第 53 卷 第 7 期 2004 年 7 月
1000-3290/2004/53(07)/2065-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.7, July, 2004

Anti-de Sitter 时空中黑洞量子熵的发散结构*

米丽琴†

(湛江师范学院物理系,湛江 524048)

(2003 年 8 月 29 日收到;2003 年 11 月 18 日收到修改稿)

用' brick-wall '模型研究了 Anti-de Sitter 时空中起源于电磁和引力场的黑洞量子熵的发散结构,结果表明量子熵由线性发散项和对数发散项构成. 如果平衡温度选为 Hawking 温度,固有截断替代坐标截断,则线性发散项可化为正比于事件视界面积的形式;而对数发散项不仅依赖于黑洞的特征,也依赖于场的自旋,由于此项的存在,自旋场的贡献不再与标量场的贡献成正比.

关键词: 发散结构,黑洞熵,AdS 时空,电磁和引力场

PACC: 0470D,9760L

1. 引 言

自从 't Hooft[1] 提出 brick-wall 模型以来,近 20 年一直在研究黑洞量子熵的发散结构. 也许为了简单,绝大多数工作只考虑量子熵的主导项,这些工作的主要结论是:除了粒子自旋引起的简并度,以及玻色、费米粒子服从不同统计导致的不同系数外,所有量子场对黑洞熵的贡献形式与标量场的贡献形式相同[2—8]. 最近各种理论(如共形场理论)表明[9],黑洞熵存在对数修正项.特别是文献[10—13]发现量子场对黑洞熵的对数项贡献不仅依赖于时空的几何性质,也依赖于场的自旋,自然与标量场的形式不同. 这些结论是重要的,因为它表明了弯曲时空中热力学存在不同于平直时空的自旋效应.

本文研究电磁($s=1$)和引力($s=2$)场对 Anti-de Sitter (AdS)时空中 Schwarzschild 黑洞熵贡献的发散结构. 这个考虑基于两个原因:(1) AdS 时空是含负宇宙常数($\Lambda<0$)爱因斯坦真空场方程的最大对称解,对它的研究无论是对黑洞物理还是对量子引力都极其重要. 例如,理论上引力全息原理有一个很好的具体实现,就是所谓的 AdS/CFT 对应.另一方面,与 dS 时空不同,AdS 时空中黑洞可以处在 Hawking 温度的稳定平衡辐射热浴里,因此可以用平衡统计热力学方法研究黑洞的量子熵.(2)虽然文献[14,15]研究了标量场对 AdS 时空中黑洞熵的量子修正,但是将这个研究推广到电磁、引力这样的高自旋场并进一步研究自旋与量子熵的关系是一个非常有趣的课题.

2. 背景时空与自旋场

对于 AdS 时空中 Schwarzschild 黑洞背景时空的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = B\mathrm{d}t^2 - B^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{1}$$

其中

$$B = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{2}$$

M 为黑洞的质量.黑洞的事件视界由

$$1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} = 0 \tag{3}$$

确定.容易证明,对于 $\Lambda<0$ 的情况,方程(3)有一个实根 r_{H} 和一对共轭复根 $r_{\pm}$,实根 r_{H} 为黑洞的事件视界.利用维耶特公式,有

$$r_{+} + r_{-} = -r_{\mathrm{H}}, \tag{4}$$

$$r_{+}r_{-} = -\frac{6M}{\Lambda r_{\mathrm{H}}} = q, \tag{5}$$

于是 B 可以分解为

$$B = -\frac{\Lambda}{3r}(r - r_{\mathrm{H}})(r^2 + r_{\mathrm{H}}r + q). \tag{6}$$

黑洞的表面引力可表示为

$$\kappa = \frac{B'(r_{\mathrm{H}})}{2} = -\frac{\Lambda}{6r_{\mathrm{H}}}(2r_{\mathrm{H}}^2 + q), \tag{7}$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10375051)资助的课题.

† E-mail:miliqin0178@sina.com

其中 B 的上撇为对坐标 r 的导数.

在(1)式描述的时空中,可以如下建立零标架:

$$l^\mu = (B^{-1},1,0,0),$$
$$n^\mu = \frac{1}{2}(1,-B,0,0),$$
$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0,0,1,\mathrm{i}\operatorname{cosec}\theta). \tag{8}$$

显然 $l_\mu n^\mu = -m_\mu \bar{m}^\mu = 1$,其他内积为零. 应用 Newman-Penrose[16] 公式,从(1)和(8)式得到非零自旋系数为

$$\rho = -\frac{1}{r},\quad \mu = -\frac{B}{2r},$$
$$\gamma = \frac{B'}{4},\quad \alpha = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}r} = -\beta \tag{9}$$

和 Weyl 张量的非零分量为

$$\Psi_2 = -\frac{M}{r^3}. \tag{10}$$

(9)和(10)式表明,(1)式描述的时空是 Petrov D 类的,所以电磁和引力场方程可以用微扰方法简化为[17]

$$[(D-3\rho)(\Delta-2\gamma+\mu)-\delta(\bar{\delta}-2\alpha)]\Phi_0 = 0,$$
$$[(\Delta+3\mu)(D-\rho)-\bar{\delta}(\delta-2\alpha)]\Phi_2 = 0; \tag{11}$$
$$[(D-5\rho)(\Delta-4\gamma+\mu)$$
$$-(\delta+2\alpha)(\bar{\delta}-4\alpha)-3\Psi_2]\Psi_0^B = 0,$$
$$[(\Delta+2\gamma+5\mu)(D-\rho)$$
$$-(\bar{\delta}+2\alpha)(\delta-4\alpha)-3\Psi_2]\Psi_4^B = 0; \tag{12}$$

其中各算子的具体表达式为 $D = l^\mu\partial_\mu$, $\Delta = n^\mu\partial_\mu$, $\delta = m^\mu\partial_\mu$,且每一对方程中的第一个对应自旋态为 $p = s$ 第二个对应自旋态为 $p = -s$.

将(8)—(10)式代入(11)和(12)式,发现波函数可以分离变量

$$\Phi_0,\Phi_2,\Psi_0^B,\Psi_4^B = r^{p-s}\,{}_pR_{lE}(r)\,{}_p\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}, \tag{13}$$

其中 ${}_pR_{lE}(r)$ 由下式确定:

$$\Big\{(r^2B)^{-p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big[(r^2B)^{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big]$$
$$+\frac{r^4E^2+\mathrm{i}Ep(2r^3B-r^4B')}{r^2B}$$
$$+\frac{1}{6}(2p+1)(p+1)(r^2B)''$$
$$-\frac{1}{3}(2p+1)(p+1)-\lambda^2\Big\}\,{}_pR_{lE}(r) = 0, \tag{14}$$

而 ${}_p\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)$ 满足的方程为

$$\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$
$$+\frac{2\mathrm{i}p\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-p^2\cot^2\theta+p+\lambda^2\Big]\,{}_p\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi) = 0. \tag{15}$$

解方程(15)可以证明 ${}_p\mathrm{Y}_l^m(\theta,\varphi)$ 为自旋-加权球谐函数[18],其中分离变量常数 λ 值为

$$\lambda = \sqrt{(l-p)(l+p+1)}, \tag{16}$$

l,m 为整数,且满足不等式 $l\geqslant s$ 和 $-l\leqslant m\leqslant l$. 这样电磁和引力场的问题变成了求解普通微分方程(14)的问题.

3. 自由能与熵

按照 't Hooft[1] 的方案,黑洞的量子自由能和熵可在" brick-wall "边界条件下运用 Wentzel-Kramers-Brillouin 近似进行计算,所以径向波函数 $r^{p-s}\,{}_pR_{lE}(r)$ 可以写为

$$r^{p-s}\,{}_pR_{lE}(r) = \exp[\mathrm{i}S(r,p,l,E)], \tag{17}$$

那么方程(14)导致一个依赖径向坐标的波数,

$$k^2 \equiv [\partial_r S(r,p,l,E)]^2$$
$$= \frac{E^2}{B^2}+\frac{1}{r^2B}\Big[\frac{1}{6}(2p+1)(p+1)(r^2B)''$$
$$+\frac{1}{r}(s-p)(p+1)(r^2B)'$$
$$+(s-p)(s-p-1)B-\frac{1}{3}(2p+1)(p+1)$$
$$-(l-p)(l+p+1)\Big]. \tag{18}$$

根据半经典的量子化规则,能谱由下式给出:

$$\int_{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon}^{L}\mathrm{d}r\,k(r,p,l,E) = n\pi, \tag{19}$$

其中 ε 为一个正的小常数,L 为一个远大于 r_{H} 的半径,于是对应能量小于 E 的本征态数目为

$$g(E) = \sum_p\sum_l(2l+1)n$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_p\int_{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon}^{L}\mathrm{d}r\int_{|p|}^{l_{\max}}\mathrm{d}l(2l+1)\frac{1}{rB}[E^2r^2$$
$$-B(l-p)(l+p+1)$$
$$+B(s-p)-B\eta(r,p)]^{1/2}$$
$$= \frac{2}{3\pi}\sum_p\int_{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon}^{L}\frac{\mathrm{d}r}{rB^2}[E^2r^2-B\eta(r,p)]^{3/2}, \tag{20}$$

其中

$$\eta(r,p) = s(s-p)\frac{2M}{r}+\frac{1}{3}\Lambda r^2[(s-p)(2p+3)$$
$$+2(2p+1)(p+1)]. \tag{21}$$

设平衡温度的倒数为 β,则自由能可由下式

给出：

$$e^{-\beta F} = \prod_{n,p,l,m} (1 - e^{-\beta E})^{-1}. \tag{22}$$

利用(20)式确定的态密度，有

$$F = \frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} \mathrm{d}E\,\frac{\mathrm{d}g(E)}{\mathrm{d}E}\ln(1 - e^{-\beta E})$$
$$\approx -\frac{4\pi^3}{45\beta^4}\int_{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon}^{L}\frac{r^2}{B^2}\mathrm{d}r + \frac{\pi}{6\beta^2}\sum_p\int_{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon}^{L}\frac{\eta(r,p)}{B}\mathrm{d}r. \tag{23}$$

将(6)式代入(23)式，完成对 r 的积分，得到自由能在 $\varepsilon \to 0$ 的发散项为

$$F = -\frac{4\pi^3}{45\beta^4}\left[\frac{a}{\varepsilon} + b\ln\frac{L}{\varepsilon}\right] + \frac{\pi}{6\beta^2}b_s\ln\frac{L}{\varepsilon}, \tag{24}$$

其中

$$a = \frac{r_{\mathrm{H}}^2}{4\kappa^2}, \tag{25}$$

$$b = \frac{r_{\mathrm{H}}}{\kappa^2}\left(1 + \frac{\Lambda r_{\mathrm{H}}}{4\kappa}\right), \tag{26}$$

$$b_s = \frac{1}{3\kappa r_{\mathrm{H}}}[6Ms^2 + \Lambda r_{\mathrm{H}}^3(2s^2 + 3s + 2)]. \tag{27}$$

从(24)式容易得到黑洞的量子熵为

$$S = \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} = \frac{16\pi^3}{45\beta^3}\left[\frac{a}{\varepsilon} + b\ln\frac{L}{\varepsilon}\right] - \frac{\pi}{3\beta}b_s\ln\frac{L}{\varepsilon}. \tag{28}$$

4. 讨　论

(24)和(28)式给出 AdS 时空中 Schwarzschild 黑洞的量子自由能和熵，显然它们是由坐标截断的线性发散项和对数发散项组成，从(26)和(28)式可以看出，对数发散项分为两部分，一部分归于背景时空与黑洞的固有特征，即 Λ 和 M；另一部分是电磁和引力场的自旋效应，即(24)和(28)式的最后一项．应当注意，和渐进平直时空不同，对于 AdS 时空，量子场的统计熵不存在正比于体积(L^3)的项．

如果采用固有截断 $l_p = \sqrt{2\varepsilon/\kappa}$，并取平衡温度为 Hawking 温度，即 $\beta = 2\pi/\kappa$，那么(28)式中线性发散项可以表示为 $S = A/180\pi l_p^2$，这正是大多数文献讨论的正比于黑洞事件视界面积的量子修正项．(28)式中第一项与温度的三次方成正比，第二项与温度的一次方成正比．显然，在温度充分低的情况下，第二项变为重要的不可忽略的项．正是由于这一项的存在，导致了不同自旋场对黑洞熵有不同形式的贡献．

本工作得到北京师范大学赵峥教授的悉心指导，在此表示衷心感谢．

[1] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[2] Jing J L and Yan M L 2000 *Chin. Phys.* **9** 389

[3] Li Z H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 396

[4] Lui W B and Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **61** 63003

[5] Lui W B，Zhu J Y and Zhao Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 581 (in Chinese) [刘文彪、朱建阳、赵　峥 2000 物理学报 **49** 581]

[6] Shen Y G 2002 *Phys. Lett.* B **537** 187

[7] He H and Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2661 (in Chinese) [贺晗、赵　峥 2002 物理学报 **51** 2661]

[8] Zhang J Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 3454 (in Chinese) [张靖仪 2003 物理学报 **52** 3454]

[9] Carlip S 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 4175

[10] Li Z H 2000 *Phys. Rev.* D **62** 24001

[11] Jing J L and Yan M L 2001 *Phys. Rev.* D **63** 84028

[12] Jing J L and Yan M L 2001 *Phys. Rev.* D **64** 64015

[13] Li Z H 2002 *Mod. Phys. Lett.* A **17** 887

[14] Cai R G and Zhang Y Z 1996 *Mod. Phys. Lett.* A **11** 2027

[15] Winstanley E 2001 *Phys. Rev.* D **63** 84013

[16] Newman E and Penrose R 1962 *J. Math. Phys.* **3** 566

[17] Teukolsky S A and Press W H 1974 *Astrophys. J.* **193** 566

[18] Goldberg J N，Macfarlane A J，Newman E T，Rohrlich F and Sudarshan E C G 1967 *J. Math. Phys.* **8** 2155

Divergence structure for the quantum entropy of black holes in Anti-de Sitter spacetime*

Mi Li-Qin

(*Department of Physics*, *Zhanjiang Normal College*, *Zhanjiang* 524048, *China*)

(Received 29 August 2003; revised manuscript received 18 November 2003)

Abstract

Divergence structure for the quantum entropy of a black hole in Anti-de Sitter spacetime due to the electromagnetic and gravitational fields is investigated by using the brick-wall model. The entropy has both linearly and logarithmically divergent terms, where the linearly divergent term can reduce to the form proportional to the event horizon area if the temperature is replaced by the Hawking temperature and the coordinate cutoff is replaced by the proper cutoff; while the logarithmic divergences not only depend on the characteristics of the black hole but also on the spin of the fields. Since this term exists, the contribution of a spin field in general is not proportional to the scalar one.

Keywords: divergence structure, black hole entropy, AdS spacetime, electromagnetic and gravitational fields

PACC: 0470D, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10375051).