\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{S}}(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{0},0)\boldsymbol{S}-\varepsilon L-\varepsilon r'',$$

这是因为 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},0)=\boldsymbol{0}$,这里$(t,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{0},0)$是一适当的中间点,$L=\max\limits_{[a,b]}\|\boldsymbol{R}_0''(t)\|$.

又因为当 ε 充分小时,点$(t,\boldsymbol{S}+\boldsymbol{R}_0(t))\in D(\boldsymbol{R}_0)$,所以上述不等式可继续化为

$$(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)\boldsymbol{F}-\varepsilon r''$$
$$\geqslant-k\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}'/\|\boldsymbol{S}\|-l\|\boldsymbol{S}\|-\varepsilon L-\varepsilon r''$$
$$=-kr'-lr-\varepsilon L-\varepsilon r''$$
$$=-k\lambda_1\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|\exp(\lambda_1(t-a))$$
$$-k\lambda_2\varepsilon\gamma l^{-1}\exp(\lambda_2(t-b))$$
$$-l\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|\exp(\lambda_1(t-a))$$
$$-l\varepsilon\gamma l^{-1}\exp(\lambda_2(t-b))+\varepsilon\gamma-\varepsilon L$$
$$-\varepsilon\lambda_1^2\|\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{R}_0(a)\|\exp(\lambda_1(t-a))$$
$$-\varepsilon\lambda_2^2\varepsilon\gamma l^{-1}\exp(\lambda_2(t-b)).$$

因为 $\varepsilon\lambda_i^2+k\lambda_i+l=0(i=1,2)$,且选定 $\gamma=L$,则有

$$(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}/\|\boldsymbol{S}\|)\boldsymbol{F}-\varepsilon r''\geqslant0.$$

从而问题(1)具有解 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(t,\varepsilon)\in C^{(2)}[a,b]$,使得 $\rho(t,\boldsymbol{S}(s,\varepsilon))\leqslant0$.亦即对于 $0<k_1<k$ 和 $M>Ll^{-1}[\exp(\lambda_2(a-b))-1]$,在$[a,b]$中有

$$\|\boldsymbol{S}(t,\varepsilon)\|=\|\boldsymbol{R}(t,\varepsilon)-\boldsymbol{R}_0(t)\|$$

$$\leqslant \|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{R}_0(a)\| \exp[k_1 \varepsilon^{-1}(a - t)] + M\varepsilon .$$

3. 结 论

文献[3]曾用两块平行的透明玻璃电极构成了观察电流变液泊肃叶流动的电流变阀.每块玻璃透明电极的内表面涂有一层很薄的导电膜作为电流变阀的电极.由于电极是透明的,因此可以观察到流体的流动过程.实验中,以一定的流速将电流变液注入电流变阀,给两个极板加电场,CCD 摄像头拍摄到电流变液在电场作用下的结构演变过程.录像机(VCR)将这一过程记录到磁带上.再通过计算机附带的视频卡,将录像机磁带上的图像转换为视频文件.文献[3]曾指出,当电场达到某一阈值时,颗粒之间的相互作用增强,且在压力梯度作用下颗粒链柱发生弯曲,链柱中间弯曲程度较小,极板处链柱倾斜较大.那么怎样较精确地估计颗粒运动的程度呢?

若通过观察记下时刻 $t = a$ 时一组颗粒的位置 $\boldsymbol{\eta}_1$,时刻 $t = b$ 时该组颗粒的位置 $\boldsymbol{\eta}_2$,则用本文的上述结果,就可以很好地估计出颗粒运动程度的大小,从而得出相应运动的理论数值.

[1] Ge W and Li J H 2001 *Chinese Science Bulletin*. **46** 802

[2] Block H and Kelly J P 1988 *J. Phys. D: Appl. Phys*. **21** 1661

[3] Zhao X P, Gao X M, Gao X Y and Gao D J 2003 *Acta Phys. Sin*. **52** 405 (in Chinese) [赵晓鹏、高秀敏、高向阳、郜丹军 2003 物理学报 **52** 405]

[4] Chang K W and Hower F A 1984 *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Application* (New York: Springer-Verlag) (中译本) [章国华、侯斯 F A 著,林宗池、倪守平、郑钦贵译,非线性奇异摄动现象 理论和应用,第 144 页]

Asymptotic estimation for the system of electro-rheological fluids*

Ouyang Cheng

(*Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

(Received 12 August 2003)

Abstract

By the movement model of ball particles in electro-rheological(ER) fluids, the asymptotic behavior of the movement of the particles in ER fluids is considered when the mass of the particles is small. Using the theory of differential inequalities, the expression of asymptotic estimation is given and proved.

Keywords: ER fluids, theory of differential inequalities, asymptotic estimation

PACC: 4760, 6620, 6210

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejing Province, China (Grant No. 102009).