第 53 卷 第 7 期 2004 年 7 月
1000-3290/2004/53(07)/2056-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.7, July, 2004

Manakov 型非线性 Schrödinger 方程的 Jacobi 椭圆函数包络解*

沈守枫[1)] 潘祖梁[1)] 张 隽[2)] 叶彩儿[3)]

[1)](浙江大学数学系,杭州 310027)

[2)](北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

[3)](浙江林学院基础部,临安 311300)

(2003 年 10 月 28 日收到;2003 年 12 月 9 日收到修改稿)

简化了扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法,亦即对修正的 Jacobi 椭圆函数展开法进行了扩展.把这种方法应用于 Manakov 型非线性 Schrödinger 方程,得到了 Jacobi 椭圆函数包络解.在一定条件下,这些解退化成相应的包络冲击波解和包络孤立波解.

关键词:Jacobi 椭圆函数展开法, Manakov 型非线性 Schrödinger 方程

PACC:0340K, 0290

1. 引 言

寻找非线性发展方程的精确解在非线性科学中占据越来越重要的地位.随着数学计算软件(MATHEMATICA, Matlab)的完善,人们提出了各种机械化的方法,比如:齐次平衡法[1,2]、扩展的 Tanh 函数展开法[3]、Jacobi 椭圆函数展开法[4—8]、截断的 Painleve 展开法[9,10]等等.本文先对扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法[11,12]进行了简化,亦即对文献[13]提出的修正的 Jacobi 椭圆函数展开法(包括 Jacobi 椭圆函数展开法[4—8])进行了扩展.然后,应用修正的 Jacobi 椭圆函数展开法求解如下的 Manakov 型非线性 Schrödinger 方程[14]:

$$\mathrm{i}u_x + u_{tt} + 2d(|u|^2 + |v|^2)u = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{i}v_x + v_{tt} + 2d(|u|^2 + |v|^2)v = 0, \tag{2}$$

其中 u,v 为两个包络脉冲函数,x 为沿传输方向的归一化距离,t 为归一化时间,d 为正的参数,这样得到了上述方程的 Jacobi 椭圆函数包络解和相应的包络冲击波解和包络孤立波解.

2. 修正的 Jacobi 椭圆函数展开法

首先,简单回顾修正的 Jacobi 椭圆函数展开法[13]:对非线性发展方程 $P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, \cdots) = 0$ 做行波约化,$u(\xi) = u(kx + ct)$,得到一个多项式形式的非线性常微分方程(对某些方程需先作特殊的变换[15,16]),$P(u, u', u'', uu', \cdots) = 0$.设行波约化后的非线性常微分方程有如下形式的 Jacobi 椭圆函数解:

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sn}^{j-1}(\xi \mid m)[a_j \mathrm{sn}(\xi \mid m) + b_j \mathrm{cn}(\xi \mid m)], \tag{3}$$

其中 n 可以由平衡线性最高阶导数项和非线性项的阶数得到.把(3)式的解代入约化后的方程,利用 Jacobi 椭圆函数之间的平方和导数关系[13],合并同幂次项并取系数为零,得到一个关于 a_0,a_j,b_j($j = 1,2,\cdots,n$)和 k,c 的超定代数方程组.然后利用数学计算软件(MATHEMATICA, Matlab)求解此方程组,最后给出方程的 Jacobi 椭圆函数解.当模 $m \to 1$ 时,退化成相应的孤立子解、三角函数解或奇异的行波解.

再利用变换 $\mathrm{sn}(\xi \mid m) \to \frac{\mathrm{ns}(\xi \mid m)}{m}$,$\mathrm{cn}(\xi \mid m) \to \frac{\mathrm{ids}(\xi \mid m)}{m}$,可以得到如下形式的 Jacobi 椭圆函数解:

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{ns}^{j-1}(\xi \mid m)}{m^j}[a_j \mathrm{ns}(\xi \mid m)$$

* 浙江省自然科学基金(批准号:102037)、浙江省教育厅基金(批准号:2411008010)和浙江林学院科研发展基金(批准号:2351000161)资助的课题.

$$+ \mathrm{i} b_j \mathrm{ds}(\xi \mid m)] . \tag{4}$$

而利用恒等变换 $m^{-1}\mathrm{sn}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{sn}(\xi \mid m)$，$\mathrm{dn}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{cn}(\xi \mid m)$，又可以得到另一组精确解

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{sn}(m\xi \mid m^{-1})}{m} \right)^{j-1} \times \left[\frac{a_j}{m} \mathrm{sn}(m\xi \mid m^{-1}) + b_j \mathrm{dn}(m\xi \mid m^{-1}) \right] . \tag{5}$$

为了统一模 $m \in (0,1)$，定义 $F^*(m, \cdot) = F\left(\frac{1}{m} \cdot\right)$，则(5)式可以改写成

$$u^*(\xi) = a_0^* + \sum_{j=1}^{n} \left(m\,\mathrm{sn}\left(\frac{1}{m}\xi^* \mid m\right)\right)^{j-1} \times \left[m a_j^* \mathrm{sn}\left(\frac{1}{m}\xi^* \mid m\right) + b_j^* \mathrm{dn}\left(\frac{1}{m}\xi^* \mid m\right) \right] . \tag{6}$$

再由变换 $\mathrm{sn}(\xi \mid m) \to \frac{\mathrm{ns}(\xi \mid m)}{m}$，$\mathrm{dn}(\xi \mid m) \to \mathrm{i}\ \mathrm{cs}(\xi \mid m)$，可以得到如下形式的解：

$$u^*(\xi) = a_0^* + \sum_{j=1}^{n} \left(\mathrm{ns}\left(\frac{1}{m}\xi^* \mid m\right)\right)^{j-1} \times \left[a_j^* \mathrm{ns}\left(\frac{1}{m}\xi^* \mid m\right) + \mathrm{i} b_j^* \mathrm{cs}\left(\frac{1}{m}\xi^* \mid m\right) \right] . \tag{7}$$

3. 一些评论和方法的改进

评论 1 修正的 Jacobi 椭圆函数展开法是一种直接的机械化的方法，其有效性表现在求解耦合方程组或不能直接积分的高阶方程上.

评论 2 修正的 Jacobi 椭圆函数展开法中的解的假设式子可以是其他形式，例如

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} \{ a_j \mathrm{sn}^j(\xi \mid m) + b_j \mathrm{sn}^{-j}(\xi \mid m) \} . \tag{8}$$

而且我们给出的变换仍然有效.

评论 3 利用上述变换和一些变形式子，例如

$$m^{-1}\mathrm{sd}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{sc}(\xi \mid m),$$
$$\mathrm{nd}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{nc}(\xi \mid m),$$
$$\mathrm{cd}(m\xi \mid m^{-1}) = \mathrm{dc}(\xi \mid m),$$

可以简化扩展的 Jacobi 椭圆函数展开法[11,12].

评论 4 各种 Jacobi 椭圆函数展开法得到的解均为多项式形式的解，如何获得分数形式的 Jacobi 椭圆函数解有待进一步研究[17].

4. Manakov 型非线性 Schrödinger 方程

对方程(1)，(2)做约化：

$$u = \varphi(kx + ct)\exp[\mathrm{i}(k_1 x + c_1 t)],$$
$$v = \phi(kx + ct)\exp[\mathrm{i}(k_2 x + c_2 t)], \tag{9}$$

其中要求 φ, ϕ 为实函数. 从而有

$$(-c_1{}^2 - k_1 + 2d\varphi^2 + 2d\phi^2)\varphi + \mathrm{i}(2cc_1 + k)\varphi' + c^2\varphi'' = 0, \tag{10}$$

$$(-c_2{}^2 - k_2 + 2d\varphi^2 + 2d\phi^2)\phi + \mathrm{i}(2cc_2 + k)\phi' + c^2\phi'' = 0, \tag{11}$$

则令 $c_1 = c_2 = -\frac{k}{2c}$，上面的方程组改写成为

$$\left(-\frac{k^2}{4c^2} - k_1 + 2d\varphi^2 + 2d\phi^2\right)\varphi + c^2\varphi'' = 0, \tag{12}$$

$$\left(-\frac{k^2}{4c^2} - k_2 + 2d\varphi^2 + 2d\phi^2\right)\phi + c^2\phi'' = 0. \tag{13}$$

利用齐次平衡法，可以设方程(12)，(13)有如下形式的解：

$$\varphi = a_0 + a_1\mathrm{sn}(\xi \mid m) + a_2\mathrm{cn}(\xi \mid m), \tag{14}$$

$$\phi = b_0 + b_1\mathrm{sn}(\xi \mid m) + b_2\mathrm{cn}(\xi \mid m). \tag{15}$$

把(14)和(15)式代入(12)和(13)式，利用 Jacobi 椭圆函数的导数和平方关系，合并同幂次项，再令系数为零，得到如下的超定代数方程组：

$$2a_0^3 d + 6a_0 a_2^2 d + 2a_0 b_0^2 d + 4a_2 b_0 b_2 d + 2a_0 b_2{}^2 d - \frac{a_0 k^2}{4c^2} - a_0 k_1 = 0, \tag{16}$$

$$-a_2 c^2 + 6a_0^2 a_2 d + 2a_2^3 d + 2a_2 b_0^2 d + 4a_0 b_0 b_2 d + 2a_2 b_2{}^2 d - \frac{a_2 k^2}{4c^2} - a_2 k_1 = 0, \tag{17}$$

$$-a_1 c^2 + 6a_0{}^2 a_1 d + 6a_1 a_2{}^2 d + 2a_1 b_0{}^2 d + 4a_0 b_0 b_1 d + 4a_2 b_1 b_2 d + 2a_1 b_2{}^2 d - \frac{a_1 k^2}{4c^2} - a_1 k_1 - a_1 c^2 m^2 = 0, \tag{18}$$

$$12a_0 a_1 a_2 d + 4a_2 b_0 b_1 d + 4a_1 b_0 b_2 d + 4a_0 b_1 b_2 d = 0, \tag{19}$$

$$6a_0 a_1{}^2 d - 6a_0 a_2{}^2 d + 4a_1 b_0 b_1 d + 2a_0 b_1{}^2 d - 4a_2 b_0 b_2 d - 2a_0 b_2{}^2 d = 0, \tag{20}$$

$$6a_1{}^2 a_2 d - 2a_2{}^3 d + 2a_2 b_1{}^2 d + 4a_1 b_1 b_2 d - 2a_2 b_2{}^2 d + 2a_2 c^2 m^2 = 0, \tag{21}$$

$$2a_1^3 d - 6a_1 a_2^2 d + 2a_1 b_1^2 d - 4a_2 b_1 b_2 d - 2a_1 b_2^2 d + 2a_1 c^2 m^2 = 0, \tag{22}$$

$$2a_0^2 b_0 d + 2a_2^2 b_0 d + 2b_0^3 d + 4a_0 a_2 b_2 d + 6b_0 b_2^2 d - \frac{b_0 k^2}{4c^2} - b_0 k_2 = 0, \tag{23}$$

$$-b_2 c^2 + 4a_0 a_2 b_0 d + 2a_0^2 b_2 d + 2a_2^2 b_2 d + 6b_0^2 b_2 d + 2b_2^3 d - \frac{b_2 k^2}{4c^2} - b_2 k_2 = 0, \tag{24}$$

$$-b_1 c^2 + 4a_0 a_1 b_0 d + 2a_0^2 b_1 d + 2a_2^2 b_1 d + 6b_0^2 b_1 d + 4a_1 a_2 b_2 d + 6b_1 b_2^2 d - \frac{b_1 k^2}{4c^2} - b_1 k_2 - b_1 c^2 m^2 = 0, \tag{25}$$

$$4a_1 a_2 b_0 d + 4a_0 a_2 b_1 d + 4a_0 a_1 b_2 d + 12 b_0 b_1 b_2 d = 0, \tag{26}$$

$$2a_1^2 b_0 d - 2a_2^2 b_0 d + 4a_0 a_1 b_1 d + 6b_0 b_1^2 d - 4a_0 a_2 b_2 d - 6b_0 b_2^2 d = 0, \tag{27}$$

$$4a_1 a_2 b_1 d + 2a_1^2 b_2 d - 2a_2^2 b_2 d + 6b_1^2 b_2 d - 2b_2^3 d + 2b_2 c^2 m^2 = 0, \tag{28}$$

$$2a_1^2 b_1 d - 2a_2^2 b_1 d + 2b_1^3 d - 4a_1 a_2 b_2 d - 6b_1 b_2^2 d + 2b_1 c^2 m^2 = 0. \tag{29}$$

利用 MATHEMATICA 程序求解得到

情形 1

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{4}\left(-4c^2(1+m^2) - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$a_1^2 + b_1^2 = -\frac{c^2 m^2}{d},$$
$$a_0 = b_0 = a_2 = b_2 = 0. \tag{30}$$

情形 2

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{4}\left(-4c^2(1-2m^2) - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$a_2^2 + b_2^2 = \frac{c^2 m^2}{d},$$
$$a_0 = b_0 = a_1 = b_1 = 0. \tag{31}$$

情形 3

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{4}\left(-2c^2(2-m^2) - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$a_2^2 + b_2^2 = \frac{c^2 m^2}{4d},$$
$$a_0 = b_0 = 0,$$
$$a_1 = \pm \mathrm{i} a_2,$$
$$b_1 = \pm \mathrm{i} b_2. \tag{32}$$

情形 4

$$k_1 = \frac{1}{4}\left(-4c^2 + 4a_1^2 d + 4b_2^2 d - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$k_2 = \frac{1}{4}\left(-4c^2 + 8b_2^2 d - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$b_2^2 - a_1^2 = \frac{c^2 m^2}{d},$$
$$a_0 = b_0 = b_1 = a_2 = 0. \tag{33}$$

情形 5

$$k_1 = \frac{1}{4}\left(-4c^2 + 8a_2^2 d - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$k_2 = \frac{1}{4}\left(-4c^2 + 4a_2^2 d + 4b_1^2 d - \frac{k^2}{c^2}\right),$$
$$a_2^2 - b_1^2 = \frac{c^2 m^2}{d},$$
$$a_0 = b_0 = a_1 = b_2 = 0. \tag{34}$$

考虑到 φ,ϕ 为实函数,而且 d 是正的参数,所以情形 1 和情形 3 略去,亦即我们给出了三类 Manakov 型非线性 Schrödinger 方程的 Jacobi 椭圆函数包络解:

$$\begin{cases} u_1 = a_2 \mathrm{cn}(kx + ct \mid m)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\left(-4c^2(1-2m^2) - \frac{k^2}{c^2}\right)x - \frac{k}{2c}t\right)\right], \\ v_1 = \pm\sqrt{\frac{c^2 m^2}{d} - a_2^2}\,\mathrm{cn}(kx + ct \mid m)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\left(-4c^2(1-2m^2) - \frac{k^2}{c^2}\right)x - \frac{k}{2c}t\right)\right]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = a_1 \mathrm{sn}(kx + ct \mid m)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\left(-4c^2 + 8a_1^2 d + 4c^2 m^2 - \frac{k^2}{c^2}\right)x - \frac{k}{2c}t\right)\right], \\ v_2 = \pm\sqrt{\frac{c^2 m^2}{d} + a_1^2}\,\mathrm{cn}(kx + ct \mid m)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\left(-4c^2 + 8a_1^2 d + 8c^2 m^2 - \frac{k^2}{c^2}\right)x - \frac{k}{2c}t\right)\right]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = \pm\sqrt{\frac{c^2 m^2}{d} + b_1^2}\,\mathrm{cn}(kx + ct \mid m)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\left(-4c^2 + 8b_1^2 d + 8c^2 m^2 - \frac{k^2}{c^2}\right)x - \frac{k}{2c}t\right)\right], \\ v_3 = b_1 \mathrm{sn}(kx + ct \mid m)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}\left(-4c^2 + 8b_1^2 d + 4c^2 m^2 - \frac{k^2}{c^2}\right)x - \frac{k}{2c}t\right)\right]. \end{cases}$$

当模 m 趋于 1 时,上述解退化成相应的孤立波包络解和冲击波包络解.利用本文给出的变换还能得到其他类型的 Jacobi 椭圆函数包络解和相应的退化解.限于篇幅,这里从略.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Wang M L 1996 *Phys*. *Lett*. A **213** 297

[3] Fan E G 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 212

[4] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068(in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2001 物理学报 **50** 2068]

[5] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10 (in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 10]

[6] Liu S D, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718(in Chinese)[刘式达、傅遵涛、刘式适、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]

[7] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923(in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 1923]

[8] Zhang S Q and Li Z B 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1066(in Chinese)[张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

[9] Gao Y T and Tian B 2001 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. C **12** 1251

[10] Gao Y T and Tian B 2001 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. C **12** 1357

[11] Yan Z Y 2003 *Chaos*, *Solitons and Fractals* **18** 299

[12] Yan Z Y 2003 *Comput*. *Phys*. *Commun*. **153** 145

[13] Shen S F and Pan Z L 2003 *Phys*. *Lett*. A **308** 143

[14] Radhakrishnan R, Lakshmanan M and Hietarinta J 1997 *Phys*. *Rev*. E **56** 2213

[15] Fan E G and Zhang J 2002 *Phys*. *Lett*. A **305** 383

[16] Guo G P and Zhang J F 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2660(in Chinese)[郭冠平、张解放 2003 物理学报 **52** 2660]

[17] Lou S Y and Ni G J 1989 *J*. *Math*. *Phys*. **30** 1614

The envelope solutions to the coupled nonlinear Schrödinger equation of Manakov type with Jacobi elliptic functions*

Shen Shou-Feng[1)]　Pan Zu-Liang[1)]　Zhang Jun[2)]　Ye Cai-Er[3)]

[1)] (*Department of Mathematics*, *Zhejiang University*, *Hangzhou*　310027, *China*)

[2)] (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*, *Beijing*　100088, *China*)

[3)] (*Department of Basic Science*, *Zhejiang Forestry College*, *Lin'an*　311300, *China*)

(Received 28 October 2003; revised manuscript received 9 December 2003)

Abstract

We have simplified the extended Jacobi elliptic function expansion method, namely, improved the modified Jacobi elliptic function expansion method. We applied this method to solve the coupled nonlinear Schrödinger equation of Manakov type and obtained some Jacobi elliptic envelope solutions and corresponding solitary wave solution, shock wave solution.

Keywords: Jacobi elliptic function expansion method, coupled nonlinear Schrödinger equation of Manakov type

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 102037), the Foundation from the Education Bureau of Zhejiang Province, China (Grant No. 2411008010), and the Research Foundation of Zhejiang Forestry College, China (Grant No. 2351000161).