

采用振幅耦合方法研究多旋转中心混沌振子的相同步^{*}

莫晓华 唐国宁

(广西师范大学物理与信息工程学院 桂林 541004)

(2003 年 10 月 16 日收到 2003 年 11 月 26 日收到修改稿)

为了找到具有多个旋转中心的混沌系统的相同步与其动力学拓扑变化之间的对应关系,采用线性振幅线性耦合方法,研究了 Lorenz 系统和 Duffing 系统的相同步,首先对 Lorenz 系统和 Duffing 系统分别进行极坐标变换,在线性振幅耦合基础上计算了两个系统的平均旋转数和 Lyapunov 指数,发现,随耦合强度的增大,系统相同步与系统的 Lyapunov 指数跃变存在一一对应的关系,这表明具有多个旋转中心的混沌系统的相同步与系统动力学拓扑变化也存在着对应关系。

关键词: Lyapunov 指数, 振幅耦合, 相同步

PACC: 0545

1. 引 言

近年来,耦合混沌系统的相同步研究引起了广泛关注^[1-8],其中一个热点为系统间参数不匹配时混沌振子间相互耦合同步研究。在弱耦合情况下,随耦合系数的增大将出现相同步,而振幅却不存在必然的联系。这种现象的研究最早起始于对相互耦合 Rössler 混沌系统的研究^[3,4],其主要特征为(1)当达到相同步时,不同振子的相位差在某些时间段为一固定值,即出现锁相,并且经过有限的时间间隔后突然被 2π 的跳相打断,跃变为另一固定值的锁相,而且这种 2π 的跳相的频率将随耦合系数的增大而降低;(2)当耦合系数增大到某一阈值时,某一 Lyapunov 指数值将跃变为负值,这时发生相同步,这表明各振子间的相同步与动力学拓扑变化存在准确的对应关系。当用类似的方法研究具有多个旋转中心的混沌系统时,却没有发现相同步与 Lyapunov 指数跃变存在一一对应^[6],这说明对于一般的混沌系统,相同步的进程更为复杂,进一步分析有助于理解耦合混沌系统内在的有序行为。

本文研究了具有多个旋转中心的混沌系统的相同步,发现采用振幅耦合,可观察到相同步与 Lyapunov 指数跃变存在一一对应关系,这表明这样

的系统其相同步与动力学拓扑变化也存在准确的对应关系。

2. 模 型

对于单个旋转中心的 Rössler 混沌系统,由于旋转中心坐标为(0, 0),所以相角和平均旋转数分别可以取^[6]

$$\theta = \arctan(y(t)/x(t)), \quad \Omega_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\theta_i}{dt} dt. \quad (1)$$

对于具有多个旋转中心 Lorenz 系统和 Duffing 系统,相角定义相对较困难,至今仍未有一个普遍的定义^[9-11],因此有必要对这两种系统作进一步研究。下面采用(1)式研究 Lorenz 系统和 Duffing 系统的相同步,讨论这两个系统的动力学方程。

2.1. Lorenz 系统模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (2)$$

其中取 $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $\rho = 40$, Lorenz 系统可出现混

* 国家自然科学基金(批准号:10147101 和 10247005)资助的课题。

沌状态.

为了得出相同步与 Lyapunov 指数跃变之间的

关系 对方程(1)作柱坐标变换并加上振幅耦合 ,得到耦合 Lorenz 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{r}_{1,2} = \sigma r_{1,2} \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} - \sigma r_{1,2} \cos^2 \theta_{1,2} + \rho_{1,2} r_{1,2} \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} - r_{1,2} \sin^2 \theta_{1,2} \\ \quad - r_{1,2} z_{1,2} \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} + e(r_{2,1} - r_{1,2}), \\ \dot{\theta}_{1,2} = \rho_{1,2} \cos^2 \theta_{1,2} - \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} - z_{1,2} \cos^2 \theta_{1,2} - \sigma \sin^2 \theta_{1,2} + \sigma \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} = -bz_{1,2} + r_{1,2}^2 \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $r_{1,2}$ 和 $\theta_{1,2}$ 分别对应两参数失匹配系统的振幅和相角 $z_{1,2}$ 为柱高度, $\rho_{1,2} = 40 + \Delta_i$, $\Delta_i \in [-\Delta, \Delta]$ 为失配大小, $\Delta = 1$, e 为耦合强度, 参数 σ, b 的取值与原系统相同.

2.2. Duffing 系统模型

$$\begin{cases} \dot{r}_{1,2} = r_{1,2} \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} + \nu_{1,2} r_{1,2} \sin^2 \theta_{1,2} - (r_{1,2} \cos \theta_{1,2})^3 \sin \theta_{1,2} + g \sin \omega t \cos \theta_{1,2} \\ \quad + e(r_{2,1} - r_{1,2}), \\ \dot{\theta}_{1,2} = -\sin^2 \theta_{1,2} + \nu_{1,2} \sin \theta_{1,2} \cos \theta_{1,2} - r_{1,2}^2 \cos^4 \theta_{1,2} + g \sin \omega t \cos \theta_{1,2} / r_{1,2}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $r_{1,2}$ 和 $\theta_{1,2}$ 分别对应两参数失匹配系统振幅和相角, $\nu_{1,2} = -0.3 + \Delta_i$, $\Delta_i \in [-\Delta, \Delta]$ 为失配大小, $\Delta = 0.05$, e 为耦合强度, 参数 g, ω 的取值与原系统相同.

3. 数值模拟

采用四阶龙格-库塔方法对方程(3)和(5)进行数值计算. 图 1 给出耦合 Lorenz 系统的平均旋转数 Ω 和 Lyapunov 指数谱随耦合强度 e 变化情况. 从图

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \nu y - x^3 + g \sin \omega t, \quad (4)$$

其中取 $g = 12$, $\omega = 1$, $\nu = -0.3$, Duffing 系统可出现混沌状态.

同样对方程(4)作极坐标变换, 并加上振幅耦合, 得到耦合 Duffing 系统方程为

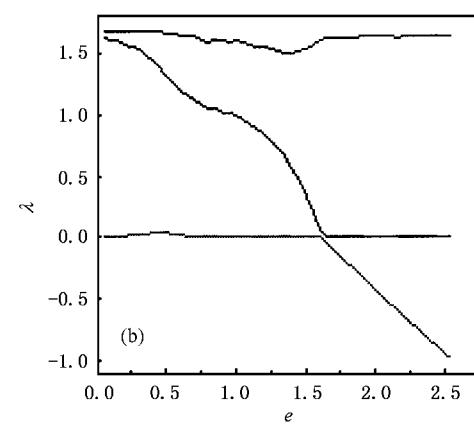
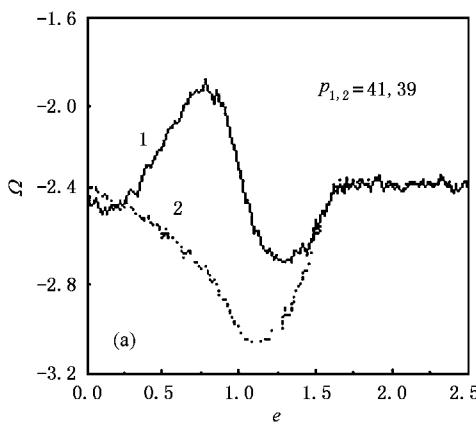


图 1 耦合 Lorenz 系统平均旋转数和前三个 Lyapunov 指数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 随耦合强度 e 的变化曲线

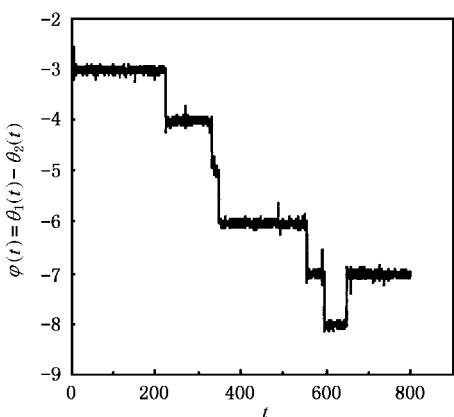


图 2 耦合 Lorenz 系统($e = 1.7$)相位差 $\varphi(t)$ 以 π 为单位变量 随时间 t 变化曲线

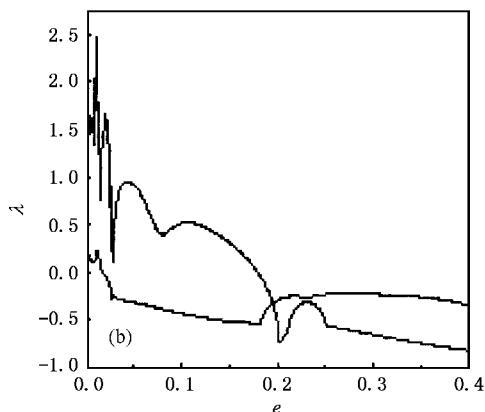
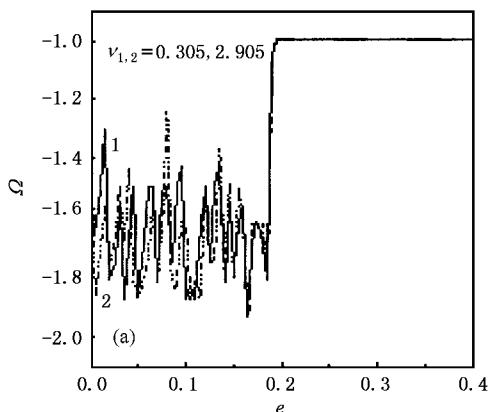


图 3 耦合 Lorenz 系统平均旋转数和前两个 Lyapunov 指数 λ_1, λ_2 随耦合强度 e 的变化曲线

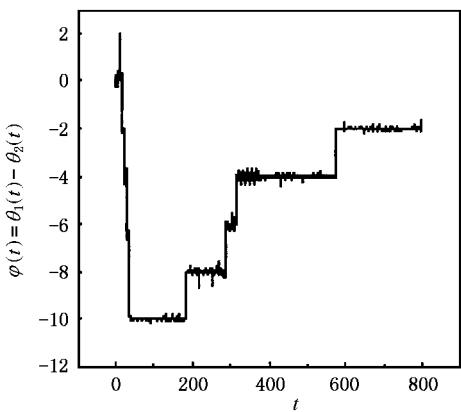


图 4 耦合 Duffing 系统($e = 0.19$)相位差 $\varphi(t)$ 以 π 为单位变量 随时间 t 变化曲线

4. 结 论

本文研究了多旋转中心混沌振子的相同步,发现采用振幅耦合可以使得两系统出现相同步,而且相同步与系统动力学拓扑变化存在准确的对应关系。此外还发现 $\Omega_{1,2}-e$ 两条曲线出现相交情况,以及相同步时 $\Omega_1 \neq \Omega_2$ 。产生这些现象的原因有待进一步研究。

图 3 给出耦合 Duffing 系统平均旋转数 Ω 和 Lyapunov 指数谱随耦合强度 e 变化情况。从图 3(a)可以看出:在 $e = 0.0$ — 0.185 范围内, $\Omega_{1,e}$ 与 $\Omega_{2,e}$ 两条曲线跳动较大,但随耦合强度的增强,当 $e \approx 0.185$ 时,两条曲线发生跃变,此后趋于稳定,且有 $\Omega_1 \approx \Omega_2$,两个系统处于相同步状态,相同步情况如图 4 所示,在相同步状态会出现 2π 的跳相。图 3(b)表明,在 $e \approx 0.018$ 处,耦合系统的第二大 Lyapunov 指数由正变为负,当 $e \approx 0.18$ 时,所有 Lyapunov 指数由正变为负,这表明相同步与动力学拓扑变化存在准确的对应关系。

- [1] Pikovsky A , Osipov G , Rosenblum M , Zaks M and Kurths J 1997 *Phys . Rev . Lett .* **79** 47
- [2] Pikovsky A S , Zaks M , Rosenblum M , Osipov G and Kurths J 1997 *Chaos* **7** 680
- [3] Rosenblum M G , Pikovsky A S and Kurths J 1996 *Phys . Rev . Lett .* **76** 1804
- [4] Rosenblum M G , Pikovsky A S and Kurths J 1997 *Phys . Rev . Lett .* **76** 4193
- [5] Rosa E R , Orr E and Hess M H 1998 *Phys . Rev . Lett .* **80** 1642
- [6] Zheng Z G , Hu G , Zhou C S and Hu B B 2000 *Acta Phys . Sin .* **49** 2320 (in Chinese) 郑志刚、胡 岗、周昌松、胡斑比 2000 物理学报 **49** 2320]
- [7] Chen Y H et al 2002 *Acta Phys . Sin .* **51** 731 (in Chinese) 陈永红等 2002 物理学报 **51** 731]
- [8] Wang G R , Yu X L and Chen S G 2001 *Control and Synchronization of Chaos and Its Application* (Beijing : National Defense Industry Press) p391 (in Chinese) 王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与应用 (北京 国防工业出版社), 第 391 页]
- [9] Hu G et al 1998 *Phys . Rev . Lett .* **81** 5314
- [10] Ma W Q et al 1999 *Acta Phys . Sin .* **48** 787 (in Chinese) 马文麒等 1999 物理学报 **48** 787]
- [11] Yalcenkaya T and Lai Y C 1997 *Phys . Rev . Lett .* **79** 3885

Study on phase synchronization of chaotic oscillators with many rotational centers based on amplitude coupling^{*}

Mo Xiao-Hua Tang Guo-Ning

(College of Physics and Information Technology , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

(Received 16 October 2003 ; revised manuscript received 26 November 2003)

Abstract

In order to find some relation between phase synchronization and dynamical topological variation in chaotic systems with many rotational centers , we propose a method of linear amplitude coupling to study the phase synchronization of Lorenz system and Duffing system. First , we convert the original Lorenz system and Duffing system into the dynamics of amplitude and phase . Based on linear amplitude coupling , we calculate the average winding number and Lyapunov exponents. We find that the phase synchronization comes along with the transition of Lyapunov exponents by increasing coupling strength. The results obtained indicate that phase synchronization is definitely related to dynamical topological variation in chaotic systems with many rotational centers .

Keywords : Lyapunov exponent , amplitude coupling , phase synchronization

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10147101 and 10247005).